

Institut für Baustoffe und Konstruktion, Fachgebiet Holzbau

Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz

Andreas Scholz

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor- Ingenieurs
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ. Prof. Dr.-Ing. F. Valentin

Prüfer der Dissertation:

1. Univ. Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger
2. Univ. Prof. Dr.-Ing. H. J. Blaß,
Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

Die Dissertation wurde am 04.12.2003 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
am 06.02.2004 angenommen.

Zusammenfassung

Bei der Berechnung von Flächentragwerken bzw. Trägerrosten aus Holz ist in vielen Fällen der nachgiebige Verbund einschließlich der Schubverformung zu berücksichtigen. In der Regel sind dabei auch Fragestellungen bezüglich der Stabilität (Theorie zweiter Ordnung) zu beachten. Es werden Untersuchungen zu einem entsprechenden Rechenverfahren, welches sich eines ideellen Modellquerschnitts bedient, durchgeführt. Dabei werden die Anwendungsgrenzen der Methode abgesteckt. Zu diesem Zweck sind auch analytische Lösungen für ausgesuchte System-Last-Konstellationen abgeleitet. Eine Erweiterung der Methode für Berechnungen nach Theorie zweiter Ordnung wird durchgeführt. Die Untersuchungen sind durch Beispielrechnungen ergänzt.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Holzbau (BV) der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ. Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger für die Übernahme des Hauptreferates sowie die wohlwollende Förderung und die fachlichen Diskussionen, die maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Herrn Univ. Prof. Dr.-Ing. H. J. Blaß, Ordinarius für Ingenieurholzbau und Baukonstruktion an der Universität Fridericiana zu Karlsruhe, möchte ich ganz herzlich für sein Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferates danken.

Bei Herrn Univ. Prof. Dr.-Ing. F. Valentin bedanke ich mich für seine Unterstützung und den Vorsitz der Prüfungskommission.

Meinem Bruder, Dr.-Ing. Ulrich Scholz danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes und die wertvollen Anregungen.

Meiner lieben Ehefrau Ursula danke ich von ganzem Herzen dafür, dass sie mir stets Rückhalt gegeben und Verständnis gehabt hat.

Außerdem danke ich meinen Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet Holzbau, die mit Ihrer Hilfsbereitschaft und Offenheit entscheidend zu einer angenehmen und fruchtbaren Arbeitsumgebung beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Begriffe und Bezeichnungen	6
2.1	Allgemeines	6
2.2	Bezeichnungen	7
3	Flächentragwerke im Ingenieurholzbau	9
3.1	Allgemeine Anmerkungen zu Flächentragwerken aus Holz	9
3.2	Überblick über Konstruktionsweisen und Rechenansätze für Flächentragwerke aus Holz	10
3.2.1	Platten und Scheiben aus Holz	10
3.2.2	Elementweise aufgebaute Stabnetzwerke	12
3.2.3	Hängekonstruktionen aus Holz	15
3.2.4	Schalenskonstruktionen aus versetzt angeordneten Brettlagen	17
3.2.5	Lattenroste	19
3.2.6	Brettrippenbauweise	20
4	Allgemeines zur Berechnung von Systemen mit Querschnitten aus nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten mit der Schubanalogie	23
4.1	Vorbemerkungen zum Nachgiebigen Verbund und seine rechnerische Berücksichtigung	23
4.2	Anmerkungen zur Transformation (Eingangswerte, Querschnittsgrößen)	27
4.3	Anmerkungen zur Rücktransformation (Ergebniswerte, Spannungen)	30
4.4	Die Kopplung der ideellen Ebenen	32
4.4.1	Anmerkungen zur Realisierung der Kopplung am Rechensystem	32
4.4.2	Grundsätzliche Überlegungen zu den Koppelkräften und deren Bedeutung	33
4.4.3	Allgemeiner Verlauf der Koppelkräfte, analytische Lösung	34
4.4.3.1	Die Differentialgleichungen der ideellen Ebenen	34
4.4.3.2	Die Differentialgleichung des Koppelkraftverlaufes	35
4.4.3.3	Verlauf der Koppelkraft für $p(x)=0$ – allgemeine (homogene) Lösung der DGL	36
4.4.3.4	Verlauf der Koppelkraft für ausgewählte Funktionen $p(x)$ – inhomogene Lösung der DGL	36

4.5	Lösung der Differentialgleichungen des ideellen Systems der Schubanalogie für ausgesuchte Systeme und Lastfälle	38
4.5.1	Der Eigenspannungszustand „gegenseitig orientierte Randmomente“ am Einfeldträger	38
4.5.2	Die Situation „Einfeldträger-Randmoment an Ebene B“	41
4.5.3	Der Lastfall „sinusförmige Streckenlast am Einfeldträger“	44
4.5.4	Der Lastfall „Gleichlast am Einfeldträger“	45
4.5.5	Der Lastfall „Einzellast in Feldmitte am Einfeldträger“	47
4.5.6	Der Lastfall „Gleichlast am Kragträger“	49
4.5.7	Der Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“	51
4.6	Berechnungen unter Berücksichtigung der Theorie 2. Ordnung	53
4.6.1	Vorbemerkung	53
4.6.2	Das kombinierte Fachwerkmodell (Dreiebenenmodell)	53
4.6.2.1	Allgemeines	53
4.6.2.2	Vergleichs- und Testrechnungen	55
4.6.3	Zur Genauigkeit der Lösung des Mehrstabsystems	59
4.6.3.1	Analytische Ableitungen und Abschätzungen	59
4.6.3.2	Ergänzende numerische Studien zum Einfluss der Unterteilung	62
4.6.4	Durchschlagproblematik	64
4.6.4.1	Theoretische Grundlagen zur Durchschlagproblematik	64
4.6.4.2	Beispiel Sparrenkonstruktion	65
4.6.5	Stabilitätsuntersuchungen von Flächen	70
4.7	Zur Krafteinleitung in das ideale System	71
4.7.1	Rand- und Übergangsbedingungen	71
4.7.2	Eigenspannungszustände	72
5	Verifizierung und Anwendungsgrenzen des Verfahrens der Schubanalogie	75
5.1	Vorbemerkung	75
5.2	Verifizierung der Theorie für Biegung mit Schub	75
5.2.1	Zweiteilige Querschnitte mit schubstarren, nachgiebig verbundenen Einzelquerschnitten	75
5.2.2	Allgemeine Anmerkungen zu mehrteiligen, aus schubstarren, nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten zusammengesetzten Querschnitten	78
5.2.3	Verbundquerschnitte aus beliebig vielen schubstarren, identischen Teilquerschnitten und jeweils identischer Verbindung	80

5.2.4	Verbundquerschnitte aus beliebigen (schubstarren) Teilquerschnitten und voneinander abhängigen Verbindungssteifigkeiten	83
5.2.5	Verbundquerschnitte aus beliebigen (schubstarren) Teilquerschnitten und voneinander unabhängigen Verbindungssteifigkeiten	84
5.2.6	Verbundquerschnitte aus schubweichen, nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten	84
5.3	Verifizierung der Theorie für Normalkrafteinwirkungen	86
5.4	Verifizierung der Theorie für Torsionsbeanspruchung	87
5.5	Anwendungsgrenzen bezüglich der Querschnittsgeometrie und der Steifigkeitsverhältnisse	90
5.5.1	Vorüberlegungen zum Einfluss der Fugensteifigkeiten auf das Tragverhalten von Verbundträgern	90
5.5.2	Vergleichsrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“	98
5.5.3	Vergleichsrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“ - Variation der Fugensteifigkeiten	102
5.5.3.1	Theoretisch „exakte“ Lösung	102
5.5.3.2	Variation der Steifigkeiten in den Verbundfugen bei identischen Fugensteifigkeiten	103
5.5.3.3	Variation der Steifigkeiten in der mittleren Verbundfuge bei $c_{12}=c_{34}=112,5 \text{ MN/m}^2$	105
5.5.3.4	Variation der Steifigkeiten in der mittleren Verbundfuge bei $c_{12}=c_{34}=1,125 \text{ MN/m}^2$	106
5.5.3.5	Variation der Steifigkeiten in den äußeren Verbundfugen, antisymmetrischer Fall bei $c_{23}=112,5 \text{ MN/m}^2$	108
5.5.3.6	Variation der Steifigkeiten in den äußeren Verbundfugen, antisymmetrischer Fall bei $c_{23}=1,125 \text{ MN/m}^2$	110
5.5.4	Schlussfolgerung aus den Vergleichsrechnungen	112
6	Ergänzende Anmerkung für die Berechnung und Bemessung	113
6.1	Zum Einfluss der Schubsteifigkeit auf den Spannungszustand	113
6.2	Zum Rollschub	117
6.3	Zum Nachweis in Grenzzuständen der Tragfähigkeit	121
6.4	Zur Torsion von Flächen aus Holz	125
6.5	Zur Abbildung von Flächen aus Holz im ideellen System	130
7	Erweiterte Test- und Beispielrechnungen	131
7.1	Berechnungsbeispiel „Eigenspannungszustände Brettstapelbogen“	131
7.1.1	Angaben zum System	131

7.1.2	Spannungen aus Vorkrümmung	132
7.1.3	Der Zustand „Elastische Rückverformung des nicht gehaltenen Brettstapelbogens“	133
7.1.4	Der Zustand „elastische Rückverformung des durch Lagermessdosen gehaltenen Brettstapelbogens“	139
7.2	Beispielrechnung geschichtete zylinderförmige Holzschale	145
7.2.1	Vorbemerkung und allgemeine Angaben zum System	145
7.2.2	Vergleichsrechnung „geklebte Holzschale“	146
7.2.2.1	Eingangsgrößen und Transformation zum ideellen System	146
7.2.2.2	Berechnung und Vergleich der Ergebnisse	148
7.2.3	Vergleichsrechnung „genagelte Holzschale“	155
7.2.3.1	Eingangsgrößen und Transformation zum ideellen System	155
7.2.3.2	Berechnung und Vergleich der Ergebnisse	156
8	Zusammenfassung	163
9	Literatur	164
10	Verzeichnis der Abbildungen	172

1 Einleitung

Für viele bautechnische Aufgaben sind Flächentragwerke eine elegante und ansprechende Lösung, die in jüngerer Zeit vermehrt ausgeführt wird. Aktuelle Entwicklungen im Bereich der Werkstoffe und der Berechnungsmethoden kommen dem Trend entgegen und ermuntern sowohl Architekten wie auch Tragwerksplaner zu innovativen, wegweisenden Konstruktionen. Dabei spielt zunehmend auch der Werkstoff Holz eine Rolle. Für viele Aufgaben bietet sich in diesem Zusammenhang die Verwendung moderner Holzwerkstoffe an. So werden neben den bewährten Holzwerkstoffen aus Holzpartikeln (Spanplatten MDF, OSB) oder Sperrholz vermehrt großformatige Holzplatten wie Brettstapelelemente und Brettsperrholz als Tragelemente eingesetzt. Diese Elemente weisen aufgrund ihres Aufbaus meist die Voraussetzungen auf, um die Funktionen der Querverteilung von Einwirkungen, der Lastabtragung zu den Auflagern und der Aussteifung in einem Bauteil zu vereinen. Sie können als tragende Bauteile z. B. für Deckenplatten, Wandscheiben, Fahrbahnplatten, Schalen oder ganze Flächentragwerke (Hallenbau) eingesetzt werden. Aber auch rostartige Konstruktionsweisen, wie z.B. Brettrippenschalen, sind ein probates Mittel zur Realisierung flächiger Tragstrukturen aus Holz.

Aufgrund der durch das natürliche Wachstum vorgegebenen Dimensionen liegt der Baustoff Holz zunächst als lineares Bauteil vor. Das Zusammenfügen zu den genannten Tragstrukturen hat in der Regel Besonderheiten bezüglich des Querschnittaufbaus zur Folge, die von der stofflichen und der konstruktiven Anisotropie sowie der Nachgiebigkeit des Verbundes einschließlich der Schubnachgiebigkeit herrühren. Dadurch gestaltet sich die Berechnung von Flächentragwerken bzw. Trägerrosten aus Holz infolge des Aufbaues der Fläche aufwendig. Oft sind auch Fragestellungen bezüglich der Stabilität (Theorie zweiter Ordnung) zu beachten. Die Berechnung und Bemessung solcher Konstruktionen erfordert spezielle Rechenverfahren.

Bisher ausgeführte Flächentragwerke wurden mit großem Aufwand berechnet - meist unter Einsatz von Näherungsbetrachtungen, die deutlich auf der sicheren Seite liegen. Eine Methode dafür ist die Abbildung der Fläche als räumliches Stabtragwerk. Derartige Rostberechnungen sind zweckmäßig, da die Erfassung der für Flächenelemente aus Holz typischen Anisotropie mit Finite-Element-Berechnungen oft problematisch ist. Zudem ist in vielen Fällen bereits durch das Tragwerk selbst eine rostartige Tragstruktur vorgegeben. Die bei den Untersuchungen oft verwendete „effektive Steifigkeit“ der Stäbe wird entsprechend den Regeln zur Berechnung von Trägern aus nachgiebig miteinander verbundenen Teilen über eine geschätzte Länge zwischen den Momentennullpunkten bestimmt. Durch Variation der Querschnittswerte erhält man Grenzwerte, mit denen sich die bemessungsrelevanten Schnittgrößen abschätzen lassen. Dabei ist jedoch neben dem notwendigen Aufwand eventuell der Nachteil einer unwirtschaftlichen Bemessung in Kauf zu nehmen.

Bei dem Berechnungsverfahren der so genannten „Schubanalogie“ werden die Querschnitte aus mehreren Schichten mit nachgiebigem Verbund und Schubverformung über Steifigkeitskennwerte zweier ideeller Schichten charakterisiert. Eine Anwendung dieser Vorgehensweise bietet sich für eine computergestützte Berechnung von Flächen mit dem genannten Aufbau an.

Für viele Querschnittsaufbauten stellt dieses Verfahren eine Näherung dar, wobei die Größenordnung der Abweichungen bzw. Anwendungsgrenzen nicht genannt werden. Darüber hinaus sind noch Untersuchungen notwendig, um die Methode auf räumlich gekrümmte Strukturen anwenden zu können. Bezüglich des wichtigen Gesichtspunktes der Stabilität, welcher für die Bemessung von Flächentragwerken, die über Membrankräfte abtragen, oft maßgebend ist, stehen ebenfalls noch Aussagen aus.

Die vorliegende Arbeit zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz soll helfen, die mit diesen Fragestellungen verbundenen Unklarheiten zu beseitigen.

2 Begriffe und Bezeichnungen

2.1 Allgemeines

Das in dieser Arbeit vorwiegend behandelte Rechenmodell basiert darauf, Verbundquerschnitte aus mehreren nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten mittels eines ideellen Querschnitts, welcher aus zwei bzw. drei über die Verformung gekoppelten ideellen Teilquerschnitten besteht, abzubilden. Um bei der Bezeichnungsweise Verwechslungen wie z.B. mit den Schichten von Schichthölzern zu vermeiden, werden die ideellen Schichten des Rechenmodells als Ebenen bezeichnet. Im weiteren Sprachgebrauch bezieht sich also der Begriff „Schichten“ auf den realen Querschnitt, die Bezeichnung „Ebenen“ auf den ideellen Modellquerschnitt. Diese Definition wird auch für Trägerberechnungen beibehalten. Allgemein wird zwischen der Ebene A, welche die Eigenanteile des Verbundquerschnitts erfasst, sowie der Ebene B, die den Einfluss der Schubverbindungen und der Steineranteile abbildet, unterschieden. Für Tragstrukturen, die zu einem großen Teil über Normalkräfte abtragen, wird zusätzlich die Ebene C eingeführt. Mit Hilfe der Kopfzeiger A, B und C werden die spezifischen Kenngrößen der entsprechenden Ebene zugewiesen.

Die weiteren verwendeten Bezeichnungen stimmen weitgehend mit den in der Baustatik üblichen Bezeichnungsweisen überein. Die Fußzeiger x , y , z kennzeichnen die betreffende Richtung, wobei der erste Buchstabe das Schnittufer, der zweite die Orientierung angibt. Der Fußzeiger i besagt, dass es sich um eine Kenngröße des Teilelementes i handelt. Wird lokal nichts Abweichendes vereinbart, sind Werte allgemein in [MN] und [m] angegeben. Punkt 2.2 gibt eine exemplarische Übersicht anhand ausgewählter Bezeichnungen. Ergänzend ist in Bild 2.1-1 exemplarisch ein Schichtplattenausschnitt, an dem Spannungs- und Geometrie Kenngrößen angetragen sind, dargestellt.

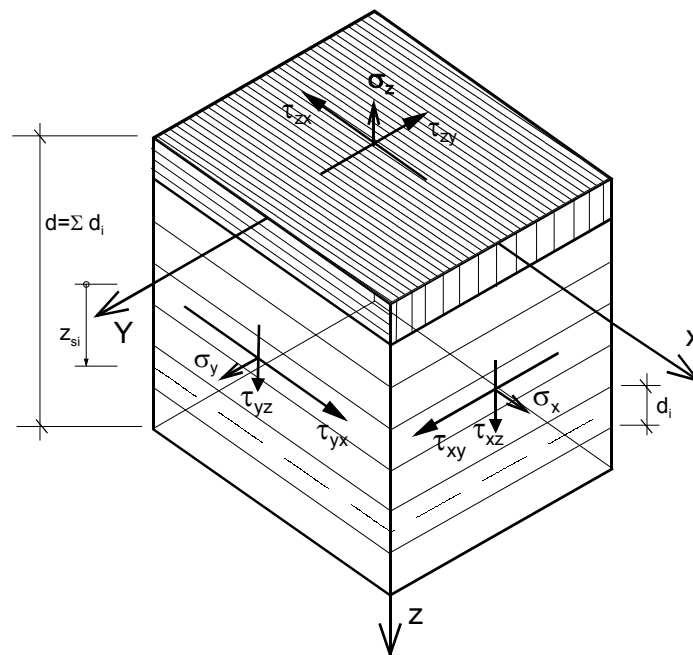


Bild 2.1-1: Ausschnitt einer Schichtplatte mit Bezeichnungen

2.2 Bezeichnungen

M_y	Biegemoment (Stab, Biegung um y-Achse)	[MNm]
M_y^A	Eigenanteil am Biegemoment (Stab, Biegung um y-Achse)	[MNm]
m_x	Biegemoment in x-Richtung (Biegung um y-Achse), bezogen auf 1m Breite	[MNm/m]
m_x^A	Eigenanteil am Biegemoment in x-Richtung, bezogen auf 1m Breite	[MNm/m]
n_x	Normalkraft in x-Richtung, bezogen auf 1m Breite	[MN/m]
q_x	Querkraft in Z-Richtung am Schnittufer X, bezogen auf 1m Breite	[MN/m]
$t_{i,i+1}$	Schubfluss an der Fuge zwischen Schicht i und Schicht i+1	[MN/m]
E	Elastizitätsmodul	[MN/m ²]
E_{xi}	Elastizitätsmodul der Schicht i in x-Richtung	[MN/m ²]
E_α	Elastizitätsmodul unter dem Winkel α zur x-Achse	[MN/m ²]
G	Schubmodul	[MN/m ²]
$G'_{i,i+1}$	Schubmodul der Schubschicht zwischen der Schicht i und Schicht i+1	[MN/m ²]
C	Federkonstante der Verbindungsmittel pro Verbindung	[MN/m]
c	Schubsteifigkeit der Verbindung, auf 1m Länge	[MN/m ²]
$c_{i,i+1}$	Schubsteifigkeit der Verbindung der Schicht i mit der Schicht i+1, auf 1m Länge	[MN/m ²]
$\bar{c}$	Schubsteifigkeit der Verbindung, auf 1m ² Fläche	[MN/m ³]
γ	Gleitwinkel aus Schubverformungen	[rad]
γ_{ers}	Über die Querschnittshöhe konstante Ersatzgleitung	[rad]
γ_m	Mittlere Gleitung unter $\tau=\text{const.}$, ohne Korrektur	[rad]
w_M	Biegeanteil der Durchsenkung w	[m]
w_Q	Schubanteil der Durchsenkung w	[m]
u_i	Verschiebung des Schwerpunktes von Schicht i	[m]
$\Delta u_{i,i+1}$	Differenz der Schwerpunktverschiebungen von Schicht i und Schicht i+1	[m]
κ	Faktor zur Berücksichtigung des Schubspannungsverlaufs	[-]
A^*	Ersatz-Schubfläche $A^* = \frac{A}{\kappa}$	[m ²]
I	Trägheitsmoment	[m ⁴]
I_x^B	Steineranteil des Trägheitsmoments in x-Richtung	[m ⁴]
B	Biegesteifigkeit, (bei Platten: bezogen auf 1m Breite)	[MNm ² /m]
B_{xi}^A	Eigenanteil der Biegesteifigkeit der Schicht i in x-Richtung	[MNm ² /m]
B_x^A	Biegesteifigkeit ideale Ebene A in x-Richtung, $B_x^A = \sum_n B_{xi}^A$	[MNm ² /m]
S	Schubsteifigkeit	[MN]
S^*	Mit κ korrigierte Schubsteifigkeit	[MN]
S_{xz}^B	Schubsteifigkeit Ebene B pro m Breite, Schnittufer X Richtung Z (Querkraftschub)	[MN/m]
D_x^A	Dehnsteifigkeit Ebene A in x-Richtung, bezogen auf 1m Breite	[MN/m]
n	Anzahl der Schichten einer Schichtplatte	[-]
d	Dicke Platte bzw. des Gesamtquerschnitts	[m]
d_i	Dicke der Schicht i einer Schichtplatte bzw. eines Teilelements i	[m]
$d'_{i,i+1}$	Dicke der Schubschicht zwischen Teilelement i und Teilelement i+1	[m]
$z_{0,s}$	Mit dem E-Modul gewichteter Schwerpunkt des Verbundquerschnitts	[m]
z_{Si}	Abstand der Schwerlinie der Schicht i vom gewichteten Schwerpunkt $z_{0,s}$	[m]
z_i	z-Koordinate bezogen auf die Schwerlinie der Schicht i	[m]

a	Schwerpunktabstand der beiden Randquerschnitte bzw. Deckschichten	[m]
$a_{i,i+1}$	Abstand der Schwerpunkte von Schicht i und Schicht i+1	[m]
s	Wegstrecke zur Ermittlung der Arbeit	[m]
σ_{xi}^{Ro}	Normalspannung der Schicht i in x- Richtung am oberen Rand	[MN/m ²]
$\sigma_{xi}^{A,Ro}$	Normalspannung der Schicht i in x- Richtung am oberen Rand, Eigenanteil	[MN/m ²]
$SE_{i,o}$	Mit den E-Moduli gewichtetes Statisches Moment, oberer Schichtrand Schicht i	[MNm]
$SE_{i,u}$	Gewichtetes Statisches Moment, unterer Schichtrand Schicht i	[MNm]
$SE_{i,i+1}$	Gewichtetes Statisches Moment an der Fuge zwischen Schicht i und i+1 ($\equiv SE_{i,u}$ für Schichten im Zwischenbereich)	[MNm]
$\Delta SE_{i,m}$	Parabelstich des statischen Moments in Schichtmitte multipliziert mit E_i	[MNm]
Π_I^*	Elastisches Potential des realen Querschnittes pro Längeneinheit	$\left[\frac{MNm}{m} \right]$
Π_{II}^*	Elastisches Potential des ideellen Querschnittes pro Längeneinheit	$\left[\frac{MNm}{m} \right]$
f'	Ableitung der Funktion f nach x, $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$	
$\dot{f}$	Ableitung der Funktion f nach y, $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial y}$	

3 Flächentragwerke im Ingenieurholzbau

3.1 Allgemeine Anmerkungen zu Flächentragwerken aus Holz

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden einige wichtige Konstruktionsweisen für „Tragende Flächen aus Holz“ und die zugehörigen Berechnungsansätze vorgestellt. Dabei wurde ein knapper, zusammenfassender Überblick über gängige Konstruktionen angestrebt. Eine ausführliche Zusammenstellung ausgeführter Beispiele mit zugehöriger Literatur und weitere Informationen zu den Bauweisen sind z.B. bei Böttcher [11] und Meschke [58] zu finden.

Für die Herstellung einer Holzfläche ist es notwendig, den von Natur aus stabförmig vorliegenden Werkstoff Holz in geeigneter Art und Weise zusammenzufügen. Im Laufe der Zeit wurden dazu verschiedene Methoden entwickelt und geprüft. Je nach Interpretation des Begriffs „Flächentragwerk“ können einige der beschriebenen Bauweisen nicht als solches bezeichnet werden. Gemäß Laermann [57] ist der Begriff Flächentragwerk wie folgt definiert:

Als Flächentragwerk „wird ein zweidimensionales Tragwerk bezeichnet, dessen Abmessungen senkrecht zur Fläche gegenüber den Randabmessungen klein ist. Ist die Fläche eine Ebene, und werden nur Lasten eingeleitet, die in der Fläche wirken, nennt man das Flächentragwerk Scheibe, wirken die Lasten senkrecht zur Fläche, nennt man es Platte. Wenn die Fläche beliebig gekrümmt ist, so wird das Flächentragwerk als Schalentragwerk bezeichnet. Zu den Flächentragwerken sind auch die Faltwerke zu zählen, bei denen die Beanspruchungen von Scheiben und Platten kombiniert werden.“

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff etwas weiter gefasst. So werden auch Tragkonstruktionen, welche aus etwas Abstand betrachtet zwar als Fläche erscheinen, aber in der Struktur rostartig sind, zu den Flächentragwerken gezählt. Beispiele dafür sind Stabnetzwerke, wie sie in Kapitel 3.2.2 beschrieben sind, oder die in Kapitel 3.2.6 behandelten Rippenschalen. Als Kriterium wird vor allem die Art der Lastabtragung herangezogen. Demnach ist bei den hier als Flächentragwerk bezeichneten Tragstrukturen meist keine klare Trennung in voneinander unabhängige Primär- und Sekundärsysteme möglich, wie dies z.B. bei klassischen Haupt-Nebenträgerkonstruktionen aus Holz der Fall ist. Im Idealfall wirkt die gesamte Tragstruktur als Einheit zur Erfüllung der Aufgaben, nämlich Querverteilung, Weiterleitung der Last zu den Auflagern sowie Aussteifung des Gesamtsystems.

3.2 Überblick über Konstruktionsweisen und Rechenansätze für Flächentragwerke aus Holz

3.2.1 Platten und Scheiben aus Holz

Die Unterscheidung in Platte oder Scheibe ist weniger durch das Element an sich, als durch seine Tragwirkung im Gesamtsystem gegeben. Im Weiteren werden hier diese zweidimensionalen Bauelemente als „Platten“ bezeichnet. Die Möglichkeiten zur Herstellung von Holzplatten sind mannigfaltig. Durch die Verwendung in der Möbelindustrie sind vor allem die so genannten Spanplatten bekannt. Verwandt sind Holzwerkstoffe wie OSB- und MDF- Platten, die durch Verklebung von Holzpartikeln unterschiedlichster Art entstehen. Oft finden auch „Tischlerplatten“ oder die aus verklebten Furnieren aufgebauten Sperrholzplatten Verwendung. Die baupraktische Bedeutung dieser Elemente beschränkt sich in der Regel auf verkleidende oder aussteifende Funktion. Die Dimensionen sind meist aus fertigungstechnischen oder wirtschaftlichen Gründen zu klein, als dass sie für tragende Funktionen im Sinne von Primärtraggliedern des Ingenieurholzbaues in Frage kämen.

Eine in den letzten Jahren entwickelte und vermehrt eingesetzte Konstruktionsweise für einen plattenartigen, in Serienproduktion herstellbaren Holz-Werkstoff mit für ein Primärtragglied relevanten Abmessungen ist das so genannte Brettsperrholz. Unter diesem Oberbegriff werden mehrere, im Aufbau den so genannten Mehrschichtplatten sehr ähnliche Produkte verschiedener Hersteller zusammengefasst. Das Brettsperrholz besteht aus mehreren versetzt angeordneten und verklebten Lagen nebeneinander liegender Bretter. In der Regel sind die einzelnen Lagen um 90° versetzt angeordnet; es kommen jedoch bisweilen auch andere Winkel zum Einsatz. Generell gibt es unterschiedliche, herstellereigenspezifische Verfahren für Anordnung und Verklebung. So werden z. B. die Längskanten der Bretter nicht in allen Fällen verklebt. Auch bei der Erzeugung und der Größe des Anpressdrucks beim Klebevorgang gibt es Unterschiede. Je nach Vorgehensweise ist auch die Herstellung von gekrümmten Brettsperrholz-Elementen möglich. Da die Bauweise noch relativ jung ist, sind Weiterentwicklungen wahrscheinlich. Bei der Berechnung und Bemessung von Brettsperrholzelementen sind die aus dem Elementaufbau resultierenden Einflüsse besonders zu beachten. Aufgrund des geringen Schubmoduls von Holz in der radial-tangential-Ebene sind die Querlagen jeweils als schubweiche Zwischenschichten anzusehen (Stichwort „Rollschub“, siehe Kapitel 6.2). Für ein begrenztes Sortiment dieser Elemente liegen bauaufsichtliche Zulassungen vor. Im Allgemeinen ist die Bemessung von Brettsperrholz inzwischen mit dem Schlussentwurf der Bemessungsnorm Holzbau BEKS-2002 [N4] normativ geregelt. Die Anwendung der Bestimmungen setzt aber eine korrekte Ermittlung der Spannungsverteilung über den Verbundquerschnitt voraus. Um die Nachgiebigkeit der Zwischenschichten bei der Berechnung zu berücksichtigen, bietet sich der Einsatz der Schubanalogie (vgl.: Kapitel 4) an. Ein Beispiel für die Verwendung von Brettsperrholz ist die 30m lange Straßenbrücke bei Ruderting (Bild 3.2-1).



Bild 3.2-1: Straßenbrücke Ruderting; links: Ansicht, rechts: Untersicht. Quelle:[67]

Durch die Kombination von 25 cm dicken Brettsperrholzplatten mit Brettschichtholzträgern ($b \times h = 40 \times 75 \text{ cm}^2$) wurde hier ein Plattenbalken aus Holz gebildet, der die Lasten der Brückenklasse 30/30 bei Stützweiten von 8,65 m bzw. 11,70 m abtragen kann (näheres dazu siehe z.B.: [67]).

Für die Decken des Zwischengeschosses eines Kundencenters in Rastatt bilden Brettsperrholzplatten mit Abmessungen von $\ell \times b \times d = 10,56 \times 11,40 \times 0,26 \text{ m}^3$ bzw. $\ell \times b \times d = 8,25 \times 13,10 \times 0,26 \text{ m}^3$ die tragenden Elemente (vgl.: [35]).

Ein Beispiel für den Einsatz gekrümmter Brettsperrholzelemente ist die in Bild 3.2-2 gezeigte und 1999 gebaute Aussegnungshalle von Gräfelfing ([89]). Obwohl der Werkstoff Holz hier nicht in Form einer Platte im strengen Sinne zum Einsatz kommt und die Elemente nur bedingt zur Lastabtragung herangezogen werden, ist das Beispiel in diesem Abschnitt aufgeführt. Es soll die Möglichkeiten von Brettsperrholz andeuten. Brettsperrholz hat weitere Anwendungsbereiche wie z.B. Decken und Wände im Massivholz-Hausbau (vgl. z.B. [6]).



Bild 3.2-2: Aussegnungshalle Gräfelfing; Quelle: [89]

Eine andere Möglichkeit zur Herstellung von Holzflächen mit großer Dicke ist die so genannte Blockverleimung von Brettschichtholzträgern. Meist werden diese, durch die Verklebung der Längsseiten von Brettschichtholzträger gebildeten Platten durch aufgeklebte Deckschichten aus Furnierschichtholzplatten o. Ä. ergänzt. Dies ist aufgrund der geringen Festigkeit und Steifigkeit von Holz quer zur Faser für die Querverteilung der Lasten und zur Aufnahme der Querbiegung notwendig. Ein Beispiel für diese Bauweise ist die 1997 errichtete, 22,80 m lange Brücke über den Sausenden Graben (Brückenklasse 30/30) an der Mautstrasse zwischen Wallgau und Vorderriss in Oberbayern (vgl.: [102]).

Aus nebeneinander stehenden, quer vorgespannten Brettern bestehen die so genannten QS-Platten. Sie kommen bisher hauptsächlich bei der Erstellung von einfachen Brücken, wie sie z.B. im Bereich des Forstwesens benötigt werden, zum Einsatz [5]. Es lassen sich aber durchaus auch anspruchsvollere Bauwerke mit dieser Bauweise errichten. Für die Berechnung und Dimensionierung ist die stark ausgeprägte Anisotropie dieser Elemente zu beachten. Vorschläge hierzu wurden u. A. von Kreuzinger und Mohr in [5] gemacht.

Verwandt dazu sind die so genannten Brettstapelelemente. Hier werden nebeneinander stehende Bretter miteinander vernagelt. Aufgrund der geringen Zugfestigkeit von Baustoff und Verbindungsmittel quer zur Spannrichtung der Platte, ist die Lastverteilung und Tragfähigkeit in Querrichtung gering. Das ist bei der Bemessung zu beachten. In diesem Kontext wurden z.B. jüngst von Krämer [46] Untersuchungen an Brettstapelelementen durchgeführt. Die Brettstapelbauweise findet momentan vorwiegend im Holzhausbau Verwendung.

Werden ebene Holzelemente so zusammengefügt, dass sie sich an den Kanten gegenseitig aussteifen, entstehen Faltwerke aus Holz. Die Tragwirkung beruht in den meisten Fällen vornehmlich auf Kräften in Plattenebene. Ein jüngeres Ausführungsbeispiel für diese, seit ungefähr

1955 gebräuchliche Bauweise, sind die 1996 in Jenbach (Tirol) zur Überdachung von Turnhallen errichteten Dächer (siehe Bild 3.2-3). Mit Hilfe von Faltwerken aus Rippenplatten wird hier eine Spannweite von 44 m überbrückt. Der Querschnitt dieser Platten ist aus BSH-Rippen ($b \times h = 4 \times 20 \text{ cm}^2$), welche beidseits mit Dreischichtplatten ($d = 26 \text{ mm}$) beplankt sind (vgl.: [43]), aufgebaut.



Bild 3.2-3: Luftaufnahme Sporthallen bei Jenbach (Tirol); Quelle: [34]

3.2.2 Elementweise aufgebaute Stabnetzwerke

Mit Hilfe von Netzwerken aus vielen Einzelstäben lassen sich optisch ansprechende und ingenieurmäßig interessante flächenartige Tragstrukturen aus Holz erstellen.

Friedrich Zollinger entwickelte Anfang des 20. Jahrhunderts auf Basis des aus dem Mittelalter herrührenden de l'Ormeschen Bohlenbinders das 1910 unter der Bezeichnung „Zollbau-Lamellendach“ patentierte Konstruktionsprinzip. Es ermöglicht die Errichtung von Stabnetzwerken, die fast ausschließlich aus lauter identischen Einzelelementen mit geringer Abmessung bestehen. Dies ist in Bild 3.2-4 angedeutet. Mit der Möglichkeit einer Serienherstellung der Einzelteile und der günstigen Tragwirkung des „Gesamtsystems Stabnetzwerk“ kam Zollinger der Forderung nach hoher Wirtschaftlichkeit nach. So wurde die Bauweise gerne zur Errichtung von Dachtragwerken eingesetzt, da sie eine Holzersparnis von ca. 30% im Vergleich zu gängigen Binderkonstruktionen erlaubt. Es wurden zahlreiche Überdachungen mit Spannweiten bis ca. 35 m in Zollinger Bauweise ausgeführt ([58]). Eine umfassende Zusammenstellung ausgeführter Beispiele wurde z.B. mit [101] gegeben.

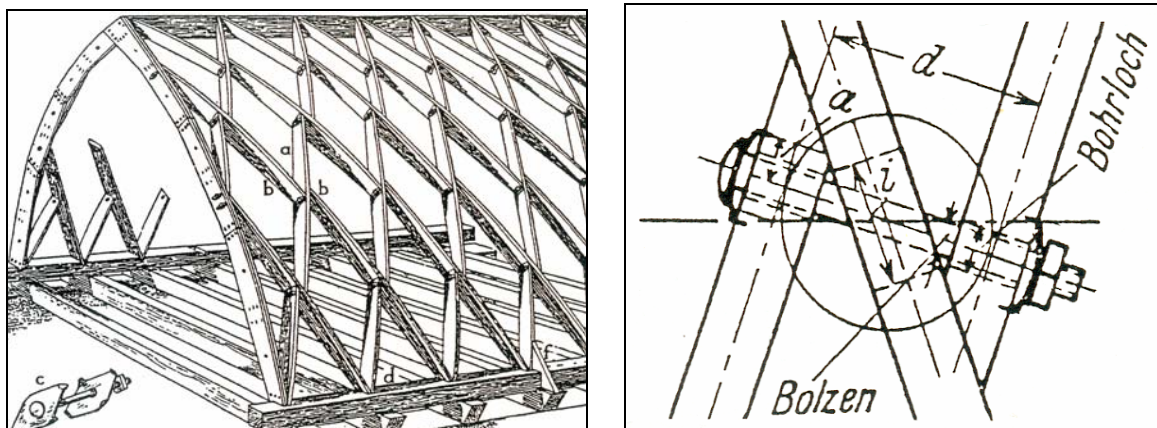


Bild 3.2-4: Zollinger Bauweise; links: Gesamttragwerk, schematisch (aus [15]), rechts Knotenpunkt [58]

Aus Geometrie Gründen können auf die beschriebene Weise jedoch ausschließlich Tragwerke, die im Schnitt der Form von Kreisbögen bzw. Kreissegmenten folgen, gebildet werden. Das hat zur Folge, dass das Tragwerk, je nach Lastfall und Formgebung, durch relativ große Biegemomente beansprucht wird. Die daraus resultierende Übertragung der Biegemomente im Bereich der Knotenpunkte und die Torsion der Lamellen stellten sich als problematisch heraus (vgl. z.B. [24]). Vor allem aber führte der Schlupf der Verbindungen in den zahlreichen Knotenbereichen dazu, dass die Konstruktion sehr nachgiebig wurde. Durch Schwind- und Kriecherscheinungen wird diese Tendenz bisweilen deutlich verstärkt. Deshalb erreichten die Verformungen teilweise eine Größenordnung, die einschränkend auf die Gebrauchstauglichkeit wirkte. Die Bauweise verlor im Laufe der Zeit in Deutschland ihre Bedeutung und kam nach dem zweiten Weltkrieg kaum noch zum Einsatz.

In jüngerer Zeit wird der Gedanke der Rauten-Lamellen-Konstruktionen aus vielen, möglichst identischen Teil-Elementen immer wieder aufgegriffen. Neue Formen der Knotenausbildung und der Einsatz moderner, computergesteuerter Abbundanlagen bieten neue Möglichkeiten. Ein aktuelles Beispiel dafür ist die 2002 errichtete Überdachung der Zentralen Halle der neuen Messe Rostock, wo mit Brettschichtholzelementen der Abmessungen $6 \times 0,2 \times 0,75 \text{ m}^3$ eine Überdachung mit 65 m Spannweite realisiert wurde (vgl. z.B.: [87]). Auch bei der 2001 gebauten neuen Messe in Rimini wurden Dachtragwerke mit rautenförmig angeordneten Holzlamellen ausgebildet (näheres siehe z.B. bei Jakob, [41]). In Bild 3.2-5 ist die Kuppel über der zentralen Rotunde dargestellt.

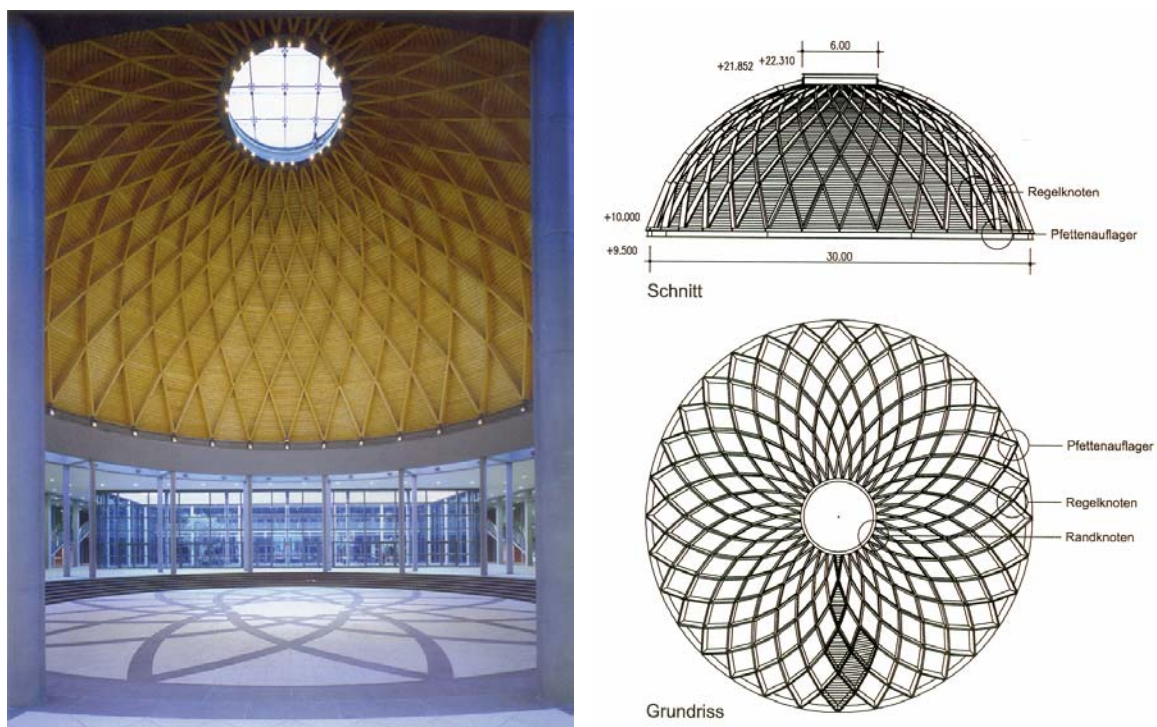


Bild 3.2-5: Neue Messe Rimini, Kuppel über der zentralen Rotunde. Links: Innenansicht; rechts: Grundriss und Schnitt
(Quelle: [41])

Der Bauweise gemäß Zollinger ist die so genannte Peselnik-Bauweise sehr ähnlich. Sie ist eine Elementbauweise mit historischem Ursprung in Osteuropa. Mittels wechselseitig durchlaufender Holzstäbe werden gekrümmte Tragwerke gebildet, wobei meist nur wenige unterschiedliche Elementtypen notwendig sind. Um die Notwendigkeit zugfester Verbindungen zu umgehen, sind die Konstruktionen so ausgelegt, dass das Tragwerk komplett auf Druck beansprucht wird (vgl.: [11]). Ein aktuelles Beispiel für die Anwendung dieses Konstruktionsprinzips ist die von Ruske und Hellrigel in [71] beschriebene Überdachung des so genannten „Ökozentrum NRW“ mit einer Spannweite von 9,6 m. Ein weiteres, eindrucksvolles Beispiel für eine auf dem „Peselnik-Gedanken“

aufbauende Konstruktion ist das 2002 fertig gestellte Dachtragwerk der „Toscana-Therme“ in Bad Sulza. Die Fläche ist mehrfach gekrümmt und hat einen Flächeninhalt von ca. 1800 m². Zur Realisierung dieser Geometrie war hier jedoch der Einsatz vieler unterschiedlicher Elementtypen notwendig. Aus diesem Grund erfolgten sowohl Entwurf und Berechnung, als auch die Fertigung computergestützt (vgl. z.B.: [25] und [95]). In Bild 3.2-6 sind eine Innenansicht sowie ein Einblick in den Montagevorgang gezeigt.



Bild 3.2-6: Toscana-Therme Bad Sulza; links: Innenansicht (Quelle: [25]), rechts Montagevorgang (Quelle: [95]).

Für Kuppeln mit kreisförmigem Grundriss ist das so genannte „Ensphere Concept“ eine leistungsfähige Bauweise. Sie wurde in den 70-er Jahren des 20. Jahrhunderts in den Vereinigten Staaten entwickelt. Auch hier wird die Grundform der Fläche von sich durchdringenden Stabzügen gebildet. Die Stäbe werden dabei so angeordnet, dass sich lauter gleichseitige Dreiecke ergeben. Deshalb ist bereits durch die Grundform der Einzelelemente die Aussteifung gewährleistet (vgl. z.B. [12] und [34]). Für die Stäbe kommt meist Brettschichtholz zum Einsatz. Auf diese Weise wurden bereits Spannweiten von ca. 160 m realisiert. Ein Beispiel ist der z.B. von Kreibich in [47] beschriebene „Tacoma Dome“ im Bundesstaat Washington, USA. Mit einer Spannweite von 161,6 m und einer Scheitelhöhe von 48 m zählt dieses Bauwerk zu den größten Holzkuppeln der Welt. Bild 3.2-7 zeigt eine Innenansicht dieser ca. 2600 Zuschauern Platz bietenden Sporthalle. Bei der Sporthalle von Oulu in Nordfinnland wird mit diesem Konzept ein Grundriss von 115 m Durchmesser bei einer Firsthöhe von 25 m überspannt (näheres siehe z.B.: [61]).



Bild 3.2-7: „Tacoma Dome“: Innenansicht (Quelle: [34])

Ein entscheidendes Detail ist die Ausbildung der Kreuzungspunkte. Da die Stäbe in derselben Höhe aufeinander treffen und sich die Kräfte somit in einem Punkt konzentrieren, sind an dieser Stelle spezielle, hochfeste Verbindungen gefordert. Es kommen meist Stahlteile in unterschiedlichen Ausführungen zum Einsatz. Bei der Halle in Oulu wurden die Holzträger z.B. über Schlitzbleche an einen im Grundriss sternförmigen Stahlknoten angeschlossen und anschließend mit Beton vergossen. Der Verguss ist auch aus brandschutztechnischen Gesichtspunkten sinnvoll.

Die Berechnung der in diesem Abschnitt vorgestellten Tragstrukturen kann heutzutage in der Regel ohne größere Probleme mit marktgängigen Stabwerksprogrammen erfolgen. Dabei kommt der korrekten Abbildung der Tragstruktur eine große Bedeutung zu. Obwohl die Rechensysteme immer leistungsfähiger werden, ist eine passende Idealisierung des Tragsystems, wie sie z.B. von Scheer und Purnomo in [72] für die Zollinger-Bauweise erläutert wird, wichtig. Da für die Einzelstäbe des Netzwerks Vollquerschnitte zum Einsatz kommen, sind bei diesen Konstruktionen die Besonderheiten des nachgiebigen Verbundes zusammengesetzter Querschnitte nicht zu berücksichtigen. Die Nachgiebigkeit der Knotenpunkte kann mit Hilfe von entsprechenden Federelementen oder Ersatzstäben mit passend definierter Steifigkeit erfasst werden.

Eine Handrechnung von größeren Stabnetzwerken ist aufgrund der hochgradigen statischen Unbestimmtheit sehr aufwendig. Näherungsverfahren sind für Handrechnungen unter baupraktischen Aspekten nahezu unumgänglich. Stellvertretend sei hier das von Robert Otzen für die „Zollbauweise“ vorgestellte Berechnungsschema erwähnt [65]. Das Verfahren wurde zu seiner Zeit sehr oft angewendet. Es basiert auf der Auswertung von Versuchen. Wichtige Eingangsparameter in die Berechnung waren die Gesamtlänge des Daches sowie die Länge des abgewinkelten Bogens der Lamellen. Damit wurden Steifigkeitsziffern ρ zur Abminderung der für die Bemessung wichtigen Biegemomente bestimmt. Querkräfte und Torsionsmomente wurden dabei nicht direkt berücksichtigt [101].

3.2.3 Hängekonstruktionen aus Holz

Mit der durch den Holzleimbau gegebenen Möglichkeit, gekrümmte Träger größerer Länge herzustellen, wurde auch die Ausführung von Hängekonstruktionen aus Holz interessant. Einfachere Holzhängekonstruktionen mit einer Tragstruktur aus radialen Hängegliedern und tangential angeordneten Querträgern sind keine Flächentragwerke im Sinne einer strengen Begriffsauslegung. Die Tragglieder der Konstruktion lassen sich deutlich nach Ihrer Funktion in Primär- und

Sekundärtragglieder trennen. In der Regel werden größere Hängekonstruktionen jedoch durch aussteifende Tragelemente derart verstärkt, dass eine Art Netzwerk mit Schalentragswirkung entsteht. Die Berechnung kann auch auf Ansätzen, wie sie für die Berechnung von Membranflächen zum Einsatz kommen, basieren.

Ein bekanntes Beispiel für eine „klassische“ Hängekonstruktion aus Holz mit Flächentragwirkung ist das 1987 erbaute Solebad in Bad Dürkheim. Bild 3.2-8 zeigt eine Innenansicht. Gut zu erkennen sind die bis zu 17 m langen Hängeglieder aus Brettschichtholz ($b \times h = 20 \times 20,5 \text{ cm}^2$), die Ringrippen sowie die Untersicht der diagonal verlaufenden Dachschalung. Diese wurde aus zwei versetzt angeordneten Brettlagen ausgeführt, um eine hohe Steifigkeit gegenüber Schubkräften in Flächenebene zu erzielen. Durch die Verbindung mit den Haupttraggliedern trägt die gesamte Konstruktion als Einheit wie ein Verbundquerschnitt (näheres vgl. z.B.: [99]). Die Fläche wurde so geformt, dass sie vornehmlich über Membrankräfte abträgt.

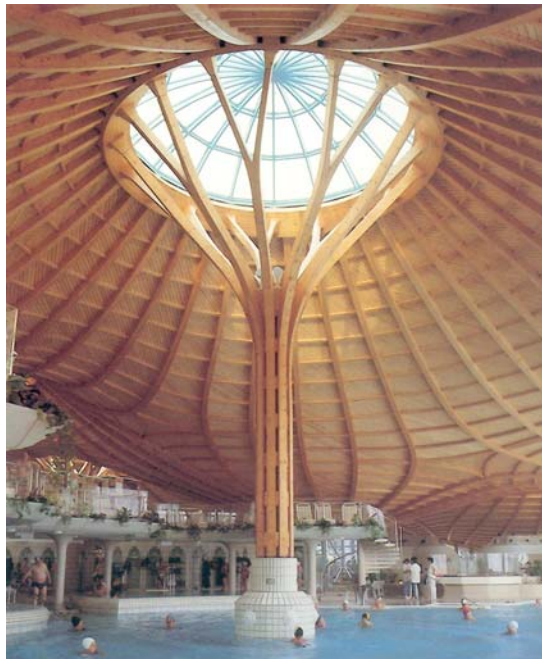


Bild 3.2-8: Innenansicht Solebad Bad Dürkheim (Quelle: [4])

Die Vordimensionierung des Tragwerks erfolgte mit Überschlagsrechnungen für einzelne Bereiche. Die endgültige Berechnung wurde mit Hilfe eines FE-Programms durchgeführt. Dabei wurde die Tragstruktur vornehmlich durch Stabelemente diskretisiert, die Schalung jedoch mittels Scheibenelementen abgebildet. Der Einfluss der Nachgiebigkeit der Verbindungen auf die Systemsteifigkeit war zu berücksichtigen. Deshalb wurde das Tragverhalten des Systems näherungsweise mit Grenzwertbetrachtungen eingegrenzt (vgl.: [99]).

Ein entscheidender Aspekt bei der Konstruktion solcher Hängewerke ist die Formfindung. Da die Abtragung der Lasten in allen Lastfällen vornehmlich über Membrankräfte erfolgen soll, ist dieser Schritt gerade bei mehrfach gekrümmten Formen anspruchsvoll. Im oben genannten Beispiel wurde die Formfindung mittels Modellen aus Drahtgewebe und anschließender numerischer Optimierung der Struktur bewerkstelligt.

3.2.4 Schalenkonstruktionen aus versetzt angeordneten Brettlagen

Schon lange Zeit vor der Entwicklung des im Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Brettspertholzes wurden Flächen durch Zusammenfügen mehrerer, versetzt angeordneter Brettlagen gebildet. So existiert z.B. ein auf das Jahr 1908 datiertes russisches Patent, welches eine verwandte Methode zur Erstellung von Holzflächen aus Brettlagen zum Inhalt hat. Es wurde in Zusammenhang mit dem Bau von kalottenförmigen Holzschalengewölben erteilt (vgl. z.B. [68]). Bei den mit diesem Abschnitt angesprochenen Konstruktionen werden in der Regel zwei bis fünf Brettlagen vollflächig unter einem Winkel von 90° versetzt verlegt. Die Verbindung der so entstehenden Schichten miteinander kann entweder nachgiebig mit mechanischen Verbindungsmitteln oder quasi starr mittels Verklebung ausgeführt werden. Im Gegensatz zur Herstellung von Brettspertholz erfolgt diese Verklebung jedoch vor Ort auf der Baustelle, was aufgrund der Umgebungsbedingungen zu Problemen führen kann. Diese Bauweise kam vor allem bei der Erstellung von hyperbolischen Paraboloidschalen, wie sie baustoffübergreifend vor allem in den 50-er bis zu den 70-er Jahren des 20. Jahrhunderts ausgeführt wurden, zum Einsatz. Die Geometrie einer HP-Schale ist als „einhüllende Fläche zweier kongruenter, zueinander senkrecht stehender Parabeln“ definiert, wobei im Normalfall eine der Parabeln „hängend“ und die andere „stehend“ orientiert ist (Cziesielski, [16]). Je nach Krümmung der Oberfläche erfahren die einzelnen Bretter zusätzlich zur Biegung auch eine Verdrillung um ihre Längsachse. Vor allem auch im Hinblick auf unsymmetrische Lastfälle wird der Schalenrand für gewöhnlich mit Randträgern, die auch für Biegebeanspruchung dimensioniert sind, verstärkt. Entscheidend für die Steifigkeit und Stabilität der Schalen sind das so genannte Steigungsmaß und die Größe der Parabelstiche (vgl. z.B. [16]).

Zur Bundesgartenschau in Dortmund wurde 1969 ein Ausstellungspavillon in Form einer Hängeschale errichtet (Bild 3.2-9). Zwischen den Randträgern verlaufen in einem Abstand von 1,5 m Hängerippen ($b \times h = 20 \times 24 \text{ cm}^2$) parallel zur Verbindungslinie der Hochpunkte. Auf diesen Rippen ist eine Schalung aus drei kreuzweise verlegten und miteinander vernagelten Brettlagen mit einer Dicke von $t = 1,8 \text{ cm}$ bzw. $2,4 \text{ cm}$ (unterste Schicht) angebracht. So entstand eine Holzschale mit einer maximalen Spannweite von 65 m (vgl. z.B.: [26] und [83]).



Bild 3.2-9: Pavillon für die Bundesgartenschau in Dortmund (Bauzustand)

Die Berechnung und Bemessung der Schale stellte eine besondere Herausforderung dar, da die Erfahrungen für die rechnerische Erfassung solcher Tragstrukturen aus Holz zur damaligen Zeit noch sehr gering waren. Insbesondere Größe und Auswirkungen der durch den Flächenaufbau gegebenen Abweichungen von den Forderungen der Elastizitätstheorie waren auch bei dieser Schale schwer abschätzbar. So wurde „bei der Durchführung der statischen Berechnung ... auf die Anwendung der Schalentheorie verzichtet, da derzeit noch keine ausreichenden Kenntnisse über die Verformungseigenschaften von mehrlagig aufgebauten Holzflächentragwerken“ vorlagen.

Zwar existieren mehrere verschiedene Berechnungsansätze, mit denen die Schalenkräfte „von Hand“ abgeschätzt werden können - stellvertretend seien hier die von Hempel in [37] und die von Scherberger in [75] beschriebenen Vorgehensweisen erwähnt - allerdings wird bei diesen Berechnungsansätzen die Membrantheorie, gemäß welcher das Tragwerk ausschließlich über Normalkräfte abträgt, zugrunde gelegt. Diese Annahme trifft hingegen nur für gleichmäßig verteilte, symmetrische Lasten zu. Gerade im Falle von Holzflächen kann die Voraussetzung eines homogenen Werkstoffes aufgrund des meist nachgiebigen Verbundes der einzelnen Schichten nur eine Näherung sein. Vor allem in Bezug auf die Lastverteilung von Einzellasten und für die Erfassung unsymmetrischer Lastfälle spielt dieser Aspekt eine Rolle. Vor diesem Hintergrund empfiehlt Hempel „eine zusätzliche Verleimung der ganzen Dachfläche“ [37], um die Steifigkeit der Fläche zu erhöhen, oder, dass zumindest „an jedem Kreuzungspunkt vier Nägel eingeschlagen werden“. Scherberger verweist auf die Notwendigkeit von Modellversuchen, da man sich „beim Holzbau mit seiner Anisotropie und seinen mechanischen Verbindungsmitteln auf unsicheres Gebiet“ [75] begibt. Eine genauere Berücksichtigung der Effekte ist mit den genannten Methoden nicht möglich.

Den Berechnungen wurde ein lineares Werkstoffverhalten zugrunde gelegt, wobei näherungsweise eine symmetrische Steifigkeitsmatrix zum Einsatz kam. Für den Schubmodul des Holzes in der radial-tangential-Ebene (Stichwort „Rollschub“) wurde hier ein Wert von $G_{tr}=190 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Die Randträger wurden mit „drillnachgiebigen“, schubstarken Balkenelementen abgebildet. Die Rechenergebnisse wurden in der Literatur genannten Versuchsergebnissen gegenübergestellt und bewertet. Rattasepp und Mang folgern, dass für die untersuchte, gleichmäßig symmetrisch verteilte Last aufgrund des „im Vergleich zum Ausmaß der Wirkung der Schale als Membran nur“ geringen Ausmaßes „der Biegewirkung“ auch eine Rechnung ohne Unterteilung in mehrere Schichten

ausreichend ist. Eine Aussage über das Verhalten bei unsymmetrischen Lastfällen etc. wird nicht gemacht. Der Interessierte findet z.B. in dem zitierten Aufsatz [68] und bei Moss [63] eine Zusammenstellung durchgeführter Untersuchungen zur Erfassung des Verhaltens von Hyparschalen aus Holz. Alternativ bietet sich der Einsatz der Schubanalogie für solche numerischen Untersuchungen an.

3.2.5 Lattenroste

Ein bisher eher selten angewandtes Prinzip für die Erstellung räumlicher Holzstrukturen besteht darin, Holzlatten zu einem räumlich gekrümmten Gitter zu verlegen und an den Kreuzungspunkten so zu verbinden, dass die Form auch nach Entfernen der Stützungen des Bauzustandes gewahrt bleibt. Die Realisierung der Schubaussteifung ausschließlich durch die Knotenverbindungen mit Bolzen und Keilen etc. ist jedoch schwierig. Da oft zusätzliche aussteifende Elemente wie z.B. eine mittragende Dachhaut fehlen, ist die geringe Schubsteifigkeit diagonal zu den Gittermaschen ein Schwachpunkt dieser Bauweise. Als problematisch haben sich außerdem die relativ großen Biegerandspannungen infolge der zur Formgebung notwendigen Krümmung der Latten erwiesen.

Ein bekanntes Beispiel für solch einen Lattenrost ist die 1975 zur Bundesgartenschau in Mannheim fertig gestellte und inzwischen zum Kulturdenkmal erklärte Multihalle (siehe Bild 3.2-11). Das Dachtragwerk besteht aus Holzlatten mit einem Querschnitt von $b \times h = 5 \times 5 \text{ cm}^2$, die in einem Grundrissraster von $50 \times 50 \text{ cm}^2$ verlegt sind. Hiermit wird eine Fläche von insgesamt 7500 m^2 überdacht, wobei die größte Spannweite ca. 60 m und die größte Höhe ca. 20m betragen (vgl. z.B.: [98]). In Bereichen erhöhter Belastung waren zusätzliche „Zwischenlattenstränge“ notwendig. Zur Aussteifung wurde das Tragwerk mit diagonal verlaufenden Stahlseilen ergänzt.

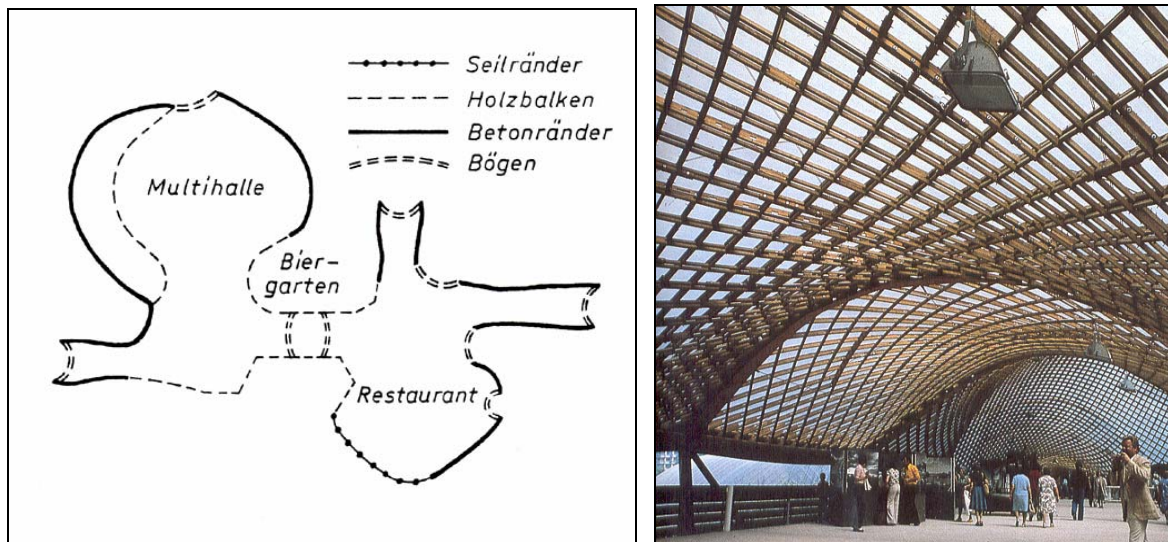


Bild 3.2-11: Multihalle Mannheim: links: Grundriss und Randträgertypen, rechts: Innenansicht. (Quellen: [98] bzw. [34])

Während die aufgrund der Grundrissform aufwendige Formfindung unter Zuhilfenahme von Modellen bewerkstelligt wurde, erfolgte die Berechnung rechnergestützt mit Stabwerksprogrammen. Auch hier war ein entscheidender Aspekt die Berücksichtigung des nachgiebigen Verbundes der einzelnen Teilquerschnitte sowie der vierendeelartigen Tragwirkung des durch die Verbolzung entstandenen Verbundquerschnitts zwischen den Kreuzungspunkten. Dieses Verhalten kommt z.B. bei unsymmetrischen Lastfällen zum Tragen und wurde mit „ideellen“ Querschnittswerten berücksichtigt. Die anzusetzenden Steifigkeiten und Festigkeiten wurden versuchstechnisch ermittelt. Hier hatten auch die bis dahin kaum beachteten Werkstoffparameter bezüglich „Rollschubbeanspruchung“

Bedeutung (vgl. auch Abschnitt 3.2.4). Aufgrund der, dem Stand der Technik entsprechend, begrenzten Rechnerkapazitäten erfolgte die Berechnung an idealisierten Teilmodellen. Hierbei waren auch Fragestellungen bezüglich der Stabilitätsfälle von großem Interesse. Happold und Liddell geben in [28] eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen. Die Berechnungsergebnisse wurden mit Abschätzungen anhand vereinfachter Modelle kontrolliert. Verformungsmessungen bei Probelastungen des fertigen Bauwerks zeigten eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten [98].

3.2.6 Brettrippenbauweise

Eine Weiterentwicklung der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Lattenroste stellt die Brettrippenbauweise dar. Bei dieser Konstruktionsart werden mehrere, im Vergleich zu den Rostlatten dünne Bretter zu einem „Stapel“ gefügt. Dadurch fallen die Biegeandspannungen infolge der aus der Strukturgeometrie gegebenen Brettkrümmung in der Regel geringer aus. Des Weiteren werden die durchlaufenden Lamellenlagen durch Füllbretter zu „Brettrippen“ ergänzt, bei denen die einzelnen Lagen auch zwischen den Kreuzungspunkten miteinander verbunden sein können. Bild 3.2-12 zeigt exemplarisch eine für die Brettrippenbauweise typische Knotenpunktausbildung, bei der die Bretter im Kreuzungspunkt durch einen Bolzen zusammengespant werden. Meist wird das Tragwerk durch mittragende bzw. aussteifende Komponenten wie z.B. eine aufgenagelte Beplankung aus Brettern ergänzt.

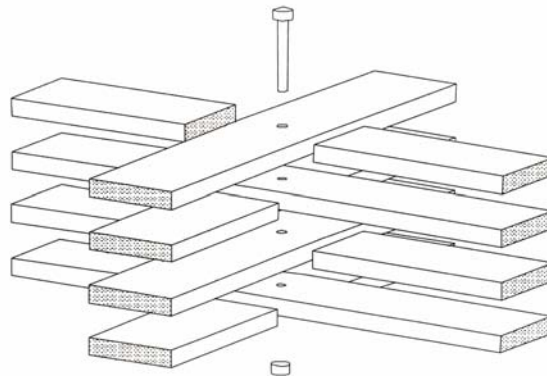


Bild 3.2-12: Knotenpunkt Brettrippenbauweise, Explosionszeichnung. (Quelle: [15])

Natterer berichtet bereits 1972 in [64] vom Übergang der Verwendung dieser Bauweise von zweidimensionalen Roststrukturen zu räumlichen „Rostkuppeln“. Seit dem wurden einige Holzschalen mit unterschiedlichen Formen nach diesem Prinzip errichtet. Burger gibt in [15] eine tabellarische Übersicht ausgeführter Beispiele.

Anmerkung: Natterer verwendet für die Bauweise den Begriff „Brettstapelbauweise“, welcher heute eher für Brettstapelelemente mit stehenden Lamellen, wie sie in Kapitel 3.2.1 beschrieben sind, gebräuchlich ist. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird in der vorliegenden Arbeit die Bezeichnung Brettrippenbauweise benutzt.

Ein aktuelles und zudem wohl das bekannteste Beispiel sind die Schalen der Holzschirme auf dem Freigelände der EXPO 2000 in Hannover. Insgesamt zehn aneinander gestellte Schirme mit einem Grundriss von je $39 \times 39 \text{ m}^2$ überdachen in der Summe eine Fläche von ca. 15000 m^2 . Die Schirmflächen werden von jeweils vier, am Rand durch Kragträger gehaltenen, Gitterschalenvierteln gebildet. Bei der Ausbildung der bis zu zehn Lagen starken Brettrippen wurden Brettlamellen mit einem Querschnitt von $b \times h = 3 \times 16 \text{ cm}^2$ verwendet. Zu aussteifenden Zwecken wird das Dachtragwerk durch eine, um 45° zu den Brettrippen versetzt angeordnete, aufgenagelte Gitterlattung (Bretter,

$b \times h = 2,4 \times 10 \text{ cm}^2$) ergänzt. Über dieser ist eine nichttragende Membran als Witterungsschutz angebracht. Eine reich bebilderte Beschreibung des Bauwerks mit vielen Zusatzinformationen ist z.B. mit [38] gegeben.

Von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit sind die Formgebung sowie vor allem deren Auswirkung auf Berechnung und Konstruktion der Schirm-Viertel. Die Schalen haben im Prinzip die Form einer Membranfläche, wobei bei der Geometrieermittlung nicht ausschließlich eine für die Tragwirkung günstige Form maßgebend war. Da die Biegung der einzelnen Lamellen um die starke Achse nicht in einem für eine unabhängige Formgebung sinnvollem Maße möglich ist, müssen die Brettrippen so genannten geodätischen Linien - der kürzesten Verbindung zweier Punkte auf der Schalenoberfläche - folgen. Zudem wurde der Stich der Schale auch aus gestalterischen Gesichtspunkten relativ gering gewählt. Deshalb weist die Konstruktion selbst unter symmetrischen Lasten keine reine Membrantragwirkung auf. Der daraus resultierenden Biegebeanspruchung musste sowohl rechnerisch, als auch konstruktiv Rechnung getragen werden. Aus diesem Grund wurden z.B. die Längsrippen im Bereich der Hauptdiagonale verdichtet angeordnet und mittels Schraubpressleimung verstärkt ausgebildet. Hierbei war jedoch darauf zu achten, dass die Steifigkeit in diesem Bereich nicht zu sehr konzentriert wurde, um zu vermeiden, dass unnötig viel Lasten aus anderen Schalenregionen angezogen werden. Die Berechnung erfolgte mit Stabwerksprogrammen. Die Struktur des Rechensystems wurde dabei als relativ wirklichkeitstreue Abbildung der realen Struktur generiert. In Bild 3.2-13 ist das Schema des zur Berechnung der Schirmschalen verwendeten Stabwerksmodells in der Perspektive dargestellt.

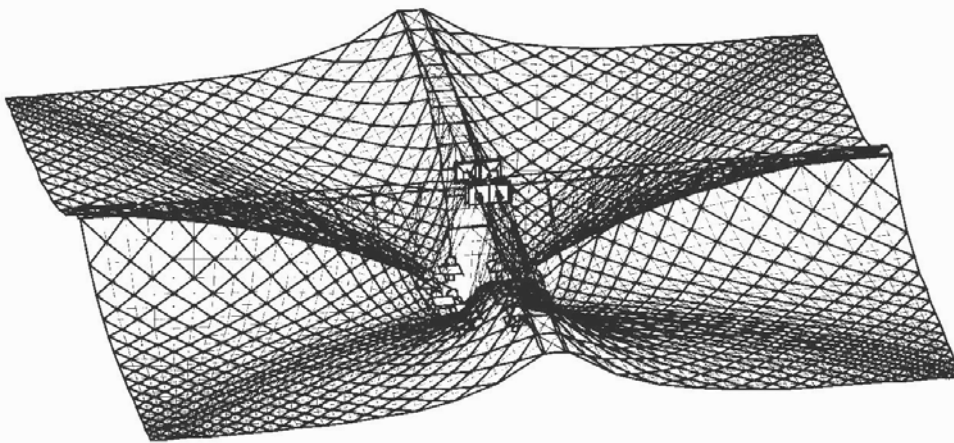


Bild 3.2-13: Struktur des Stabwerksmodells zur Berechnung der Schirmschalen in der Perspektive (Quelle: [15])

Der nachgiebige Verbund der Lamellen wurde mittels „effektiver Biegesteifigkeiten“, wie sie vom so genannten „ γ -Verfahren“ bekannt sind, berücksichtigt. Um diese Steifigkeiten zumindest näherungsweise bestimmen zu können, muss die so genannte Systemlänge, die für jede Rippe durch den Abstand der Momentennullpunkte gegeben ist, bekannt sein (vgl. auch Kapitel 4.1). Diese Systemwerte mussten für jeden Lastfall getrennt bestimmt werden. Um den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen zu halten, mussten dabei auch Abschätzungen und Grenzwertbetrachtungen eingesetzt werden. Die Aussteifung durch die aufgenagelten Brettlagen wurde im Rechenmodell durch Fachwerkstäbe mit entsprechenden Dehnsteifigkeiten idealisiert. Aufgrund der Abbildungsgenauigkeit wies das Rechenmodell eine so große Knoten- bzw. Stabanzahl auf, dass man sich rechentechnisch im Grenzbereich der Kapazität der verwendeten Hard- und Software

bewegte. Formfindung, Konstruktion und Berechnung der Schirme sind bei Burger [15] genauer erläutert.

Die Schalenstruktur wurde auch unter Einsatz der Schubanalogie gegengerechnet. Das war der erste Fall, bei dem dieses Verfahren für die Berechnung einer größeren, gekrümmten Fläche zum Einsatz kam. Die Ergebnisse zeigten prinzipiell eine gute Übereinstimmung mit den nach der eben erläuterten Vorgehensweise ermittelten Größen. Allerdings traten dabei Fragen bezüglich des Stabilitätsverhaltens des ideellen Rechensystems (vgl.: Kapitel 4.6) und bezüglich der Anwendungsgrenzen der Methode, wie Sie im Kapitel 5 näher erläutert werden, auf. Mit dem Bedürfnis, diese Fragen zu klären, wurde letztendlich auch der Anstoß zur vorliegenden Arbeit gegeben.

4 Allgemeines zur Berechnung von Systemen mit Querschnitten aus nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten mit der Schubanalogie

4.1 Vorbemerkungen zum Nachgiebigen Verbund und seine rechnerische Berücksichtigung

Veranlasst durch die von Natur aus begrenzten Abmessungen des Werkstoffes Holz war der am Bau tätige Mensch seit jeher bestrebt, durch Zusammenfügen einzelner Teile die Dimension der Bauteile zu vergrößern. Schon bald erkannte man, dass die Verbindung lose aufeinander gelegter Bretter und Balken mittels Bolzen, Dübel etc. zu einer Steigerung von Steifigkeit und Tragfähigkeit führt. Mit zunehmender Bedeutung der technischen Biegetheorie für die Dimensionierung von Konstruktionen wuchs auch das Verlangen, den Einfluss der Nachgiebigkeit in den Fugen solcher Verbundquerschnitte rechnerisch zu erfassen. Im Laufe der Zeit wurden dazu verschiedene Ansätze entwickelt. Da auch in anderen Bereichen des Ingenieurwesens Verbundkonstruktionen wie z.B. die Stahl-Beton-Verbundbauweise oder Sandwichelemente im Bereich des Maschinenbaues Bedeutung gewannen, kann man inzwischen auf eine beachtliche Anzahl von Arbeiten zu dem Thema „nachgiebiger Verbund“ zurückgreifen. Allerdings beschränkt sich ein Grossteil der Untersuchungen auf lineare Tragglieder. Ergänzend zu den in der Literatur wie z. B. mit [51] und [42] gegebenen Zusammenstellungen beschreiben die folgenden Erläuterungen eine Auswahl der Ansätze, die vor allem in Zusammenhang mit den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit von Bedeutung sind. Dabei wird vornehmlich auf Lösungen aus dem Bereich des Ingenieurholzbaues eingegangen.

Als einer der Ersten gab Stüssi Beziehungen an, die den Einfluss von nachgiebigen Verbundfugen rechnerisch mit Hilfe der Gesetze der Mechanik erfassen. In [88] schildert er zunächst Untersuchungen an einem verdübelten Balken, die zu einem Wirkungsgrad α der Biegesteifigkeit des gesamten Verbundquerschnitts führen. Letztendlich wurden auf diesen Überlegungen basierende Rechenvorschriften in die entsprechende SIA-Norm aufgenommen. Die Näherung gilt für zweiteilige und symmetrische, dreiteilige Verbundquerschnitte. Im Falle des Einfeldträgers unter Gleichlast stimmen die Ergebnisse sehr gut mit den „theoretisch exakten“ Werten überein. In [19] wird z. B. nachgewiesen, dass die Abweichungen im genannten Fall unter 1% liegen.

Von grundlegender Bedeutung für den Ingenieurholzbau war darüber hinaus die Ableitung des so genannten „ γ -Verfahrens“ von Möhler, welches auch in die deutsche Holzbaunorm aufgenommen wurde. Mittels der Verformungsbeziehungen des zweiteiligen und dreiteiligen, symmetrischen Querschnitts stellt er Differentialgleichungen auf, welche er am Einfeldträger für die Lastfälle Gleichlast und Einzellast in Trägermitte löst [59]. Des weiteren untersucht er „Druckstäbe mit nachgiebig verbundenen Einzelteilen“ in Hinblick auf die kritische Last unter Voraussetzung einer sinusförmigen „Knickbiegeline“. Dabei wird die Schubnachgiebigkeit der Teilquerschnitte vernachlässigt und die Steifigkeiten der Verbindungsmittel mit einer über die Trägerlänge verteilten, konstanten Fugensteifigkeit erfasst. Aus den Lösungen der Differentialgleichungen leitet er den Abminderungsbeiwert γ für die Verbundtragwirkung im Falle einer Belastung durch eine sinusförmige Streckenlast ab. Dieser bezieht sich im Gegensatz zu der von Stüssi angegebenen Größe nicht auf den gesamten Querschnitt, sondern ausschließlich auf die Steineranteile der Teilquerschnitte. Ergebnis der Abminderung ist die so genannte effektive Biegesteifigkeit E_{eff} . Diese gestattet die Verformungsberechnung des Verbundquerschnitts mit den Regeln der technischen Biegetheorie und ist eine Ausgangsgröße für die Bestimmung der Spannungsverläufe. Allerdings ist der Beiwert γ und damit auch E_{eff} nur im Falle einer sinusförmigen Streckenlast über die Trägerlänge konstant. Dennoch kann dieses Vorgehen in sehr guter Näherung auch für den wichtigen Fall „Einfeldträger unter Gleichlast“ eingesetzt werden.

Auf Grundlage der Ergebnisse von Möhler leitet Schelling in seiner Dissertation [73], anhand der Differentialgleichungen der Biegelinie und der Verformungsbeziehungen des Verbundquerschnitts Grundgleichungen für Biegeträger ab, welche aus schubstarken, nachgiebig verbundenen

Einzelquerschnitten beliebig zusammengesetzt sind. Mit den daraus gewonnenen Zusammenhängen stellt er ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem auf, dessen Lösung zwar möglich ist, aber „für Trägerquerschnitte, die aus mehr als zwei Einzelquerschnitten bestehen, zu sehr verwickelten und wegen der Vielzahl freier Parameter nicht mehr systematisch auswertbaren Ausdrücken führt“ [73]. Für spezielle Belastungsglieder, die durch eine Kombination trigonometrischer Funktionen beschrieben werden, lässt sich das Differentialgleichungssystem entkoppeln. Damit ist es möglich, die meisten praxisrelevanten Belastungsfälle näherungsweise mit Fourier-Reihen zu entwickeln. Auf dieser Basis stellt er in [74] eine Erweiterung des „ γ -Verfahrens“ von Möhler auf Verbundquerschnitte, die aus beliebig vielen, nachgiebig verbundenen Einzelteilen bestehen, vor. Er leitet Nachgiebigkeitsfaktoren γ_i ab, mit denen analog zu Möhler die „effektiven“ Kenngrößen für den Verbundquerschnitt ermittelt werden. Mit diesen erfolgen Spannungsanalyse und Verformungsberechnung. Die Ableitung der γ_i -Werte ist so allgemein gehalten, dass sie auch für Verbundquerschnitte mit unsymmetrischem Aufbau gilt. Allerdings ist auch hier zu beachten, dass die Fugensteifigkeiten über die Trägerlänge konstant sein müssen und die Anwendung streng genommen auf den Fall „Einfeldträger unter sinusförmiger Streckenlast“ beschränkt ist. Für die Untersuchung anderer Lastfälle empfiehlt Schelling eine Annäherung mittels Fourier - Reihen - Entwicklungen mit anschließender Superposition der Einzelergebnisse, ähnlich wie er es in [73] vorgeführt hat. Dieses Procedere ist jedoch relativ aufwendig, da „für jedes Glied der Belastungsreihe“ die γ -Werte getrennt, bezogen auf „die halbe Wellenlänge des betrachteten Belastungsgliedes“, ermittelt werden müssen [74].

Heimeshoff [32] nutzt die bereits von Möhler bekannten Differentialgleichungen der Gurtkräfte für die Ableitung von Kenngrößen nachgiebig verbundener Träger mit unterschiedlichen System- Last-Konstellationen. Er führt die Beziehungen für den Verlauf der Teilschnittgrößen, Durchbiegung und den Schubfluss in der Verbundfuge „für Einfeldträger, die aus zwei oder drei gleichen Querschnittsteilen zusammengesetzt sind“ [32], unter den Belastungen Gleichlast und Einzellast in Feldmitte bzw. gleich große Einzellasten in den Drittelpunkten, tabellarisch auf. Ergänzend dazu präsentiert er in [33] die Lösung für einseitig eingespannte Einfeldträger und Kragträger mit Einzel- und Gleichlasten.

Aicher macht sich die Analogie zwischen dem Verbund zweier, mittels Schubschicht verbundener Decklagen und dem Verbund des zweiteiligen nachgiebig verbundenen Querschnitts zunutze, um ein „modifiziertes γ -Verfahren“ für die Bemessung von Sandwichelementen anzugeben. In [1] leitet er mittels der kinematischen Beziehungen Differentialgleichungen für so genannte „Teilschnittgrößen“ am zweiteiligen, mechanisch bzw. über eine Schubschicht nachgiebig verbundenen Querschnitt ab. Er unterscheidet zwischen Schnittgrößen infolge Verbundtragwirkung und Größen infolge der Eigensteifigkeit der einzelnen Querschnittsteile. Aus diesen „Teilschnittgrößen“ wird die Spannungsverteilung am Verbundquerschnitt bestimmt. Abweichend von dieser grundsätzlichen Überlegung gibt er die gedankliche Unterscheidung zwischen Verbundtragwirkung und Eigenanteil jedoch zunächst auf, und setzt für die Ableitung der differentiellen Beziehungen die Steifigkeits- und Verformungsgrößen des realen Verbundquerschnittes an. Dabei nimmt auch er die beiden zu verbindenden Querschnittsteile näherungsweise als schubstarr an. Da die Auswertung der hierbei gewonnenen Gleichungen „bereits für einfache Lagerungs- und Belastungsfälle vergleichsweise umständliche Ausdrücke“ liefert, schlägt er eine, auf dem „ γ -Verfahren“ basierende Näherung vor. Allerdings hängt „die Qualität der Näherungslösungen...wesentlich vom jeweiligen statischen System ab, ...was die Methode für die Praxis undurchschaubar macht“ [1]. Um auch statisch unbestimmte Systeme erfassen zu können, modifiziert er den aus [59] bekannten Beiwert γ dahin gehend, dass dieser über die Trägerlänge veränderlich ist. Damit kann die Abweichung der Biegemomentenverteilung an statisch unbestimmten Systemen für nachgiebig verbundene Träger vom Biegemomentenverlauf schubstarrer Träger berücksichtigt werden. Entscheidend für die Baupraxis ist der γ -Wert an den für

die Nachweise maßgebenden Stellen. In [2] gibt er eine Anwendungshilfe in Form von Diagrammen für verschiedene Systeme und Lastfälle.

Ergänzend sei der von Roik und Sedlacek in [69] geschilderte, alternative Ansatz erwähnt. Hier wird der Einfluss der Schubdeformation in den Verbundfugen anhand von Zusatzschnittgrößen, welche sich aus der Analogie zur Wölbkrafttorsion ergeben, berücksichtigt. Die Teilquerschnitte selbst werden auch hier als schubstarr unterstellt. Ausgangsbasis sind Schnittgrößen, wie sie sich bei starrem Verbund ergeben. Die Zusatzschnittgrößen werden als „Spannungsrésultanten von Zusatzverwölbungen“ erklärt. In [69] wird die Vorgehensweise unter anderem anhand eines mehrteiligen Holzträgers mit einem Querschnittsaufbau, der auch bei [73] und [74] behandelt wird, erläutert. Dieses, bezüglich der Anwendung vergleichsweise anspruchsvolle und aufwendige Vorgehen fand in der Praxis des Ingenieurholzbaus bisher kaum Anwendung.

Mit zunehmender Leistungsfähigkeit der elektronischen Datenverarbeitung gewannen numerische Methoden an Bedeutung. Ein großer Vorteil derartiger Berechnungen ist unter anderem darin zu sehen, dass der Aufwand für die Anpassung an unterschiedliche statische Systeme in der Regel relativ gering ist. Als Beispiel sei hier das von Kneidl auf Basis einer numerischen Integration entwickelte FORTRAN - Programm [45] erwähnt. Es ermöglicht die lineare und nichtlineare Berechnung von mehrteiligen Biegeträgern „mit veränderlichen Trägereigenschaften“ auch für „komplizierte Trägerformen und Belastungsfälle“ [44]. Schickhofer untersucht in seiner Dissertation [76] flächenhafte, geschichtete Holzstrukturen. Zur Erfassung der Schubnachgiebigkeit der Zwischenschichten nutzt er die Analogie zwischen dem Faser-Kunststoff-Verbund zum Schichtverbund von Brettsperrholzelementen. Damit stellt er zur Problematik passende Steifigkeitsmatrizen auf und bindet diese in ein Berechnungsprogramm ein. Allerdings ist diese Art der Berechnung bisher vornehmlich teurer, bzw. „der Baupraxis schwer zugänglicher“ Spezialsoftware vorbehalten (vgl. z.B. auch [30]).

Auch die Handhabung solcher Programme entspricht oft nicht dem praxisüblichen Standard. Aus diesem Grund wurden verschiedene Ansätze unternommen, die Problemstellungen des nachgiebigen Verbundes unter Einsatz entsprechender Idealisierungen mit praxisüblicher Statiksoftware zu lösen. So schildert Bergfelder in [7] einen Ansatz zur Beschreibung des elastischen Verbundes mittels Vierendeeltragwirkung von Trägern, während Kneidl und Hartmann in [30] über die Möglichkeit berichten, die Verbundfugen mittels entsprechend dehnsteifer Fachwerkstäbe abzubilden. Dabei geht Hartmann in [29] insbesondere auf das elastisch-plastische Verhalten der Verbindung ein. Dazu entwickelt er ein kombiniertes Modell, bei dem Fachwerkdagonalen mit Federelementen kombiniert werden. Für die Berechnung der genannten Systeme können in der Baupraxis gängige Stabwerksprogramme eingesetzt werden. Ein Nachteil dieser Methoden ist der (vor allem bei vielschichtigen Querschnittsaufbauten) hohe Aufwand bei der Generierung des Rechensystems. Weiterhin eignen sich diese Vorgehensweisen vornehmlich zur Berechnung linearer Tragglieder.

Basierend auf dem bereits von Aicher eingesetzten Grundgedanken, zwischen dem Eigen- und Steineranteil der einzelnen Teilquerschnitte an der Gesamttragwirkung des Verbundquerschnitts zu unterscheiden, wurde von Kreuzinger das Verfahren der Schubanalogie entwickelt (siehe z.B. [52], [48]). Hier wird die Trennung der beiden Anteile konsequent in Form von Teilquerschnitten eines ideellen Modellquerschnitts, welchem entsprechende Steifigkeiten zugewiesen sind, umgesetzt. Zwar sind auch anhand dieses ideellen Modellquerschnitts analytische Ableitungen zur Schnittgrößenbestimmung möglich, doch besteht ein entscheidender Vorteil des Verfahrens in der Möglichkeit, den Computer zur Bestimmung der Teilschnittgrößen einzusetzen. Die Vorgehensweise ist so konzipiert, dass in der Praxis gängige Statikprogramme, die Schubverformungen berücksichtigen, eingesetzt werden können. Somit stellt die Ermittlung der maßgebenden Schnittgrößen selbst für komplizierte System - Lastkonstellationen kein Problem dar. Mit Hilfe einer bereichsweisen Generierung lassen sich auch über die Trägerlänge veränderliche Fugensteifigkeiten und Querschnittsformen näherungsweise abbilden. Das Verfahren beruht auf einer Überführung des

realen Verbundquerschnitts in einen zweiteiligen bzw. dreiteiligen Modellquerschnitt, mit dem das Tragsystem generiert wird. Die einzelnen, im Weiteren mit dem Begriff „Ebenen“ bezeichneten Teile des ideellen Querschnitts, sind über die Verschiebung zu koppeln. Das Ergebnis der Berechnung sind Verformungen und Schnittgrößen für beide Ebenen, welche analog zu Aicher [1] im Nachlauf die Spannungsberechnung für den realen Querschnitt ermöglichen. Siebert vergleicht in seiner Dissertation [84] verschiedene Berechnungsmethoden bezüglich ihrer Anwendung auf die Berechnung von Verbundglas, welches aus zwei über eine Schubschicht verbundene Deckschichten besteht. Hierbei zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse gemäß der Schubanalogie mit den „exakten“ Werten. In diesem Zusammenhang seien vor allem auch die Erläuterungen von Stamm und Witte erwähnt. In [86] leiten sie die Differentialgleichungen für Sandwichbalken und -Platten her und lösen diese für ausgesuchte Last- und Lagerungsfälle mittels Reihenentwicklungen.

Die Vorgehensweise der Schubanalogie ist inzwischen für die Standardfälle der Anwendung mit dem informativen Anhang F in den Schlusssentwurf der Bemessungsnorm Holzbau [N4] aufgenommen und ist Gegenstand der folgenden Abschnitte. Zusätzliche Informationen und Beispielrechnungen sind z.B. auch in [51] und [55] gegeben.

4.2 Anmerkungen zur Transformation (Eingangswerte, Querschnittsgrößen)

Grundlage des Verfahrens ist die Transformation des realen Verbundquerschnitts zu einem ideellen Rechenquerschnitt, wie sie mit Bild 4.2-1 veranschaulicht ist. Der Rechenquerschnitt besteht aus zwei oder drei ausschließlich über die Verschiebungen gekoppelten Teilquerschnitten mit definierten Steifigkeiten. Im Weiteren werden die ideellen Teilquerschnitte mit den Begriffen Ebene A, Ebene B und Ebene C bezeichnet. Während die Ebene A schubstarr ausgebildet ist und nur die Eigenanteile der Biegesteifigkeit des realen Querschnitts erhält, werden der Ebene B, die das Zusammenwirken der einzelnen Querschnittsteile abbildet, die Ersatzschubsteifigkeit S und die Biegesteifigkeit der Steineranteile zugewiesen. Die Ebene C wird als Gelenkstabkette generiert. Diese wird von den beiden Biege-Ebenen gestützt und nimmt ausschließlich Normalkräfte auf. Wird nach Theorie 1. Ordnung gerechnet oder liegt der Normalkraftanteil der Tragstruktur deutlich unter der kritischen Last des ideellen Systems, kann es sinnvoll sein, auf die Ebene C zu verzichten und die Normalkraft mittels entsprechend verteilter Dehnsteifigkeiten auf die Biegeebenen A und B aufzuteilen. Auf diese Thematik wird in Kapitel 4.6 näher eingegangen

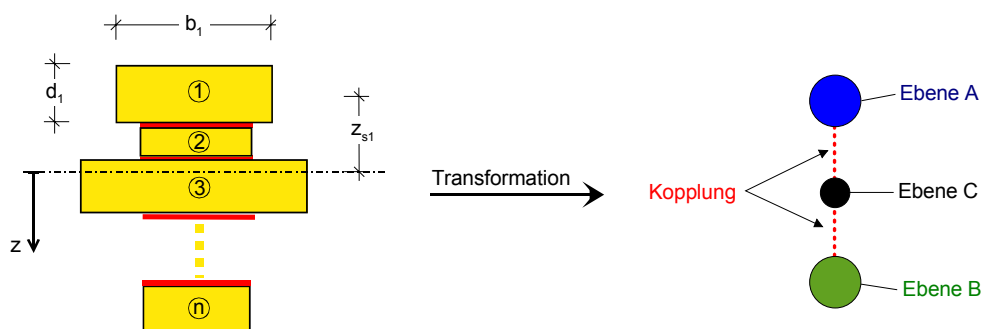


Bild 4.2-1: Transformation eines Verbundquerschnitts aus n nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten zum ideellen Rechenquerschnitt

Für die Ableitungen der Steifigkeiten der ideellen Ebenen wird ein bereichsweise lineares Dehnungsverhalten am Verbundquerschnitt unterstellt. Für den Anteil des Trägheitsmoments I_i eines Teilquerschnittes i am Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts gilt:

$$I = \int_{(A)} z^2 dA; \quad \Rightarrow \quad I_i = \int_{z_{Si}-d_i/2}^{z_{Si}+d_i/2} z^2 dA = \frac{b_i \cdot d_i^3}{12} + z_{Si}^2 \cdot A_i = I_i^A + I_i^B; \quad \text{Gl. 4-1}$$

Die Summe der mit dem E-Modul multiplizierten Einzelanteile ergibt die Biegesteifigkeiten der ideellen Teilquerschnitte eines Trägers:

Eigenanteil der Biegesteifigkeit:

$$B^A = \sum (E_i \cdot I_i^A) = \sum \left(E_i \cdot \frac{b_i \cdot d_i^3}{12} \right); \quad \text{Gl. 4-2}$$

Steineranteil der Biegesteifigkeit:

$$B^B = \sum (E_i \cdot I_i^B) = \sum (E_i \cdot d_i \cdot b_i \cdot z_{Si}^2); \quad \text{Gl. 4-3}$$

Steineranteil der Biegesteifigkeit für einen Zweipunktquerschnitt:

$$B^B = a^2 \cdot \frac{EA_1 \cdot EA_2}{EA_1 + EA_2} \quad \text{Gl. 4-4}$$

Über die Schubdeformation der Ebene B wird das Verhalten des Verbundquerschnitts bezüglich Schub erfasst. In einer ersten Näherung kann eine entsprechende Ersatzschubsteifigkeit S aus Verformungsbetrachtungen gewonnen werden. Unter Vorgabe eines zwischen den Schwerachsen der äußeren Teilquerschnitte näherungsweise konstant verlaufenden Schubflusses stellt sich ein Verschiebungszustand ein, wie er in Bild 4.2-2 schematisch gezeigt ist.

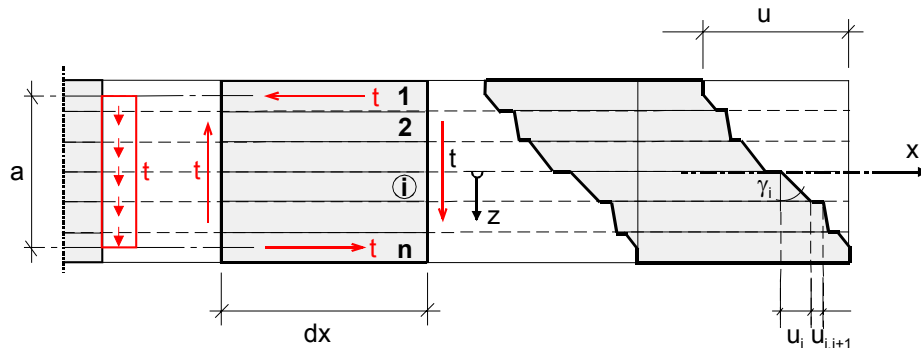


Bild 4.2-2: Verformung eines exemplarischen Verbundquerschnitts mit unterschiedlich steifen Schichten unter konstantem Schubfluss; linke Seite: infinitesimaler Ausschnitt mit Belastung, rechte Seite: Verdeutlichung der Verschiebung der Schichten.

Für die gegenseitige Verschiebung der Teilquerschnitte gilt:

$$u_i = \frac{\tau}{G_i} \cdot d_i = \frac{t}{G_i \cdot b_i} \cdot d_i ; \quad u_{i,i+1} = \frac{\tau}{\bar{c}_{i,i+1}} = \frac{t}{\bar{c}_{i,i+1} \cdot b_i} ; \quad \text{Gl. 4-5}$$

Die Ersatzschubsteifigkeit S ist so definiert, dass ein homogenes Element mit der Steifigkeit S unter Schubbelastung dieselbe Gesamtverzerrung wie der Verbundquerschnitt erfährt (vgl.: [52], [48]).

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{c}_{i,i+1}} + \frac{d_1}{2 \cdot G_1 \cdot b_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_i \cdot b_i} + \frac{d_n}{2 \cdot G_n \cdot b_n} \right] ; \quad \text{Gl. 4-6}$$

Wenn ausschließlich die Schubnachgiebigkeit der Verbindung berücksichtigt werden soll ($G_i \rightarrow \infty$), lautet die Ersatzschubsteifigkeit:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{c}_{i,i+1}} ; \quad \text{Gl. 4-7}$$

Gerichtete Steifigkeiten für Flächen wie sie z. B. in [N4] angegeben sind, können aus den soeben genannten Beziehungen gewonnen werden, indem eine Breite vom Betrag 1 und der Elastizitätsmodul bzw. Schubmodul der entsprechenden Richtung angesetzt werden. Bezüglich der Scheibentragswirkung ist dem ideellen System eine passende Ersatzschubsteifigkeit D_{xy} zuzuweisen. Diese kann über Verformungsbetrachtungen gewonnen werden. Für den allgemeinen Fall eines vernagelten Brettspertholzes, wie es in Bild 4.2-3 dargestellt ist, kann beispielsweise folgende Beziehung verwendet werden (vgl. [N4], [55]):

$$\frac{1}{D_{xy}} = \frac{e_x}{\sum_{i=1}^n (G_i \cdot d_{i,y}) \cdot b_x} + \frac{e_y}{\sum_{i=1}^n (G_i \cdot d_{i,x}) \cdot b_y} + \frac{e_x \cdot e_y^2}{\sum_{i=1}^n (E_i \cdot d_{i,y}) \cdot b_x^3} + \frac{e_y^2 \cdot e_x}{\sum_{i=1}^n (E_i \cdot d_{i,x}) \cdot b_y^3} + \frac{e_x \cdot e_y}{\sum_{i=1}^{n-1} c_{\phi,i,i+1}} ; \quad \text{Gl. 4-8}$$

Die Umsetzung im ideellen System kann entweder mittels Scheibenelementen oder über Diagonalstäbe bzw. die Querbiegung der Stäbe eines Trägerrostes etc. erfolgen (siehe auch Kapitel 6.5). Die Aufteilung auf die ideellen Ebenen ist dabei von untergeordneter Bedeutung. Nähere

Angaben zu dieser Thematik sind z.B. in [55] gegeben. Bezüglich der Scheibentragwirkung von Brettsperrholz wird auf [10] und [14] hingewiesen.

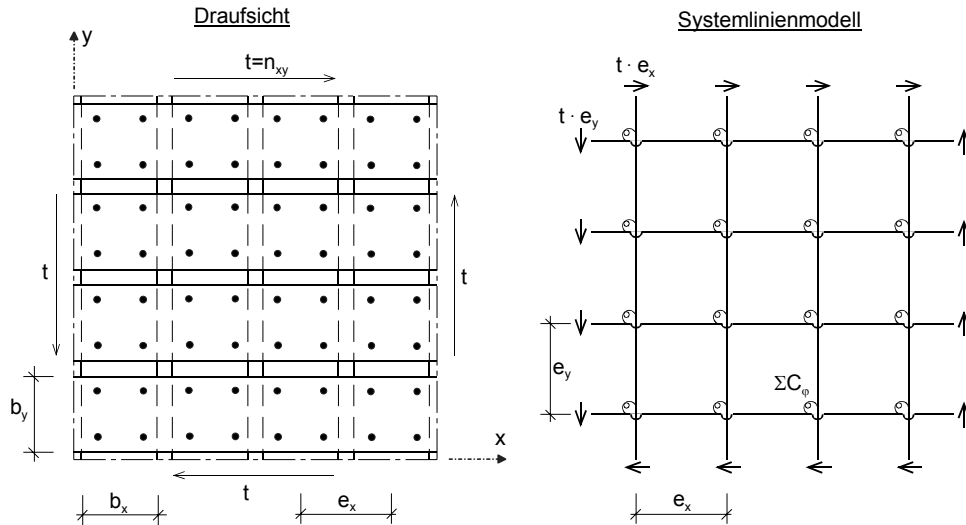


Bild 4.2-3: Ausschnitt aus einem genagelten Brettsperrholzelement.

Zur näherungsweisen Erfassung des Verhaltens von Verbundquerschnitten unter Torsionsbeanspruchung sind in [52] ideale Drillsteifigkeiten abgeleitet. Es wird von einer linearen Verteilung der Torsionsschubspannung ausgegangen. Für das Torsionsmoment m_{xy} und die Drillsteifigkeit B_{xy} einer homogenen Platte gilt pro Meter Plattenbreite:

$$m_{xy} = -2C \dot{w}' = -B_{xy} \cdot \dot{w}' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -2G_{xy} \cdot \dot{w}' \cdot z^2 \, dz = -\frac{2}{12} h^3 G_{xy} \dot{w}'; \quad \text{Gl. 4-9}$$

$$B_{xy} = G_{xy} \cdot \frac{h^3}{6}; \quad \text{Gl. 4-10}$$

Für das Torsionsmoment $m_{xy,i}$ und die Drillsteifigkeit $B_{xy,i}$ einer einzelnen Schicht eines schichtweise aufgebauten Flächenelements folgt damit:

$$m_{xy,i} = \int_{z_{Si}-\frac{d_i}{2}}^{z_{Si}+\frac{d_i}{2}} -2G_{xy,i} z^2 \dot{w}' \, dz = G_{xy,i} \dot{w}' \left(-2z_{Si}^2 d_i - \frac{1}{6} d_i^3 \right); \quad \text{Gl. 4-11}$$

$$B_{xyi} = 2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{Si}^2 \cdot d_i + G_{xy,i} \cdot \frac{1}{6} \cdot d_i^3; \quad \text{Gl. 4-12}$$

Die Drillsteifigkeit einer aus n-Schichten aufgebauten Fläche bestimmt sich aus der Summe der Einzelsteifigkeiten.

$$B_{xy} = \sum_{i=1}^n 2G_{xy,i} \cdot z_{Si}^2 \cdot d_i + \sum_{i=1}^n G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{6}; \quad \text{Gl. 4-13}$$

Das erste Glied dieser Gleichung bezeichnet den durch die Lage der Schicht definierten Anteil (Steineranteil), das zweite den Anteil aus der Eigensteifigkeit der Schicht i an der Drillsteifigkeit. Damit sind folgende Beziehungen für die Drillsteifigkeit der ideellen Ebenen gegeben:

$$B_{xy}^A = \sum_{i=1}^n G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{6}; \quad \text{Gl. 4-14}$$

$$B_{xy}^B = \sum_{i=1}^n 2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{Si}^2 \cdot d_i; \quad \text{Gl. 4-15}$$

Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise gemäß der Schubanalogie und der Beziehungen zur Ermittlung der Steifigkeiten etc. ist in [55] bzw. mit den bereits genannten Quellen gegeben.

Ergänzende Anmerkungen: Die eben abgeleitete Torsionssteifigkeit ist im Betrag nur halb so groß wie die Torsionssteifigkeit eines äquivalenten Einzelstabes einer eindimensionalen Stabrechnung. Diese vermeintliche Abweichung erklärt sich daraus, dass bei der Verwindung einer Platte oder eines Rostes sowohl in Längs- als auch in Querrichtung eine Tragwirkung infolge der Tordierung um die jeweilige Achse aktiviert wird, was die adäquate Erhöhung der insgesamt vorhandenen Drillsteifigkeit zur Folge hat.

Die Theorie der Schubanalogie setzt bezüglich der Torsion eine Abhängigkeit der Verdrillung der ideellen Ebenen voraus. Bei der Generierung des Systems mit Flächenelementen oder als Gitterrost ist diese Forderung durch die Kopplung der Verschiebungen der Ebenen gegeben (eine ausreichend feine Unterteilung vorausgesetzt). Die Realisierung einer dementsprechenden Kopplung der Verdrillung ist an eindimensionalen Stabsystemen derzeit nicht realisierbar.

4.3 Anmerkungen zur Rücktransformation (Ergebniswerte, Spannungen)

Aus einer Berechnung am ideellen System resultieren Knotenverschiebungen und Schnittgrößen für die ideellen Ebenen. Die Knotenverschiebungen stimmen mit denen der realen Struktur überein. Aus den „ideellen“ Schnittgrößen kann im Nachlauf die Spannungsverteilung am realen Verbundquerschnitt ermittelt werden. Die Schnittgrößen der Ebene A führen auf die Eigenanteile der Spannungen. Mit den Schnittgrößen der Ebene B werden die sich aus dem Zusammenwirken der einzelnen Teilquerschnitte des Verbundquerschnitts ergebenden Spannungen bestimmt. Die Addition beider Anteile liefert die resultierende Spannungsverteilung am Verbundquerschnitt. Bild 4.3-1 veranschaulicht dieses Vorgehen zur Spannungsermittlung am Beispiel eines Schichtquerschnitts.

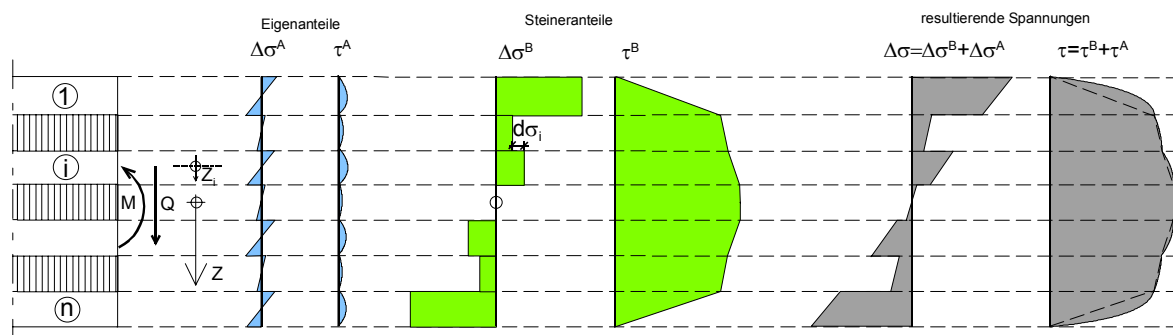


Bild 4.3-1: Schematische Darstellung der Spannungsermittlung am Beispiel eines Schichtquerschnitts

Mit dem Biegemoment von Ebene A ergibt sich der Eigenanteil der Biegespannung für die einzelnen Teilquerschnitte:

$$\sigma_i^A(z_i) = \frac{M^A}{B^A} \cdot E_i \cdot z_i; \quad \text{mit} \quad -\frac{d_i}{2} \leq z_i \leq \frac{d_i}{2} \quad \text{Gl. 4-16}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht am infinitesimalen kleinen Element und der Gesetzmäßigkeit über die Zuordnung der Schubspannungen folgen die Schubspannungsverläufe. Diese erhält man aus der bereichsweisen Integration über die Teilquerschnitte.

$$\tau_i^A(z_i) = - \int_{-\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{d\sigma^A}{dx} dz = - \int_{-\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{dM^A}{dx} \cdot \frac{E_i}{B^A} \cdot z_i dz = -Q^A \frac{E_i}{B^A} \cdot \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{d_i^2}{8} \right); \quad \text{Gl. 4-17}$$

Die Formulierung der Steineranteile der Spannungen erfolgt anhand der auf den gewichteten Gesamtschwerpunkt (Koordinate: z_{0S}) bezogenen Schwerpunkte der Teilquerschnitte (Koordinate: z_{Si}).

$$z_{0,S} = \frac{\sum (z_{0,i} \cdot E_i \cdot A_i)}{\sum (E_i \cdot A_i)}; \quad \text{Gl. 4-18}$$

$$\sigma_i^B(z_{Si}) = \frac{M^B}{B^B} \cdot E_i \cdot z_{Si} = \text{const. über } z_i; \quad \text{mit } z_{Si} = \text{const.} \quad \text{Gl. 4-19}$$

$$\tau_i^B(z_{Si}, z_i) = - \int_{-\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{d\sigma^B}{dx} dz + \tau_i^0 = - \int_{-\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{dM^B}{dx} \cdot \frac{E_{i,x}}{B^B} \cdot z_{Si} dz + \tau_i^0;$$

$$\tau_i^B(z_{Si}, z_i) = \frac{-Q^B \cdot E_i}{B^B} \cdot z_{Si} \cdot \left(z_i + \frac{d_i}{2} \right) + \tau_i^0; \quad \text{Gl. 4-20}$$

Mit Hilfe des Produktes aus statischem Moment und E-Modul SE_{iu} (4-23) (Wert am unteren Rand des Teilquerschnittes i, d. h. an der Grenze zum Teilquerschnitt i+1) und des Maximalwertes aus dem Eigenanteil in Teilquerschnittsmitte ΔSE_i (4-24) formulieren sich die Gleichungen für die bemessungsrelevanten Schubspannungen bei den Teilquerschnittsmitten und an den Schichtgrenzen in folgender Weise:

$$\Delta \tau_{i,Mitte}^A = \frac{Q^A}{B^A} \cdot \Delta SE_i \cdot \frac{1}{b_i} = 1,5 \cdot \frac{Q^A}{B^A} \cdot \frac{B_i^A}{A_i} = \frac{Q^A}{B^A} \cdot E_i \cdot \frac{d_i^2}{8}; \quad \text{Gl. 4-21}$$

$$\tau_{xz,i,i+1}^B = - \frac{Q^B}{B^B} \cdot SE_{i,i+1} \cdot \frac{1}{b_i}; \quad \text{Gl. 4-22}$$

$$SE_{i,i+1} = \sum_1^i (z_{Si} \cdot E_i \cdot d_i \cdot b_i); \quad \text{Gl. 4-23}$$

$$\Delta SE_i = E_i \cdot \frac{d_i^2}{8} \cdot b_i; \quad \text{Gl. 4-24}$$

Die Summe der Einzelanteile führt zu den resultierenden Spannungsverteilungen.

$$\sigma_i(z_i, z_{Si}) = \sigma_i^A(z_i) + \sigma_i^B(z_{Si}); \quad \text{Gl. 4-25}$$

$$\tau_i(z_i) = \tau_i^A(z_i) + \tau_i^B(z_i, z_{Si}); \quad \text{Gl. 4-26}$$

4.4 Die Kopplung der ideellen Ebenen

4.4.1 Anmerkungen zur Realisierung der Kopplung am Rechensystem

Gemäß der Theorie der Schubanalogie müssen die Biegelinien der beiden ideellen Ebenen gleich sein, um mit der Biegelinie des realen Systems übereinzustimmen. Für computergestützte Berechnungen unter Einsatz von marktüblicher Statiksoftware kann die gemeinsame Biegelinie über die Kopplung einander entsprechender Knoten beider Ebenen erzwungen werden. An ebenen Systemen, in die keine in der Systemebene wirkenden Kräfte (Normalkräfte) eingeleitet werden, reicht es, die Verschiebungen der zusammengehörenden Knoten senkrecht zur Systemachse zu koppeln. Sofern von der Software die Möglichkeit gegeben ist, kann dies durch Definition entsprechender Referenzbedingungen erfolgen. Auch sehr steife Federelemente ($c \rightarrow \infty$) können diese Funktion übernehmen. Alternativ können auch Fachwerkstäbe mit sehr großer Dehnsteifigkeit ($EA \rightarrow \infty$) zwischen den zu koppelnden Knoten definiert werden. Bei dieser Variante ist darauf zu achten, dass die Stäbe an beiden Enden bezüglich Biegung gelenkig angeschlossen sind, jedoch keine Instabilitäten durch Verdrehungen der Koppelstäbe um die eigene Achse auftreten. Weiterhin ist für diese Definition der Kopplung wichtig, dass die sich aus dem Knotenabstand ergebende Stabrichtung eindeutig ist (Stichwort: minimal erforderlicher Knotenabstand) und zur beabsichtigten Koppelbedingung passt (Stichwort: Staborientierung). Die Steifigkeit der Koppelelemente sollte zwar möglichst groß, aber dennoch system- und programmverträglich gewählt werden. Im Zweifelsfall ist dieser Punkt mit Testrechnungen zu klären.

Tragstrukturen, welche Krümmungen aufweisen, tragen äußere Lasten oft zu einem bedeutenden Anteil über Normalkräfte ab. Das ist bei der Kopplung der ideellen Ebenen zu berücksichtigen. Dies ist auch für ebene Tragstrukturen, welche durch äußere Normalkräfte beansprucht werden, der Fall. Ist dies gegeben, sind die Ebenen zusätzlich in Richtung der auftretenden Normalkräfte zu koppeln. Meist ist eine Kopplung aller Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung bzw. in die drei Richtungen x , y , z sinnvoll. Dies lässt sich durch Fachwerkstäbe alleine nicht realisieren. Es wird empfohlen, Federelemente oder Kopplungsbedingungen über Referenzknoten zu definieren. Zur Verdeutlichung ist in Bild 4.4-1 die Kopplung der Knoten K^A und K^B schematisch dargestellt.

Generell ist sicherzustellen, dass ausschließlich die Knotenverschiebungen, aber nicht Knotenverdrehungen gekoppelt werden.

Anmerkung: Normalkräfte in der Tragstruktur können zu Stabilitätsproblemen des ideellen Systems führen. Auf die Besonderheiten in diesem Zusammenhang wird in Kapitel 4.6 näher eingegangen.

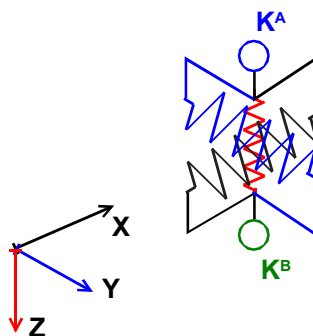


Bild 4.4-1: Kopplung der Knoten K^A und K^B im Raum; Realisierung durch Federn

4.4.2 Grundsätzliche Überlegungen zu den Koppelkräften und deren Bedeutung

Durch die Kopplung gemäß Abschnitt 4.4.1 werden am ideellen System Koppelkräfte aktiviert. Dies entspricht einer Aufteilung der äußeren Last in die Lasten p^A und p^B , welche getrennt auf die beiden Ebenen aufgebracht werden. Bild 4.4-2 zeigt schematisch die Aufteilung einer veränderlichen Linienlast $p(x)$ in die entsprechenden Teillasten. In Bereichen ohne äußere Einwirkung können ebenfalls Koppelkräfte zwischen beiden Ebenen notwendig sein, um die Forderung nach einer gemeinsamen Biegelinie zu erfüllen. Dies ist z.B. bei einer Belastung des Gesamtsystems durch Randmomente der Fall. An Unstetigkeitsstellen, wie sie z. B. im Bereich der Einleitung von Einzellasten gegeben sind, ist die hier in Form einer Linienlast angesetzte Koppelkraft um eine entsprechende Einzellast zu ergänzen.

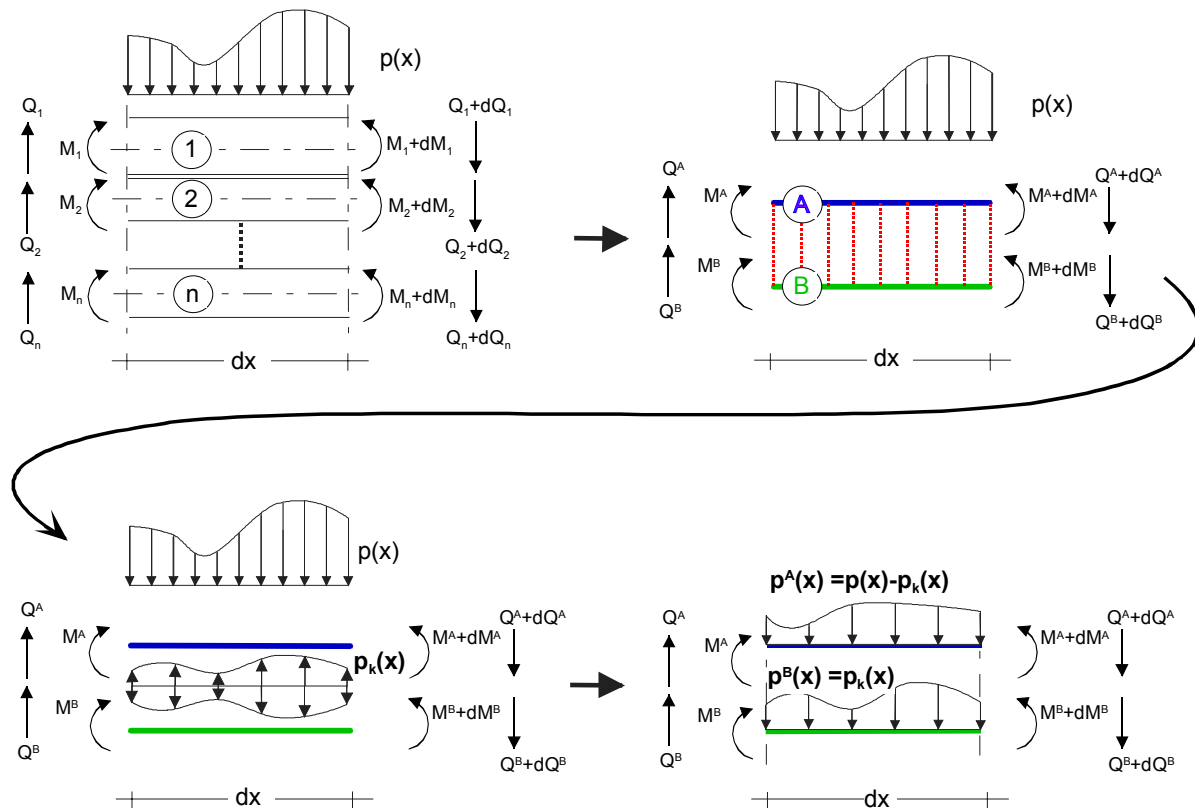


Bild 4.4-2: Schematische Darstellung der Transformation, der Koppelkräfte und der Lastaufteilung am infinitesimal kleinem Balkenelement mit n Lagen unter der äußeren Last $p(x)$

Wird die äußere Last komplett auf eine der beiden ideellen Ebenen aufgebracht, so sind Verlauf und Größe der Koppelkraft $p_k(x)$ davon abhängig, welche Ebene belastet wird. Ist Ebene A belastet, so entspricht die Koppelkraft der ideellen Teillast $p^B(x)$, wird Ebene B belastet, ist $p_k(x) = p^A(x)$.

Die Querkraften des ideellen Systems, $Q^A(x)$ und $Q^B(x)$ stehen in direktem Zusammenhang mit dem Schubfluss in den Einzelquerschnitten und den Schubfugen des realen Querschnitts. Für $Q^A(x)$ und $Q^B(x)$ gilt die bekannte Beziehung:

$$Q'(x) = p(x)$$

Das bedeutet, wenn die Teillasten („Koppellasten“) $p^A(x)$ und $p^B(x)$ so aufgeteilt sind, dass die Koppelkraft verschwindet, dann sind sie ein Maß für die Schubflussänderung im realen Querschnitt. Dabei bezieht sich $p^A(x)$ auf die Änderung der Parabelstiche des Schubflusses in den Einzelquerschnitten und $p^B(x)$ auf die Schubflussänderung in den Verbundfugen.

Durch Gleichsetzen der differentiellen Beziehung beider Ebenen lässt sich der Verlauf der Koppelkraft $p_k(x)$ in allgemeiner Form in Abhängigkeit von den Steifigkeitsverhältnissen und der

äußeren Last angeben. Die Lösung der Gleichungen der folgenden Abschnitte erfolgte teilweise computergestützt mit Hilfe der Mathematiksoftware „Maple“. Ausdrucke der entsprechenden Dateien sind im Anhang A beigefügt.

4.4.3 Allgemeiner Verlauf der Koppelkräfte, analytische Lösung

4.4.3.1 Die Differentialgleichungen der ideellen Ebenen

Grundlage für die im nächsten Abschnitt durchgeführte allgemeine Ableitung der Koppelkraft sind die Differentialgleichungen der Biegelinie beider Ebenen. Es wird von konstanten Biege- und Schubsteifigkeiten ausgegangen.

Ebene A:

Die Ebene A ist Schubstarr. Für die Biegelinie unter der Last $p^A(x)$ gelten die Zusammenhänge des schubstarrten Biegebalkens (vgl. z.B.: [79]):

$$B^A w^{IV} = p^A(x) ; \quad \text{Gl. 4-27}$$

$$B^A w''' = -Q^A(x) = \int_0^x p^A(x) dx - Q_0^A ; \quad \text{Gl. 4-28}$$

$$B^A w'' = -M^A(x) = \int_0^x \int_0^x p^A(x) dx^2 - Q_0^A \cdot x - M_0^A ; \quad \text{Gl. 4-29}$$

$$B^A w' = B^A \varphi(x) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x p^A(x) dx^3 - Q_0^A \cdot \frac{x^2}{2} - M_0^A \cdot x + B^A \cdot \varphi_0 ; \quad \text{Gl. 4-30}$$

$$B^A w = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x p^A(x) dx^4 - Q_0^A \cdot \frac{x^3}{6} - M_0^A \cdot \frac{x^2}{2} + B^A \cdot \varphi_0 \cdot x + B^A w_0 ; \quad \text{Gl. 4-31}$$

Ebene B:

Bei der Bestimmung von Verformungen der Ebene B muss der Einfluss der Schubsteifigkeit berücksichtigt werden. Den folgenden Ableitungen wird der so genannte „Timoshenko-Balken“ (vgl. z.B.: [93]) zugrunde gelegt. Der Aufwand für ein genaueres Verfahren mit Berücksichtigung der Verwölbungsfähigkeit des Querschnitts, wie es z.B. von Hofmann [40] vorgestellt wurde, erscheint in Anbetracht der Näherungen, die die Schubanalogie beinhaltet, nicht gerechtfertigt.

Die Verformungen der Ebene B lassen sich in einen Biege- und einen Schubanteil aufteilen:

$$w = w_M + w_Q ; \quad \text{Gl. 4-32}$$

Analog zur Ebene A ergeben sich unter der Last $p^B(x)$ die Differentialgleichungen für den Biegeanteil infolge des Drehwinkels der Ebene B $w'_M = -\psi = -\varphi^B$:

$$B^B w_M^{IV} = p^B(x) ; \quad \text{Gl. 4-33}$$

$$B^B w_M''' = -Q^B(x) = \int_0^x p^B(x) dx - Q_0^B ; \quad \text{Gl. 4-34}$$

$$B^B w_M'' = -M^B(x) = \int_0^x \int_0^x p^B(x) dx^2 - Q_0^B \cdot x - M_0^B ; \quad \text{Gl. 4-35}$$

$$B^B w_M' = -B^B \psi(x) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x p^B(x) dx^3 - Q_0^B \cdot \frac{x^2}{2} - M_0^B \cdot x + B^B \cdot w_{M,0}' ; \quad \text{Gl. 4-36}$$

$$B^B w_M = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x p^B(x) dx^4 - Q_0^B \cdot \frac{x^3}{6} - M_0^B \cdot \frac{x^2}{2} + B^B \cdot w_{M,0}' \cdot x + B^B w_{M,0} ; \quad \text{Gl. 4-37}$$

Für den Schubanteil der Biegelinie ist die Gleitung γ maßgebend. Sie setzt sich aus einer vertikalen Gleitung und einer über die Trägerlänge konstanten Schrägstellung des Querschnitts ω zusammen:

$$\gamma = w_Q' + \omega \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{Gl. 4-38}$$

Diese Schrägstellung des Verbundquerschnittes entsteht z.B. infolge eines einseitig angreifenden Randmomentes, welches über ein horizontal auf den Querschnitt einwirkendes, vertikal versetztes Kräftepaar eingeleitet wird. Dieser Effekt kann bei den in dieser Arbeit untersuchten Lastfällen in der Regel vernachlässigt werden. Der Interessierte findet Näheres zu diesem Thema z.B. bei Stamm und Witte [86], die den Sachverhalt in Zusammenhang mit Sandwichelementen erläutern. Für den Schubanteil der Ebene B ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$w_Q' = \gamma - \omega = w' - w_M' - \omega$$

$$S \cdot \gamma' = S \cdot (w_Q'' - \omega') = S \cdot w_Q'' = -p^B(x) ; \quad \text{mit } \omega = \text{const.} \quad \text{Gl. 4-39}$$

$$\Rightarrow S \cdot \gamma''' = S \cdot (w_Q^{IV} - \omega''') = S \cdot w_Q^{IV} = -p^{B''}(x) ; \quad \text{mit } \omega = \text{const.} \quad \text{Gl. 4-40}$$

$$S \cdot w_Q' = S \cdot (\gamma - \omega) = Q^B(x) - S \cdot \omega = -\int_0^x p^B(x) dx + Q_0^B - S \cdot \omega ; \quad \text{Gl. 4-41}$$

$$S \cdot w_Q = S \cdot \int \gamma dx + C^* = -\int_0^x \int_0^x p^B(x) dx^2 + Q_0^B \cdot x + S \cdot \omega \cdot x + C^* ; \quad \text{Gl. 4-42}$$

4.4.3.2 Die Differentialgleichung des Koppelkraftverlaufes

Weisen beide Ebenen identische Biegelinien auf, sind auch die Ableitungen vierten Grades der Durchbiegungen gleich.

$$w_B^{IV} = w_A^{IV} \quad \text{Gl. 4-43}$$

Wird die äußere Last auf die Ebene A aufgebracht und gemäß Bild 4.4-2 aufgeteilt, so gilt für die Einwirkung auf die ideellen Ebenen:

$$p^A(x) = p(x) - p_k(x) ; \quad \text{Gl. 4-44}$$

$$p^B(x) = +p_k(x) ; \quad \text{Gl. 4-45}$$

Für die Ableitungen vierten Grades der Biegelinien gilt damit:

$$w_A^{IV} = \frac{p(x) - p_k(x)}{B^A} ; \quad \text{Gl. 4-46}$$

$$w_B^{IV} = w_{B,M}^{IV} + w_{B,Q}^{IV} = w_M^{IV} + w_Q^{IV} = \frac{p_k(x)}{B^B} - \frac{p_k''(x)}{S} ; \quad \text{Gl. 4-47}$$

Durch Gleichsetzen erhält man für die Koppelkraft eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zur Vereinfachung des Ausdrucks wird der von den Steifigkeiten abhängige Parameter α eingeführt.

$$p_k''(x) - \alpha \cdot p_k(x) = -\frac{S}{B^A} \cdot p(x) ; \quad \text{Gl. 4-48}$$

$$\alpha = \frac{(B^A + B^B) \cdot S}{(B^A \cdot B^B)} ; \quad \text{Gl. 4-49}$$

4.4.3.3 Verlauf der Koppelkraft für $p(x)=0$ – allgemeine (homogene) Lösung der DGL

In Bereichen ohne äußere Einwirkung ($p(x)=0$) gilt die homogene DGL der Koppelkraft:

$$p_k''(x) - \alpha \cdot p_k(x) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-50}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung und die Fundamentalbasis lauten:

$$\lambda^2 - \alpha = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} ; \quad y_2 = e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} ; \quad \text{Gl. 4-51}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung der Koppelkraft in Abhängigkeit von den Parametern P_1 , P_2 und α :

$$p_k(x) = P_1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P_2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} ; \quad \text{Gl. 4-52}$$

4.4.3.4 Verlauf der Koppelkraft für ausgewählte Funktionen $p(x)$ – inhomogene Lösung der DGL

Mit Hilfe des soeben vorgestellten Ansatzes lassen sich die Ergebnisgrößen nach der Schubanalogie analytisch bestimmen. Ein großer Vorteil der Schubanalogie besteht zwar in der guten Anwendbarkeit numerischer Methoden; dennoch erscheint die analytische Lösung bestimmter System-Last-Konstellationen im Rahmen dieser Arbeit - auch im Hinblick auf die noch folgenden Untersuchungen - sinnvoll. Im Folgenden werden die Lösungen für ausgewählte „Situationen“, die sich durch besondere baupraktische Relevanz auszeichnen oder für das Verständnis der Zusammenhänge hilfreich sind, abgeleitet. Im ersten Schritt werden die dazu notwendigen Funktionen für den jeweiligen Verlauf der Koppelkraft bestimmt.

Verlauf der Koppelkraft für Gleichlast, $p(x)=p_0$

Wird das System durch eine Gleichlast ($p(x)=\text{const.}=p_0$) belastet, lautet die DGL von p_k :

$$p_k''(x) - \alpha \cdot p_k(x) = -\frac{S}{B^A} \cdot p_0 ; \quad \text{Gl. 4-53}$$

Mit Hilfe eines Störansatzes bestimmt sich die partikuläre Lösung y_p für das Störglied $-\frac{S}{B^A} \cdot p_0$:

$$y_p = \frac{S}{\alpha \cdot B^A} \cdot p_0 = \frac{B^B}{B^A + B^B} \cdot p_0 \quad \text{Gl. 4-54}$$

Die Summe aus homogenem und partikulärem Anteil ergibt die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$p_k(x) = P_1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P_2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} + \frac{S}{\alpha \cdot B^A} \cdot p_0 ; \quad \text{Gl. 4-55}$$

Verlauf der Koppelkraft für eine sinusförmige Streckenlast, $p(x)=p_0 \cdot \sin(\pi/\ell \cdot x)$

Für analytische Ableitungen der Beziehungen nachgiebig verbundener Querschnitte werden oft sinusförmige Belastungsglieder angesetzt, da diese bei der Differentiation und Integration gut zu handhaben sind. Durch Überlagerungen und Reihenentwicklungen lassen sich daraus andere Belastungen annähern (vgl. z.B.: [19], [78]). Auch das so genannte „ γ -Verfahren“ basiert auf solchen Überlegungen (vgl.: Abschnitt 4.1; [59], [73]). Bei sinusförmiger Belastung liegt für die Differentialgleichung der Koppelkraft folgende Störfunktion $s(x)$ vor:

$$s(x) = -\frac{S}{B^A} \cdot p_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \quad \text{Gl. 4-56}$$

Mittels Störansatz findet sich im Falle einer sinusförmigen Streckenlast folgende Lösung für die Koppelkraft:

$$p_k(x) = P_1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P_2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} + \frac{S \cdot \ell^2}{B^A (\alpha \cdot \ell^2 + \pi^2)} \cdot p_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell}\right) ; \quad \text{Gl. 4-57}$$

4.5 Lösung der Differentialgleichungen des ideellen Systems der Schubanalogie für ausgesuchte Systeme und Lastfälle

4.5.1 Der Eigenspannungszustand „gegenseitig orientierte Randmomente“ am Einfeldträger

Eine interessante Variante für die Belastung des ideellen Systems ist der in Bild 4.5-1 dargestellte Lastfall, bei dem auf beide Ebenen gegenseitig orientierte Randmomente M_R aufgebracht werden. Dadurch entsteht ein Eigenspannungszustand. Unter statisch bestimmter Lagerung werden keine Lagerreaktionen geweckt und die Summe der ideellen Schnittgrößen ist Null. Auch wenn die baupraktische Bedeutung dieses Lastfalls eher gering ist, ist die Ableitung der zugehörigen Beziehungen für das allgemeine Vorgehen von Interesse, da sie Einblicke in das Verhalten des ideellen Systems gewährt.

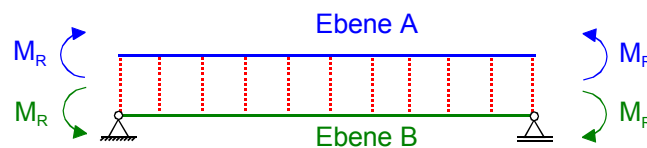


Bild 4.5-1: Ideelles System mit Belastung im Lastfall „gegenseitig orientierte Randmomente“, schematische Darstellung

An einem Einfeldträger, der zwischen den Auflagern frei von äußeren Lasten ist, gilt die in Kapitel 4.4.3.3 behandelte homogene DGL der Koppelkraft. Durch Einsetzen in die Gleichungen (4-44) – (4-47) formulieren sich für die vierten Ableitungen der Biegelinien beider Ebenen folgende Zusammenhänge:

$$w_A^{IV} = -\frac{P1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}}{B^A} ; \quad \text{Gl. 4-58}$$

$$w_M^{IV} = \frac{P1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}}{B^B} ; \quad \text{Gl. 4-59}$$

$$w_Q'' = -\frac{P1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}}{S} ; \quad \text{Gl. 4-60}$$

Durch Integration erhält man die Funktionen der Biegelinien. Für Ebene A gilt:

$$w_A(x) = \frac{-B^A \cdot B^{B^2}}{(B^A + B^B)^2 \cdot S^2} \cdot (P1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}) + C7 \cdot \frac{x^3}{6} + C8 \cdot \frac{x^2}{2} + C9 \cdot x + C10 \quad \text{Gl. 4-61}$$

Die Durchsenkung aus Biegemoment der Ebene B gehorcht folgender Vorschrift:

$$w_M(x) = \frac{-(P1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x})}{\alpha^2 \cdot B^B} + C3 \cdot \frac{x^3}{6} + C4 \cdot \frac{x^2}{2} + C5 \cdot x + C6 \quad \text{Gl. 4-62}$$

Für den Schubanteil der Durchsenkung von Ebene B gilt:

$$w_Q(x) = \frac{-(P1 \cdot B^A \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + P2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x})}{S^2 \cdot (B^A + B^B)} + C1 \cdot x + C2 \quad \text{Gl. 4-63}$$

Anmerkung: Da im untersuchten Lastfall beidseits Randmomente angreifen, ist die über die Trägerlänge konstante und in der Konstanten C2 mit erfasste Schrägstellung des Querschnitts $\omega=0$.

Zunächst sind die Beziehungen von insgesamt 12 unbekannten Konstanten abhängig. Durch die Randbedingungen des untersuchten Systems sind folgende Bedingungen gegeben:

$$w_Q(0) = \frac{-P1 - P2}{S \cdot \alpha} + C2 = 0 ; \quad \text{Gl. 4-64}$$

$$w_M(0) = \frac{P1 + P2}{B^B \cdot \alpha^2} + C6 = 0 ; \quad \text{Gl. 4-65}$$

$$w_M''(0) = \frac{M_R}{B^B} ; \quad \text{Gl. 4-66}$$

$$w_Q(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-67}$$

$$w_M(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-68}$$

$$w_M''(\ell) = \frac{M_R}{B^B} ; \quad \text{Gl. 4-69}$$

$$w_A(0) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-70}$$

$$w''(0) = -\frac{M_R}{B^A} ; \quad \text{Gl. 4-71}$$

$$w_A(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-72}$$

$$w''(\ell) = -\frac{M_R}{B^A} ; \quad \text{Gl. 4-73}$$

Die beiden Ebenen sollen die gleiche Biegelinie aufweisen; es gilt damit:

$$w_A = w_B = w_M + w_Q ; \quad \text{Gl. 4-74}$$

Aufgrund der Symmetriebedingungen von Einwirkung und System muss auch der Verlauf der Koppelkraft symmetrisch sein. Daraus kann folgende Aussage abgeleitet werden:

$$p_k(0) = p_k(\ell); \quad \text{Gl. 4-75}$$

Mit diesen 12 Bedingungen ergibt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der 12 unbekannten Größen. Eine Lösung ist z.B. mit folgenden Konstanten möglich:

$$P1 = M_R \cdot \frac{\alpha}{1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}} \quad \text{Gl. 4-76}$$

$$P2 = M_R \cdot \frac{\alpha}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}} \quad \text{Gl. 4-77}$$

$$C1 = C3 = C4 = C5 = C7 = C8 = C9 = 0 ; \quad \text{Gl. 4-78}$$

$$C2 = \frac{M_R}{S} ; \quad \text{Gl. 4-79}$$

$$C6 = -\frac{B^A \cdot M_R}{(B^A + B^B) \cdot S} = -M_R \cdot \frac{B^B}{\alpha}; \quad \text{Gl. 4-80}$$

$$C10 = \frac{B^B \cdot M_R}{(B^A + B^B) \cdot S} = M_R \cdot \frac{B^A}{\alpha}; \quad \text{Gl. 4-81}$$

Der Verlauf der Koppelkraft ergibt sich durch Einsetzen des Ergebnisses für die Parameter P1 und P2 in den allgemeinen homogenen Ansatz der Koppelkraft, Gl. 4-52:

$$p_k(x) = M_R \cdot \alpha \cdot \left(\frac{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}}{1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}} + \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}} \right); \quad \text{Gl. 4-82}$$

Damit gehorcht die Biegelinie folgender Vorschrift:

$$w_A(x) = w_B(x) = -\frac{M_R \cdot B^B}{S \cdot (B^A + B^B)} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)} + e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot L} - 1}{e^{\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-83}$$

Die Schnittgrößen der Ebene A lauten:

$$Q^A(x) = M_R \cdot \alpha \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)} - e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}}{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-84}$$

$$M^A(x) = M_R \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)} + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}}{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-85}$$

Für die Schnittgrößen der Ebene B gilt analog:

$$Q^B(x) = -M_R \cdot \alpha \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)} - e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}}{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-86}$$

$$M^B(x) = -M_R \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)} + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}}{e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-87}$$

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge sind beispielhafte Verläufe für die Koppellasten und die Durchsenkung $w(x)$ in Bild 4.5-2 und die zugehörigen Schnittgrößen der ideellen Ebenen in Bild 4.5-3 qualitativ dargestellt.

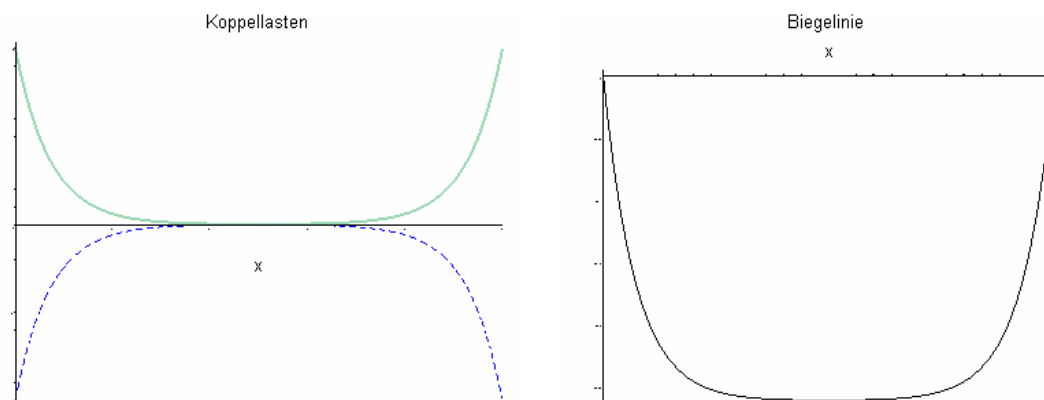


Bild 4.5-2: Lastfall „gegenseitige Randmomente“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

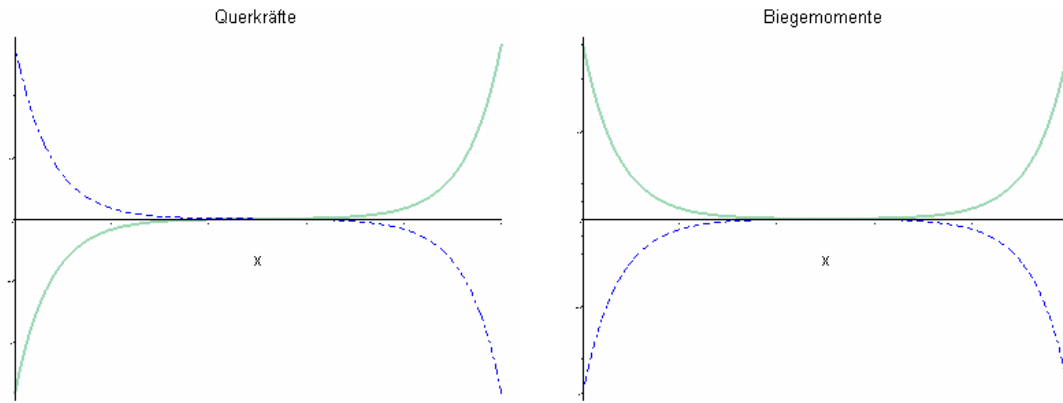


Bild 4.5-3: Lastfall „gegenseitige Randmomente“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve)

Anmerkung zur Darstellung der Ergebnisgrößen: Bei den in diesem Kapitel gezeigten qualitativen Verläufen der Koppellasten, Biegelinien, Querkräfte und Biegemomente sind die Werte entsprechend Ihres Vorzeichens angetragen. Abweichend von der im Bauingenieurwesen meist üblichen Darstellungsweise ist die positive z-Achse dabei in allen Fällen nach oben orientiert.

4.5.2 Die Situation „Einfeldträger-Randmoment an Ebene B“

Es wird der Lastfall untersucht, bei dem ausschließlich die Ebene B des ideellen Systems beidseits durch ein Randmoment M_R beansprucht wird (vgl.: Bild 4.5-4). Dieser Zustand ist für die Erfassung der Schubkraftübertragung zwischen den einzelnen Schichten, wie sie beispielsweise bei unterschiedlichen Temperaturdehnungen einzelner Teilquerschnitte, Schwindvorgängen oder exzentrischen Lastenleitungen etc. auftritt, von Bedeutung (näheres dazu siehe Kapitel 4.7.2 bzw. [82]). Die Beziehungen werden für einen Einfeldträger abgeleitet.

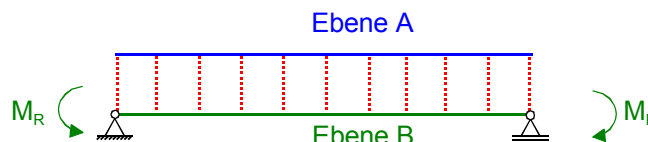


Bild 4.5-4: Ideelles System mit Belastung im Lastfall „Randmoment an Ebene B“, schematische Darstellung

Zur Bestimmung der Beziehungen für diesen Lastfall ist die homogene DGL der Koppelkraft anzusetzen. Auch bei diesem Lastfall ist die Schrägstellung des Querschnitts $\omega=0$. Das Gleichungssystem ist für den beidseits gelenkig gelagerten Einfeldträger mit folgenden Randbedingungen aufzustellen:

$$w_Q(0) = w_M(0) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-88}$$

$$w_M''(0) = \frac{M_R}{B^B} ; \quad \text{Gl. 4-89}$$

$$w_Q(\ell) = w_M(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-90}$$

$$w_M''(\ell) = \frac{M_R}{B^B} ; \quad \text{Gl. 4-91}$$

$$w(0) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-92}$$

$$w''(0) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-93}$$

$$w(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-94}$$

$$w''(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-95}$$

Zusätzliche Bedingungen sind auch hier durch die Forderung nach einer identischen Biegelinie (Gl. 4-74) und die Symmetrie der Koppelkraft (4-75) gegeben. Eine Lösung des Gleichungssystems ist mit folgenden Konstanten möglich:

$$P1 = -\frac{S \cdot M_R}{B^B \cdot (1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L})} ; \quad \text{Gl. 4-96}$$

$$P2 = -\frac{S \cdot M_R \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}}{B^B \cdot (1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L})} ; \quad \text{Gl. 4-97}$$

$$M_0^B = M_R ; \quad \text{Gl. 4-98}$$

$$w'_{0,M} = -M_R \cdot \left(\frac{B^A \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{\sqrt{\alpha} \cdot \ell} - 1)}{(B^A + B^B)^2 \cdot S \cdot (e^{\sqrt{\alpha} \cdot \ell} + 1)} + \frac{\ell}{2 \cdot (B^A + B^B)} \right) ; \quad \text{Gl. 4-99}$$

$$w'_0 = -M_R \cdot \left(\frac{(B^A \cdot B^B) \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot \ell} - 1)}{(B^A + B^B)^2 \cdot S \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot \ell} + 1)} + \frac{\ell}{2 \cdot (B^A + B^B)} \right) ; \quad \text{Gl. 4-100}$$

$$Q_0^B = \frac{B^A \cdot M_R \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} - 1)}{(B^A + B^B) \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} ; \quad \text{Gl. 4-101}$$

$$Q_0^A = -\frac{B^A \cdot M_R \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} - 1)}{(B^A + B^B) \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} ; \quad \text{Gl. 4-102}$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse für die Parameter P1 und P2 in Gl. 4-52 ergibt sich der Verlauf der Koppelkraft $p_k(x)$:

$$p_k(x) = -\frac{S \cdot M_R}{B^B \cdot (1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L})} \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)}) ; \quad \text{Gl. 4-103}$$

Im Lastfall „Randmoment an Ebene B“ lauten die Schnittgrößen der ideellen Ebenen:

$$Q^B(x) = \frac{M_R \cdot B^A \cdot \sqrt{\alpha}}{(B^A + B^B)} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot (L-x)}}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}} = M_R \cdot \frac{S}{\sqrt{\alpha} \cdot B^B} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot (L-x)}}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}} ; \quad \text{Gl. 4-104}$$

$$M^B(x) = \frac{M_R}{(B^A + B^B)} \cdot \left(\frac{B^A \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} + e^{\sqrt{\alpha} \cdot (x-L)})}{1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}} + B^B \right); \quad \text{Gl. 4-105}$$

$$Q^A(x) = -Q^B(x) = M_R \cdot \frac{S}{\sqrt{\alpha} \cdot B^B} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (L-x)} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot x}}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}}; \quad \text{Gl. 4-106}$$

$$M^A(x) = -\frac{M_R \cdot B^A}{(B^A + B^B)} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot (L-x)} + e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} - (1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L})}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}}; \quad \text{Gl. 4-107}$$

Damit wird die Biegelinie im vorliegenden Lastfall von folgender Funktion beschrieben:

$$w(x) = M_R \cdot \left\{ \begin{array}{l} -B^A \cdot S \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot x^2 + B^A \cdot L \cdot S \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot x \\ + 2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x} - B^A \cdot S \cdot x^2 \\ - 2 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot B^A \cdot B^B + 2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} \\ + B^A \cdot L \cdot S \cdot x - 2 \cdot B^A \cdot B^B + B^B \cdot L \cdot S \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot x \\ + B^B \cdot S \cdot x^2 + B^B \cdot L \cdot S \cdot x - B^B \cdot S \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot x^2 \end{array} \right\} \left/ \left[2 \cdot S \cdot (B^A + B^B)^2 \cdot (1 + e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}) \right] \right.$$

In Bild 4.5-5 und Bild 4.5-6 sind die Verläufe der Koppellasten und der zugehörigen Ergebnisgrößen im untersuchten Lastfall qualitativ dargestellt.

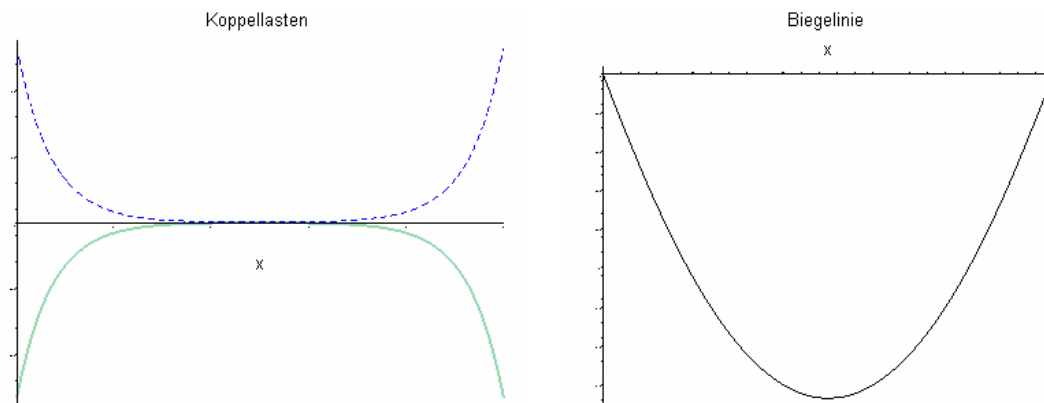


Bild 4.5-5: Lastfall „Randmomente an Ebene B“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

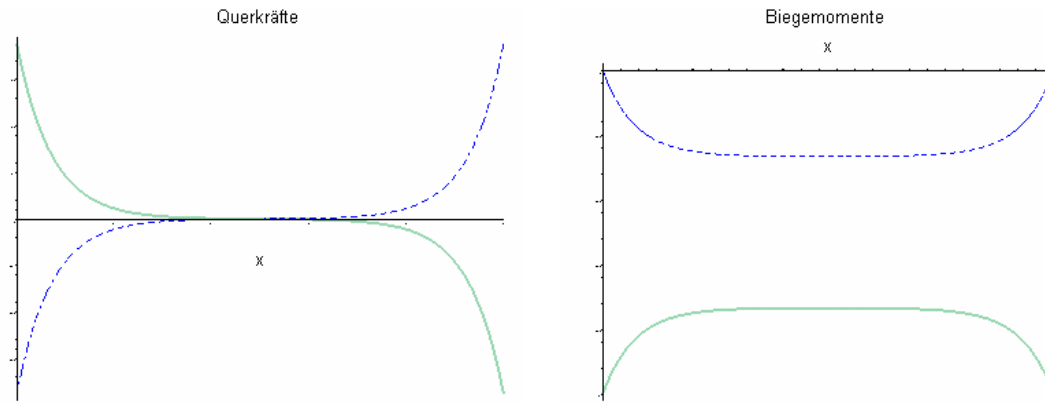


Bild 4.5-6: Lastfall „Randmomente an Ebene B“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve)

4.5.3 Der Lastfall „sinusförmige Streckenlast am Einfeldträger“

Wirkt auf den Träger eine Streckenlast ein, deren Betrag der Sinusfunktion folgt, so gehorcht die Koppelkraft der Gleichung (4-57). Sind die Enden des Trägers frei drehbar gelagert und greift dort kein Biegemoment am Träger an, muss an diesen Stellen die zweite Ableitung der Biegelinie für beide Ebenen Null sein. Für den beidseits gelenkig gelagerten Einfeldträger lauten damit die Randbedingungen (wobei die Schrägstellung ω wieder gleich Null ist):

$$w_Q(0) = w_M(0) = w_Q(\ell) = w_M(\ell) = w(0) = w(\ell) = 0 \quad \text{Gl. 4-108}$$

$$w_M''(0) = w_M''(\ell) = w''(0) = w''(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-109}$$

Die zum Lösen des Gleichungssystems zusätzlich notwendigen Beziehungen können wieder aus den Forderungen nach einem symmetrischen Verlauf der Koppelkraft (4-75) und nach einer identischen Biegelinie (Gl. (4-74)) gewonnen werden. Die damit festgelegten Bestimmungsgleichungen lösen sich mit folgenden Konstanten:

$$P_1 = P_2 = 0 ; \quad \text{Gl. 4-110}$$

$$\varphi_0^A = \frac{(\pi^2 \cdot B^B + L^2 \cdot S) \cdot p_0 \cdot L^3}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B) \cdot \pi^3} ; \quad \text{Gl. 4-111}$$

$$\varphi_0^B = \frac{p_0 \cdot S \cdot L^5}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B) \cdot \pi^3} ; \quad \text{Gl. 4-112}$$

$$Q_0^A = \frac{(\pi^2 \cdot B^B + L^2 \cdot S) \cdot p_0 \cdot L \cdot B^A}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B) \cdot \pi} ; \quad \text{Gl. 4-113}$$

$$Q_0^B = \frac{p_0 \cdot S \cdot L^3 \cdot B^B}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B) \cdot \pi} ; \quad \text{Gl. 4-114}$$

Für die Koppelkraft und die Lastaufteilung auf die beiden Ebenen gilt:

$$p_k(x) = p_B(x) = \frac{p_0 \cdot S \cdot L^2 \cdot B^B}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right); \quad \text{Gl. 4-115}$$

$$p_A(x) = \frac{p_0 \cdot (\pi^2 \cdot B^B + S \cdot L^2) \cdot B^A}{(S \cdot L^2 \cdot (B^A + B^B) + \pi^2 \cdot B^A \cdot B^B)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right); \quad \text{Gl. 4-116}$$

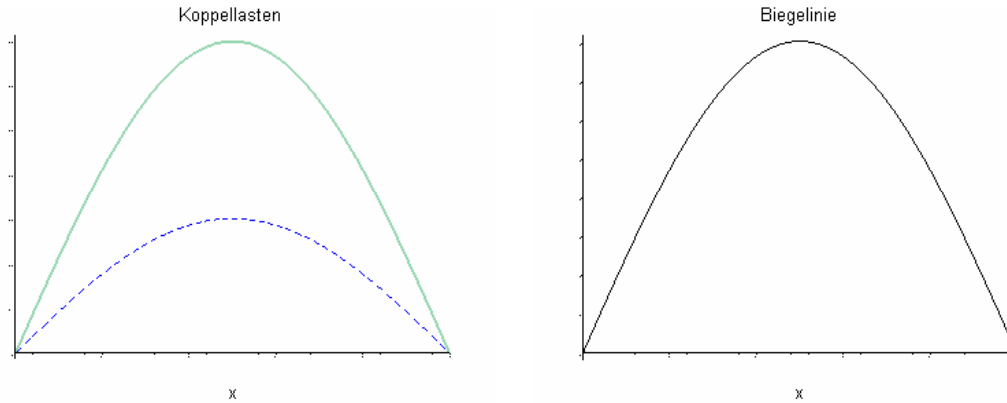


Bild 4.5-7: Lastfall „sinusförmige Streckenlast“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

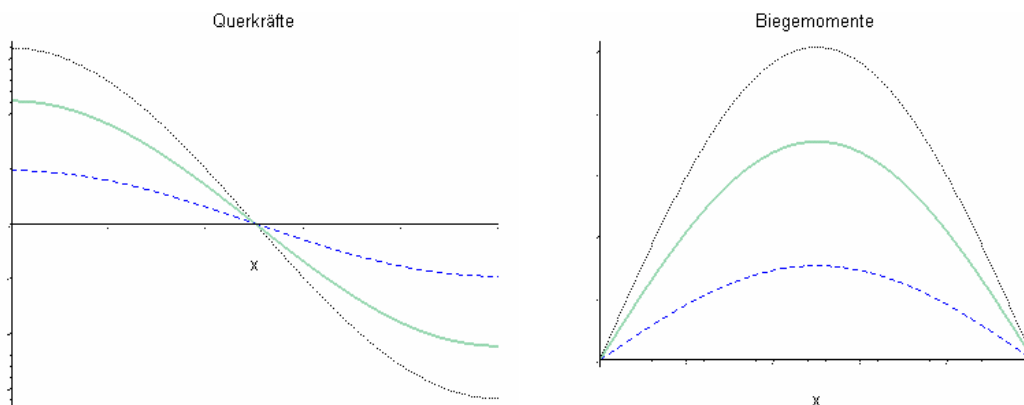


Bild 4.5-8: Lastfall „sinusförmige Streckenlast“. Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)

Anmerkung: Aufgrund der „günstigen Eigenschaften“ der Sinusfunktion kann die Lastaufteilung im Falle des Einfeldträgers alternativ auch direkt, also ohne Ansatz der Störfunktion, durch Gleichsetzen der maximalen Durchbiegungen der beiden Teilträger gewonnen werden.

4.5.4 Der Lastfall „Gleichlast am Einfeldträger“

Im Falle einer konstanten Streckenlast vom Betrag p_0 ist die Koppelkraft gemäß Gl. 4-55 anzusetzen. Für die mit den Gleichungen (4-108) und (4-109) gegebenen Randbedingungen des gelenkig gelagerten Einfeldträgers und den bekannten Zusatzbedingungen (Gl. (4-75), Gl. (4-74)) bestimmen sich analog zum Lastfall „sinusförmige Streckenlast“ folgende Konstanten:

$$P1 = \frac{p_0 \cdot B^B}{(B^A + B^B) \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)}; \quad \text{Gl. 4-117}$$

$$P_2 = \frac{p_0 \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L}}{(B^A + B^B) \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)}; \quad \text{Gl. 4-118}$$

$$\varphi_0^A = \frac{p_0}{S^2 \cdot (B^A + B^B)^3} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{12 \cdot S \cdot B^{B^2} \cdot L \cdot B^A + 2 \cdot S^2 \cdot L^3 \cdot B^A \cdot B^B + S^2 \cdot L^3 \cdot B^{B^2}}{24} + \\ & \frac{12 \cdot S \cdot B^{B^3} \cdot L + S^2 \cdot L^3 \cdot B^{A^2} + 24 \cdot B^A \cdot B^{B^3} \cdot \sqrt{\alpha}}{24} \\ & + \frac{2 \cdot p_0 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot B^{B^3}}{(e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \end{aligned} \right\}; \quad \text{Gl. 4-119}$$

$$\varphi_0^B = \frac{p_0}{S^2 \cdot (B^A + B^B)^3} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{S^2 \cdot L^3 \cdot B^{A^2} + 2 \cdot S^2 \cdot L^3 \cdot B^A \cdot B^B + S^2 \cdot L^3 \cdot B^{B^2}}{24} + \\ & \frac{-12 \cdot S \cdot B^{B^2} \cdot L \cdot B^A - 24 \cdot B^{A^2} \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha} - 12 \cdot S \cdot B^{A^2} \cdot L \cdot B^B}{24} \\ & + \frac{2 \cdot p_0 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot B^{A^2} \cdot B^{B^2}}{(e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \end{aligned} \right\}; \quad \text{Gl. 4-120}$$

$$Q_0^A = \frac{-B^A \cdot p_0}{S \cdot (B^A + B^B)^2} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha} - S \cdot L \cdot (B^A + B^B)}{2} + \frac{2 \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha}}{(e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \right\}; \quad \text{Gl. 4-121}$$

$$Q_0^B = \frac{p_0}{S \cdot (B^A + B^B)^2} \cdot \left\{ \frac{B^B \cdot (B^A \cdot S \cdot L + S \cdot B^B \cdot L + 2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot \sqrt{\alpha})}{2} - \frac{2 \cdot B^A \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha}}{(e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \right\}; \quad \text{Gl. 4-122}$$

Die exemplarischen Verläufe von Koppellasten, Biegelinie und Schnittgrößen sind in Bild 4.5-9 und Bild 4.5-10 in der bereits bekannten Weise dargestellt.

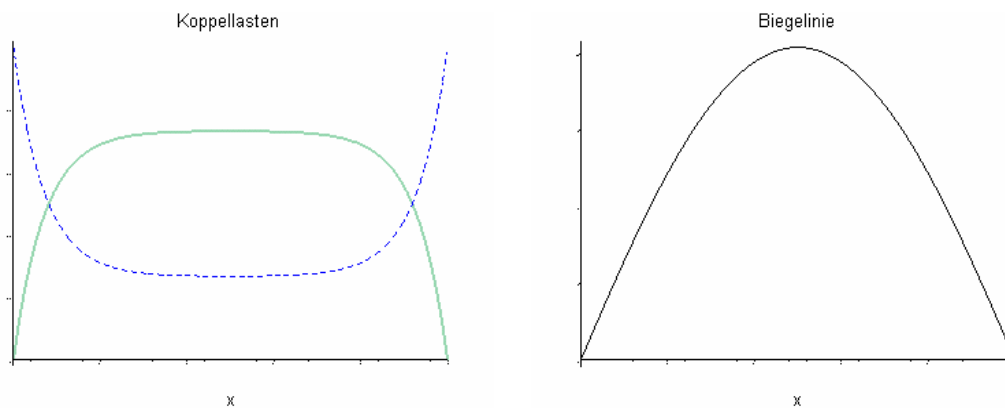


Bild 4.5-9: Lastfall „Gleichlast“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

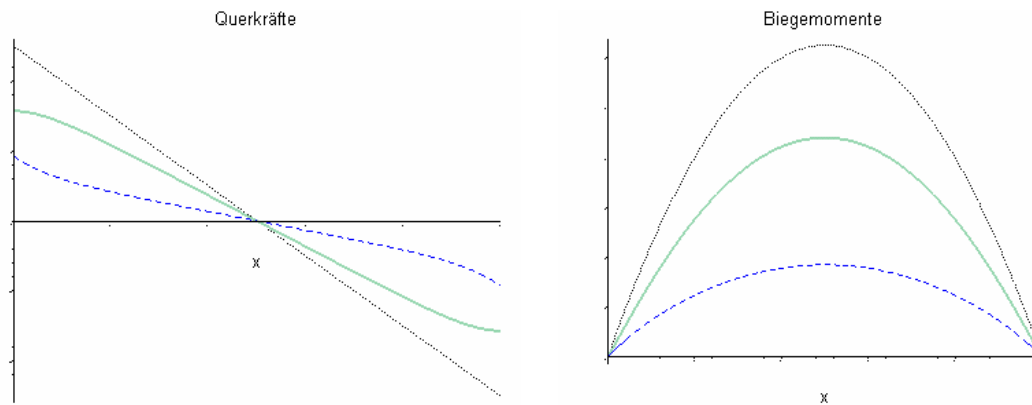


Bild 4.5-10: Lastfall „Gleichlast“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)

4.5.5 Der Lastfall „Einzellast in Feldmitte am Einfeldträger“

Ein Lastfall mit großer baupraktischer Relevanz ist die Belastung des Trägers mit einer Einzellast in Feldmitte. In diesem Fall ermöglichen die Symmetriebedingungen eine Vereinfachung des Systems gemäß Bild 4.5-11. Durch die Betrachtung des Ersatzsystems wird die aufgrund der Unstetigkeitsstelle notwendige bereichsweise Integration vereinfacht. Die am „halben“ Träger gewonnenen Ergebnisse können auf den ganzen Träger bereichsweise übertragen werden.

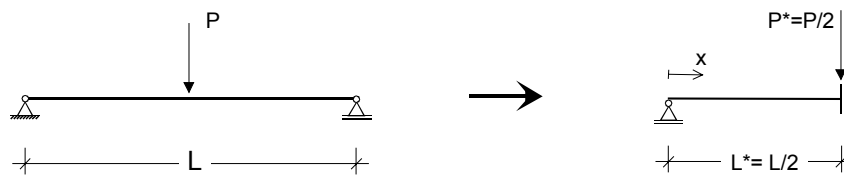


Bild 4.5-11: Ersatzsystem für die Herleitung der Beziehungen im den Lastfall „Einzellast in Feldmitte“

Die Randbedingungen ergeben sich analog zu den vorangegangenen Abschnitten aus der Lagerung des vereinfachten Systems.

$$w_Q(0) = w_M(0) = w(0) = 0 \quad \text{Gl. 4-123}$$

$$w_M''(0) = w''(0) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-124}$$

Die Einspannung am Trägerende verhindert die Verdrehung beider Ebenen, da hier die Biegelinie einerseits eine horizontale Tangente haben muss (betrifft Ebene A) und andererseits keine gegenseitige Verschiebung der Teilquerschnitte des realen Querschnitts möglich ist (betrifft Ebene B).

$$w_M'(\ell^*) = w'(\ell^*) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-125}$$

Aufgrund der Behinderung der Relativverschiebung sind an der Einspannstelle der Schubfluss und somit auch die Querkraft Q^B gleich Null. Somit muss die Ebene A an dieser Stelle die Komplette Querkraft aufnehmen.

$$w_M'''(\ell^*) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-126}$$

$$w_M'''(\ell^*) = \frac{-P^*}{B^A}; \quad \text{Gl. 4-127}$$

Am halben System hat die Koppelkraft keinen symmetrischen Verlauf. Alternativ kann die Zusatzbedingung bezüglich der Koppelkraft aus dem Zusammenhang zwischen Verdrehung, Schubverformung und Koppelkraft am frei verdrehbaren Ende gewonnen werden. Da Ebene A keine Schubverformung aufweist, gilt allgemein:

$$w_A''(x) = w''(x); \quad \text{Gl. 4-128}$$

Daraus folgt für das frei drehbar gelagerte Ende ($x=0$):

$$w''(0) = w_A''(0) = 0; \quad \text{Gl. 4-129}$$

Mit diesen Bedingungen leiten sich für die Zustandsgrößen von Ebene B folgende Aussagen ab:

$$w_Q''(0) = w''(0) - w_M''(0) = 0; \quad \text{Gl. 4-130}$$

$$\Rightarrow (Q^B)'(0) = 0; \quad \text{Gl. 4-131}$$

$$\Rightarrow p_k(0) = 0; \quad \text{Gl. 4-132}$$

Am frei drehbar gelagerten Ende wird die veränderliche Linienlast $p_k(x)$ folglich zu Null, wenn an dieser Stelle keine externen Biegemomente auf das System einwirken. Unter Vorgabe identischer Biegelinien ergeben sich wiederum die noch unbekannten Konstanten.

$$P_1 = -P_2 = -\frac{P^* \cdot B^B \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} L^*}}{(e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)}; \quad \text{Gl. 4-133}$$

$$Q_0^A = \frac{P^* \cdot (2 \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} L^*} + B^A \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1))}{(e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)}; \quad \text{Gl. 4-134}$$

$$Q_0^B = \frac{P^* \cdot B^B \cdot (e^{-\sqrt{\alpha} L^*} - 1)^2}{(e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)}; \quad \text{Gl. 4-135}$$

$$\varphi_0^A = \frac{P^*}{2 \cdot S \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &L^{*2} \cdot S \cdot B^A + 2 \cdot B^{B2} \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) - 4 \cdot B^{B2} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} L^*} + \\ &+ L^{*2} \cdot S \cdot (B^B + (B^B + B^A) \cdot e^{-2\sqrt{\alpha} L^*}) \end{aligned} \right\}; \quad \text{Gl. 4-136}$$

$$\varphi_0^B = \frac{-P^*}{2 \cdot S \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &-L^{*2} \cdot S \cdot B^A \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) + \\ &-L^{*2} \cdot S \cdot B^B \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) + \\ &+ 2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) + \\ &-4 \cdot B^A \cdot B^B \cdot e^{-\sqrt{\alpha} L^*} \end{aligned} \right\}; \quad \text{Gl. 4-137}$$

$$M^A(L^*) = \frac{P^* \cdot B^A \cdot [-\sqrt{\alpha} \cdot B^{B2} \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} - 1) + (L^* \cdot S \cdot B^A + B^B \cdot L \cdot S) \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1)]}{S \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha} L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)^2}; \quad \text{Gl. 4-138}$$

$$M^B(L^*) = P^* \cdot \left\{ L^* - \frac{B^A \cdot \left[-\sqrt{\alpha} \cdot B^{B^2} \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha}L^*} - 1) + (L^* \cdot S \cdot B^A + B^B \cdot L \cdot S) \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha}L^*} + 1) \right]}{S \cdot (e^{-2\sqrt{\alpha}L^*} + 1) \cdot (B^A + B^B)^2} \right\}; \quad \text{Gl. 4-139}$$

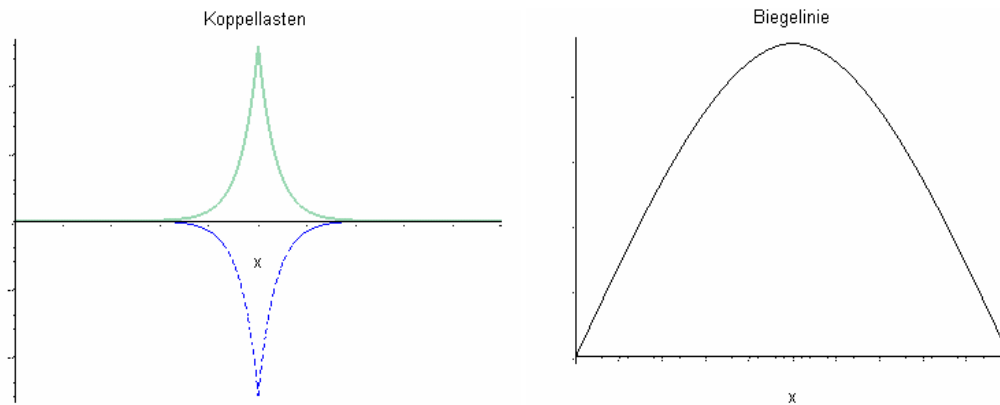


Bild 4.5-12: Lastfall „Einzellast in Feldmitte“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie (jeweils über die gesamte Trägerlänge)

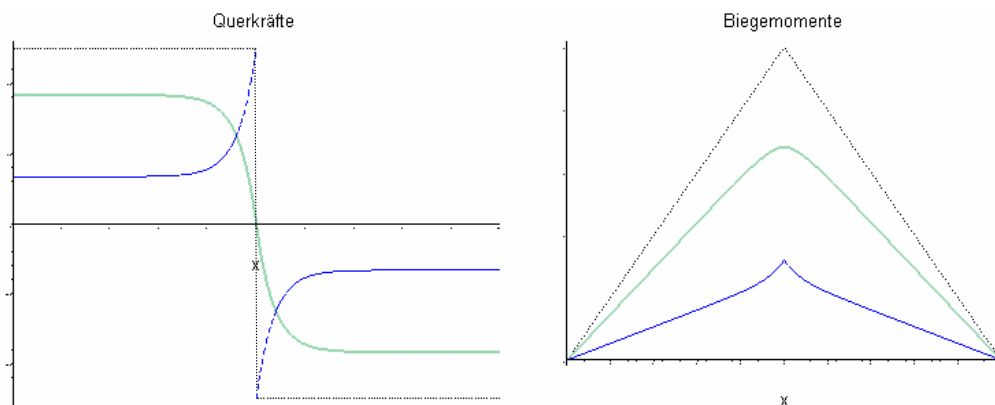


Bild 4.5-13: Lastfall „Einzellast in Feldmitte“. Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet, jeweils über die gesamte Trägerlänge)

4.5.6 Der Lastfall „Gleichlast am Kragträger“

Ergänzend werden auch die wichtigsten Beziehungen für Kragträger abgeleitet. Zunächst soll eine konstante Streckenlast vom Betrag p_0 auf den Träger einwirken. Durch die Einspannung an der Stelle $x=0$ werden sämtliche Verschiebungen und Verdrehungen der Teilquerschnitte an dieser Stelle unterbunden. Deshalb existiert an dieser Stelle auch kein Schubfluss. Damit sind ergänzend zu der Forderung nach einer identischen Biegelinie folgende Randbedingungen vorgegeben:

$$w_A(0) = w_Q(0) = w_M(0) = w'(0) = w'_M(0) = w''_M(0) = 0 \quad \text{Gl. 4-140}$$

Am freien Ende des Kragträgers gilt analog zu Abschnitt 4.5.3 für die zweiten Ableitungen der Biegelinie:

$$w''(\ell) = w''_M(\ell) = 0 \quad \text{Gl. 4-141}$$

Da an dieser Stelle die externe Querkraft gleich Null werden muss, muss die Summe der ideellen Querkräfte auch Null ergeben. Für die Koppelkraft gelten die Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes analog.

$$Q^A(\ell) + Q^B(\ell) = 0 \quad \text{Gl. 4-142}$$

$$p_k(\ell) = 0 ; \quad \text{Gl. 4-143}$$

Die Koppelkraft ist gemäß Gl. 4-55 anzusetzen. Damit lautet die Lösung für die Konstanten:

$$P1 = - \frac{p_0 \cdot \left(L \cdot S \cdot (B^A + B^B) + B^A \cdot B^B \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \right)}{(B^A + B^B) \cdot \sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} ; \quad \text{Gl. 4-144}$$

$$P2 = \frac{p_0 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \cdot \left(L \cdot S \cdot (B^A + B^B) \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} - \sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot B^B \right)}{\left((B^A + B^B) \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) \right) \cdot \sqrt{\alpha} \cdot B^A} ; \quad \text{Gl. 4-145}$$

$$Q_0^A = p_0 \cdot L ; \quad \text{Gl. 4-146}$$

$$Q_0^B = 0 ; \quad \text{Gl. 4-147}$$

$$M_0^A = - \frac{p_0}{2 \cdot (B^A + B^B)^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot B^A \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ -2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot L \cdot S \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} - 1) + \\ + B^A \cdot B^B \cdot L^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ -2 \cdot B^{B^2} \cdot L \cdot S \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} - 1) + \\ + B^{A^2} \cdot L^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ + 4 \cdot B^A \cdot B^{B^2} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \end{array} \right\} ; \quad \text{Gl. 4-148}$$

$$M_0^B = - \frac{B^B \cdot p_0}{2 \cdot (B^A + B^B)^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot B^A \cdot B^B \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ + 2 \cdot B^A \cdot L \cdot S \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} - 1) + \\ + B^A \cdot L^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ + B^B \cdot L^2 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1) + \\ + 2 \cdot B^B \cdot L \cdot S \cdot (e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} - 1) + \\ - 4 \cdot B^A \cdot B^B \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} \end{array} \right\} ; \quad \text{Gl. 4-149}$$

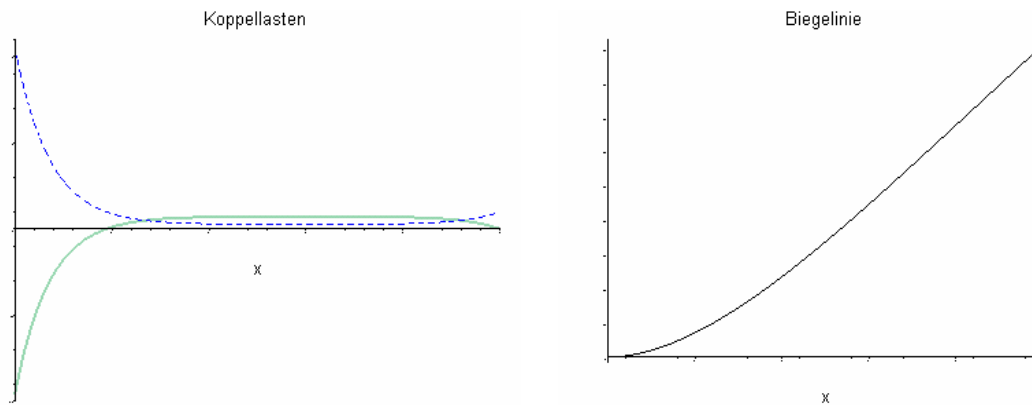


Bild 4.5-14: Lastfall „Gleichlast am Kragträger“. links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

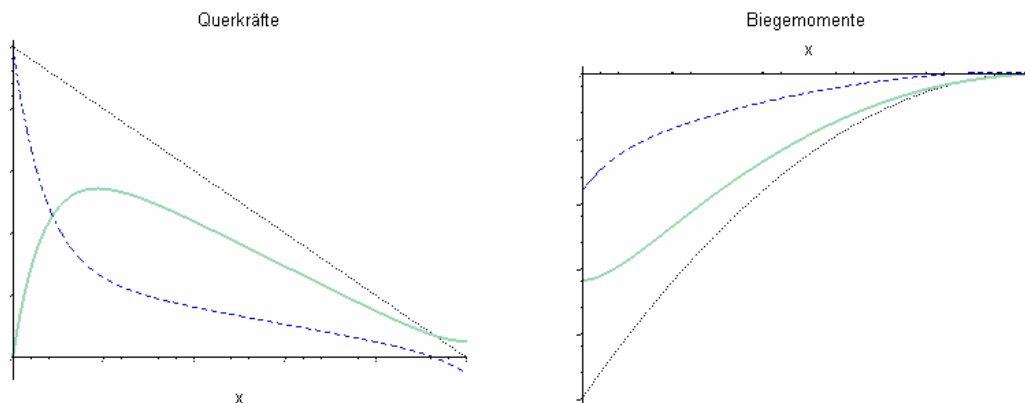


Bild 4.5-15: Lastfall „Gleichlast am Kragträger“. Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)

4.5.7 Der Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“

Wirkt auf einen Kragarm eine Einzellast vom Betrag P am Kragarmende, so lautet die Randbedingung am Kragarmende:

$$Q^A(\ell) + Q^B(\ell) = P \quad \text{Gl. 4-150}$$

Die restlichen Randbedingungen entsprechen denen des vorangegangenen Abschnittes. Die Koppellkraft ist nach Gl. 4-52 anzusetzen.

$$M_0^A = \frac{-P \cdot \left(B^B \cdot \left(1 - e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} \right) + L \cdot \sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot \left(1 + e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} \right) \right)}{\sqrt{\alpha} \cdot (B^A + B^B) \cdot \left(e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right)}; \quad \text{Gl. 4-151}$$

$$M_0^B = \frac{-P \cdot B^B \cdot \left(-1 + e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} + L \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \left(1 + e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} \right) \right)}{\sqrt{\alpha} \cdot (B^A + B^B) \cdot \left(e^{-2\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right)}; \quad \text{Gl. 4-152}$$

$$Q^A(L) = \frac{P \cdot \left(2 \cdot S \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} - S \cdot \left(1 + e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} \right) + \alpha \cdot B^A \cdot \left(1 + e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} \right) \right)}{B^A \cdot \alpha \cdot \left(1 + e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} \right)}; \quad \text{Gl. 4-153}$$

$$Q^B(L) = \frac{-P \cdot S \cdot \left(2 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot L} - \left(1 + e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} \right) \right)}{B^A \cdot \alpha \cdot \left(1 + e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} \right)}; \quad \text{Gl. 4-154}$$

$$P1 = \frac{P \cdot S}{\sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right)}; \quad \text{Gl. 4-155}$$

$$P2 = \frac{P \cdot S \cdot e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L}}{\sqrt{\alpha} \cdot B^A \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right)}; \quad \text{Gl. 4-156}$$

$$w^A(L) = w(L) = \frac{P}{3 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right) \cdot \left(B^A + B^B \right)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &B^A \cdot L^3 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right) - \\ &+ B^B \cdot L^3 \cdot S \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right) + \\ &+ 3 \cdot B^{B^2} \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} - 1 \right) + \\ &+ 3 \cdot B^{B^2} \cdot L \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \left(e^{-2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot L} + 1 \right) \end{aligned} \right\}; \quad \text{Gl. 4-157}$$

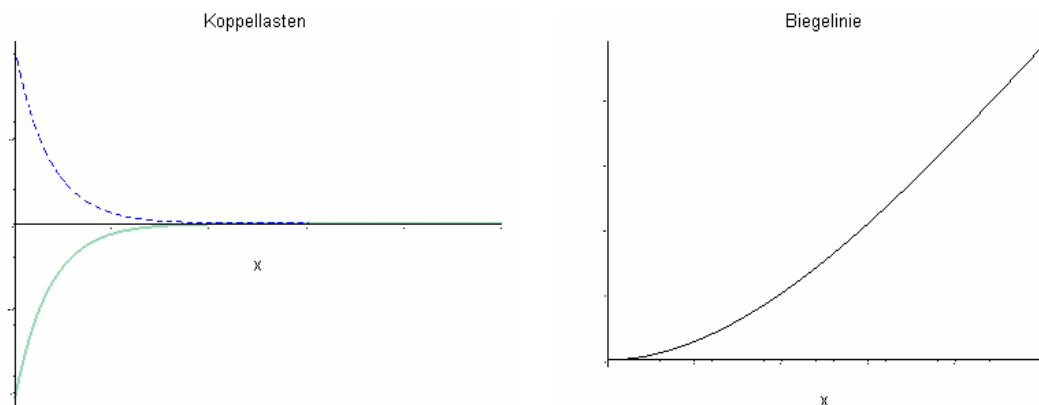


Bild 4.5-16: Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“: Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie

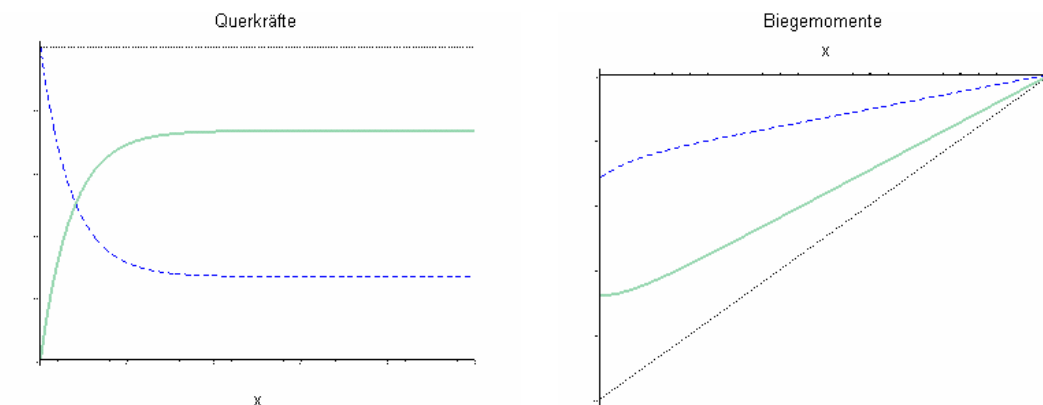


Bild 4.5-17: Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)

4.6 Berechnungen unter Berücksichtigung der Theorie 2. Ordnung

4.6.1 Vorbemerkung

Je nach Belastung werden in vielen räumlichen Tragstrukturen Normalkräfte geweckt. Ist dies der Fall, sind mitunter Aspekte nach Theorie zweiter Ordnung maßgebend für die Bemessung. Will man die Traglast solcher Systeme mithilfe der Schubanalogie bestimmen, ist darauf zu achten, dass kein lokales Systemversagen des ideellen Rechensystems vor Erreichen der kritischen Last des realen Systems eintritt. Deshalb ist eine zutreffende Erfassung der Effekte nach Th 2 mit dem „klassischen“ Zwei-Ebenen-Modell der Schubanalogie schwierig. Die Schubsteifigkeit und die Abstände der Knotenkopplungen wirken limitierend auf die vom ideellen System aufnehmbare Normalkraft. Dabei wird die kritische Last der Ebene A durch die Biegesteifigkeit B^A und den Abstand der von der Kopplung gehaltenen Knoten bestimmt („Biegeknicken“). Bei der Ebene B wirkt zusätzlich zum Biegeknicken die Schubsteifigkeit S limitierend („Biegeschubknicken“). Für die kritische Last P_{ki}^B des Biegeschubstabes gilt in Anlehnung an Timoshenko [94]:

$$P_{ki}^B = \frac{1}{\frac{1}{S} + \frac{1}{P_{ki, \text{Biegung}}}} ; \quad \text{Gl. 4-158}$$

Anschaulich lässt sich dieses Verhalten mit dem einer Gitterstütze vergleichen (siehe auch Abschnitt 4.6.3.1). Die genannte Beziehung findet sich z.B. auch in der Traggerüstnorm [N6].

Deshalb hat eine ungünstige Aufteilung der Dehnsteifigkeit auf die beiden ideellen Ebenen A und B ein vorzeitiges lokales Versagen des ideellen Systems zur Folge. Eine adäquate Aufteilung der Dehnsteifigkeiten in Kombination mit einem passenden Koppelraster ist zwar zielführend, aber aufwendig. Als Alternative zu solch einer Aufteilung wird in den folgenden Abschnitten ein um eine dritte Ebene C erweitertes Rechenmodell, das „kombinierte Fachwerkmodell“, vorgestellt.

Neben der theoretischen Ableitung und Darstellung der Beziehungen ist die Überprüfung des Drei-Ebenen-Modells ein wesentlicher Bestandteil dieses Kapitels. Es wurden auch einfache Testrechnungen zur Überprüfung der Grundfunktionen der verwendeten Software durchgeführt. Diese sind auszugsweise dokumentiert, da sie elementar für die Suche nach eventuellen Fehlerquellen sind und somit eine Hilfestellung bei der Überprüfung der verwendeten Statiksoftware bieten.

4.6.2 Das kombinierte Fachwerkmodell (Dreiebenenmodell)

4.6.2.1 Allgemeines

Beim „kombinierten Fachwerkmodell“ wird der ideelle Querschnitt zum Zweck der Funktionstrennung durch eine reine Normalkraftkomponente ergänzt. Das bedeutet, an die Ebenen A und B, welche Biegung und Schub erfassen, wird zusätzlich die Ebene C gekoppelt. Ihre Aufgabe ist ausschließlich die Aufnahme von Normalkräften, welche aus der Einleitung von äußeren Druck- und Zugbeanspruchungen resultieren. Im Stabsystem lässt sich das mittels einer Fachwerkstabbette, die ihre Gelenke bei den Koppelstellen hat, realisieren. Dies ist in Bild 4.6-1 am Beispiel eines Knickstabes verdeutlicht. Die Dehnsteifigkeit der Stäbe von Ebene A und B muss dabei so gering gewählt werden, dass diese möglichst keine Normalkraft aufnehmen können. Es ist trotz Kopplung der Knotenverschiebungen aller Richtungen sinnvoll, die Lasten in Ebene C einzuleiten.

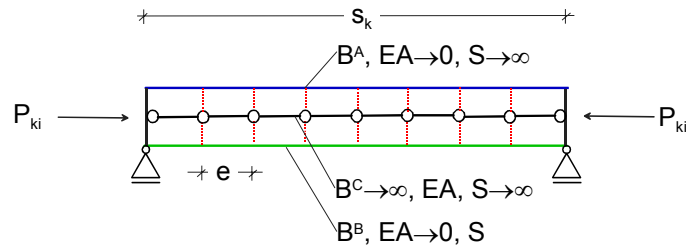


Bild 4.6-1: Dreiebenenmodell am Beispiel eines Knickstabes (Euler-Fall II)

Dieses Modell bildet den Stabilitätsfall Stabknicken als Durchschlagproblem der Fachwerkstabbkette ab. Die Qualität dieser Näherung wird maßgeblich von dem Unterteilungsverhältnis s_k/e , sowie den Steifigkeitsverhältnissen beeinflusst.

Mit Hilfe eines Vergleiches zu Gerüstkonstruktionen lässt sich das Tragverhalten des Ersatzsystems anschaulich beschreiben. In Bild 4.6-2 wird anhand eines Knickstabes (Eulerfall 2) die Analogie zwischen nachgiebig verbundenem Stab, Gerüstkonstruktion und Schubanalogie aufgezeigt.

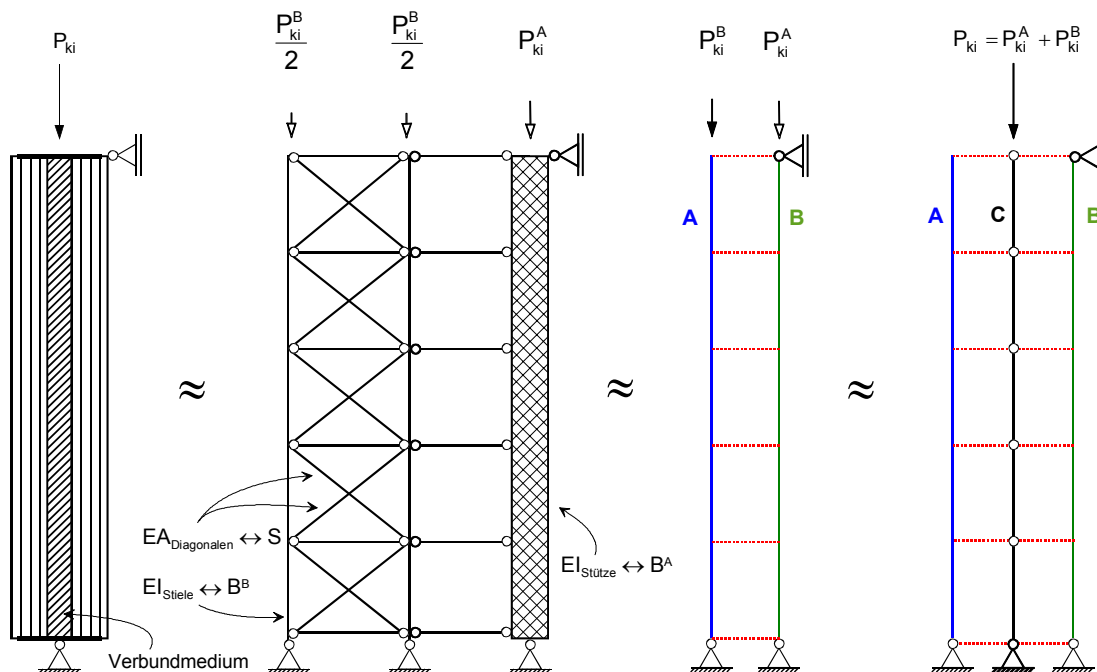


Bild 4.6-2: Analogie: Stütze mit nachgiebig verbundenem Querschnitt, Fachwerkrahmenkonstruktion und Schubanalogie

Links ist eine Stütze mit exemplarischem, zweiteiligem Querschnitt und der zugehörigen Knicklast P_{ki} zu sehen. Rechts davon befindet sich eine Gerüstkonstruktion, welche von einem Biegeträger gestützt wird. Die Diagonalen des Gerüses bilden die Schubsteifigkeit des Biegeschubstabes (Ebene B) ab, der Biegestab entspricht der Ebene A. Aus der Addition beider Anteile bestimmt sich die Knicklast für den nachgiebig verbundenen Stab:

$$P_{ki} = P_{ki}^A + \frac{1}{\frac{1}{P_{ki, \text{Biegung}}^B} + \frac{1}{S}} \quad \text{Gl. 4-159}$$

Für den Eulerfall 2 beträgt die Knicklast demnach:

$$P_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot B^A}{\ell^2} + \frac{1}{\frac{\ell^2}{\pi^2 \cdot B^B} + \frac{1}{S}} \quad \text{Gl. 4-160}$$

Anmerkung: Die Umformung der Gleichung (4-160) führt zu den bereits von Möhler [59] abgeleiteten Beziehungen für die in der Holzbaunorm [N2] aufgeführten „Querschnittstypen mit kontinuierlicher Verbindung“.

4.6.2.2 Vergleichs- und Testrechnungen

Testrechnung Eulerstab

Als Testbeispiel wird die Traglast des in Bild 4.6-3 gezeigten zweiteiligen Druckstabs, System Eulerfall 2 mit dem Drei-Ebenen-Modell berechnet. Der Stab hat einen Rechteckquerschnitt mit den Abmessungen $b \times h = 20 \times 20 \text{ cm}^2$, wobei dieser mittig von einer 2 cm dicken Schubschicht ($G_{\text{Mitte}} = 3,176 \text{ MPa}$) unterbrochen ist. Mit Ausnahme der Schubschicht sei der Stab schubsteif, der E-Modul wird zu $E = 10000 \text{ MPa}$ angenommen, die Stablänge beträgt $\ell = 5 \text{ m}$.

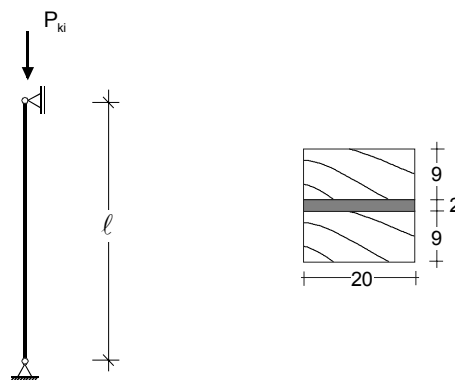


Bild 4.6-3: Links: System Testbeispiel; rechts: zugehöriger Stabquerschnitt.

Es bestimmen sich folgende Steifigkeiten:

$$B^A = 10000 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,09^3}{12} \right) = 0,243 \text{ MNm}^2 ; \quad \text{Gl. 4-161}$$

$$B^B = 10000 \cdot 2 \cdot 0,055^2 \cdot 0,2 \cdot 0,090 = 1,089 \text{ MNm}^2 ; \quad \text{Gl. 4-162}$$

$$S = \frac{0,11^2 \cdot 0,2 \cdot 3,174}{0,02} = 0,384 \text{ MN} ; \quad \text{Gl. 4-163}$$

Damit gilt für die Knicklast der Stütze gemäß der in Kapitel 4.6.1 genannten Zusammenhänge:

$$P_{ki}^A = \frac{\pi^2 \cdot 0,243}{5^2} = 0,0959 \text{ MN} = 95,9 \text{ kN} ; \quad \text{Gl. 4-164}$$

$$P_{ki, \text{Biegung}}^B = \frac{\pi^2 \cdot 1,089}{5^2} = 0,4299 \text{ MN} = 429,9 \text{ kN} ; \quad \text{Gl. 4-165}$$

$$P_{ki, \text{Schub}}^B = S = 0,384 \text{ MN} = 384 \text{ kN} ; \quad \text{Gl. 4-166}$$

$$P_{ki} = \frac{1}{\frac{1}{384} + \frac{1}{429,92}} + 95,9 = 298,73 \text{ kN} ; \quad \text{Gl. 4-167}$$

Die Testrechnungen erfolgten mit dem Programmpaket der Firma „SOFISTIK“ in Form von Traglastiterationen. Dabei wird in einem iterativen Prozess die Laststufe ermittelt, bei der das System instabil wird. Die so ermittelten Traglasten sind abhängig von der gewählten Stabunterteilung, zeigen aber bereits bei einer Unterteilung der Stütze in vier Teilstäbe ($n=4$, $e=1,25\text{m}$) eine gute Übereinstimmung mit dem analytisch ermittelten Wert. In Bild 4.6-4 sind die Ergebnisse in tabellarischer und grafischer Form dem analytisch bestimmten Wert gegenüber gestellt. Weiterführende Untersuchungen zum Einfluss der Unterteilung auf die Qualität der Näherung sind Thema des Kapitels 4.6.3.

n	e	L:e	$P_{ki}^{\text{numerisch}}$	$F = P_{ki}^{\text{num.}} / P_{ki}^{\text{analyt.}}$
2	2,50	1: 2	338,01	1,1315
3	1,67	1: 3	316,39	1,0591
4	1,25	1: 4	308,66	1,0332
5	1,00	1: 5	305,08	1,0213
7	0,71	1: 7	301,98	1,0109
10	0,50	1: 10	300,33	1,0054
20	0,25	1: 20	299,15	1,0014
40	0,13	1: 40	298,85	1,0004
80	0,06	1: 80	298,78	1,0002
90	0,06	1: 90	298,78	1,0002
95	0,05	1: 95	298,77	1,0001

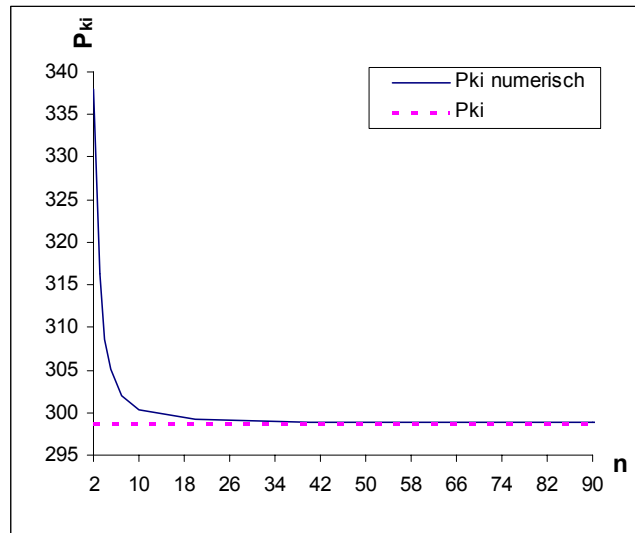


Bild 4.6-4: Ergebnisse der Traglastiteration in Abhängigkeit von der gewählten Unterteilung

Zum Vergleich erfolgten Berechnungen an Verbundknickstützen, die mit Scheibenelementen modelliert waren (Finite-Element-Berechnung, Eingabedatei siehe Anhang B). In diesem Fall konvergiert die Traglastiteration der zugehörigen FE - Berechnung bei einer Last von $P_{ki}=298,12 \text{ kN}$. Wie man sieht, stimmt das Ergebnis nach dem Drei-Ebenen-Modell bei ausreichender Unterteilung sehr gut mit den Vergleichswerten überein.

Vergleichsrechnung einhüftiger Rahmen

Es wurde das Verhalten eines einhüftigen Rahmens (Bild 4.6-5) betrachtet. Sowohl der Riegel (Länge $\ell_h=7\text{m}$) als auch der Stiel ($\ell=5\text{m}$) hatten dabei den bereits aus dem vorangegangenen Beispiel bekannten zweiteiligen Querschnittsaufbau. Die Eckkonstruktion zur Verbindung von Riegel und Stiel wurde als „steifes“ Element angenommen.

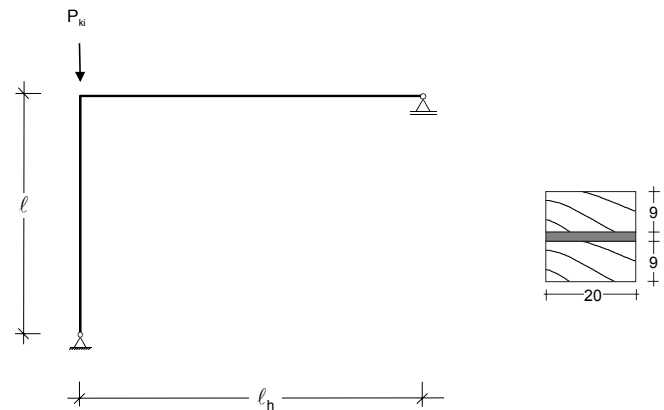


Bild 4.6-5: Statisches System und Querschnitt für die Vergleichsrechnung „einhüftiger Rahmen“

Bezüglich der Generierung des ideellen Systems wurden zwei Varianten untersucht. Bei Variante V1 sind die ideellen Ebenen vertikal versetzt angeordnet. Das erfordert bezüglich der Ausbildung des Eckdetails besondere Maßnahmen. Um das Eckdetail mit dem Dreiebenenmodell abbilden zu können, wurden dehn- und biegesteife Hilfsstäbe eingeführt. Eine doppelte Kopplung des Eckknotens der Gelenkstabkette ist zu vermeiden, um eine Sperrung der Knotenverdrehung aufgrund der Kinematik zu umgehen. Das Detail der Eckkonstruktion ist im linken Teil von Bild 4.6-6 verdeutlicht. Angemerkt sei, dass für diese Abbildung aus darstellungstechnischen Gründen eine große Spreizung d gewählt wurde. Rechentechnisch ist eine kleine Spreizung d sinnvoll. Die Realisierung des Rechensystems mit Hilfe eines vertikalen Versatzes der Ebenen kann an räumlichen Strukturen notwendig sein, wenn die Möglichkeiten der Kopplung eingeschränkt sind. Eleganter ist ein Vorgehen nach Variante V2, bei der die ideellen Ebenen komplett nebeneinander zu liegen kommen. In diesem Fall sind keine besonderen Maßnahmen im Hinblick auf das Eckdetail notwendig (vgl. Bild 4.6-6, rechts). Im Falle komplexer, räumlicher Tragstrukturen ist es denkbar, mehrere Systeme komplett nebeneinander zu positionieren und die Kopplung einander entsprechender Knoten über adäquate Referenzbedingungen (Kopplung der Verschiebung in alle Richtungen) zu definieren. Falls es die verwendete Software zulässt, kann auch eine Definition der drei Ebenen mit identischen Koordinaten (jedoch bezüglich der Verdrehung unabhängiger Knoten) zielführend sein.

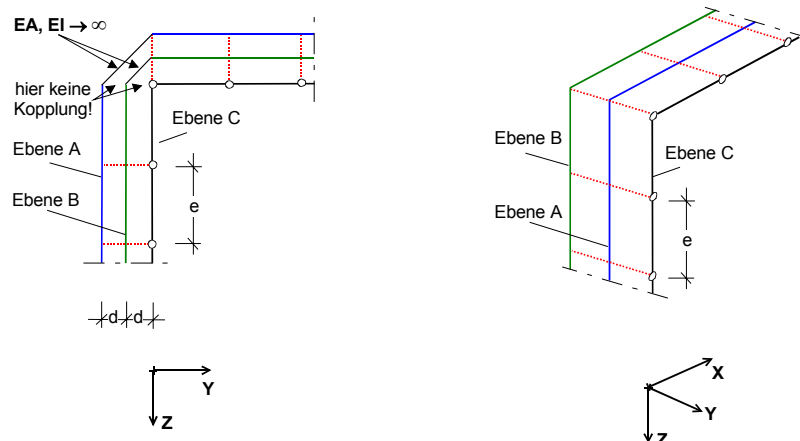


Bild 4.6-6: Detail „Erfassung der Eckkonstruktion im Drei-Ebenen-Modell“, links Variante V1, rechts Variante V2

Die Ergebnisse der Traglastiterationen für die Scheibenrechnung und die Schubanalogie stimmen für beide Varianten in Bezug auf die kritische Last sehr gut überein (Abweichung ca. 0,3%, bei kleiner Spreizung d für Variante V1). Beim Vergleich der Verformungen zeigt sich, dass die Scheibenrechnung im mittleren Lastbereich größere Horizontalverschiebungen aufweist, während die vertikale Verschiebung des Stützenkopfes in beiden Fällen nahezu identisch ist. Die Abweichung ist auf Imperfektionen, welche vor allem durch die Generierung des Systems im Auflagerbereich hervorgerufen werden, zurückzuführen. Aus dem in Bild 4.6-7 gezeigten Detail geht die exzentrische Krafteinleitung am Fußpunkt der Stütze hervor. Darüber hinaus ist in Bild 4.6-7 die Verschiebungsfigur der Scheibenrechnung bei der Laststufe $P=54$ kN gezeigt. Die Last-Verschiebungskurven sind in Bild 4.6-8 gegenübergestellt.

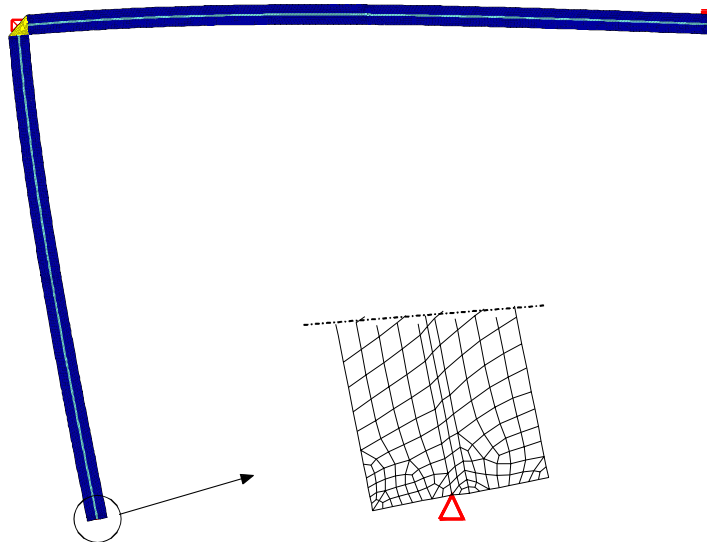


Bild 4.6-7: Scheibenrechnung, verschobene Struktur (Auflagerdetail „Stützenfußpunkt“ vergrößert) unter $P=54$ kN, Darstellung überhöht.

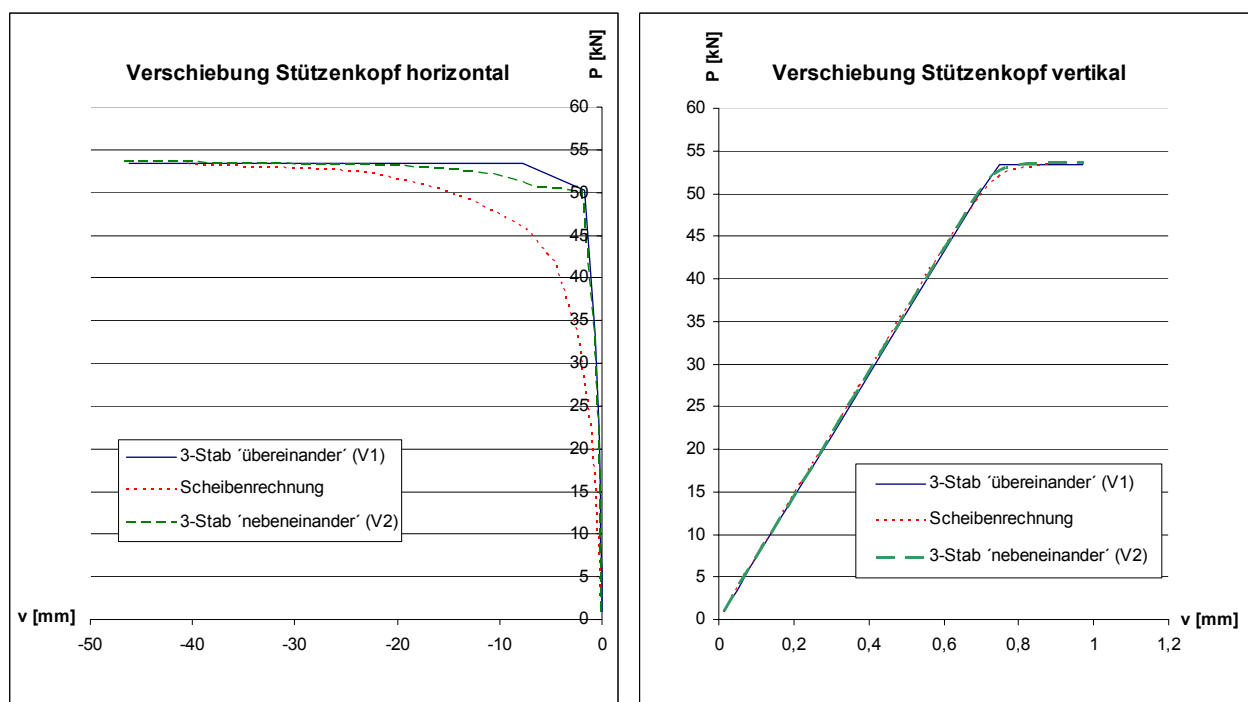


Bild 4.6-8: Vergleich der Last Verschiebungskurven aus Scheibenrechnung und nach Schubanalogie (Varianten V1 und V2) für den einhäufigen Rahmen

4.6.3 Zur Genauigkeit der Lösung des Mehrstabsystems

4.6.3.1 Analytische Ableitungen und Abschätzungen

Eine wichtige Einflussgröße für die bei numerischen Berechnungen gemäß der Schubanalogie erzielbare Genauigkeit ist die bei der Generierung gewählte Unterteilung. Diesbezüglich vermittelt die im vorangegangenen Abschnitt zur Testrechnung des Eulerstabes mit Verbundquerschnitt durchgeführte Parameterstudie einen ersten Eindruck. Grundsätzlich sind zur Beurteilung und Interpretation der Ergebnisse von Berechnungen nach Theorie zweiter Ordnung mit der Schubanalogie möglichst allgemeingültige Aussagen zum Thema der Unterteilung erforderlich. Zunächst wird die Größenordnung der möglichen Abweichung eingegrenzt.

Die größtmögliche sinnvolle Unterteilung des Stabsystems ist meist durch die Halbierung der Knicklänge der zu untersuchenden Stäbe gegeben. Die Knicklänge entspricht dem Abstand benachbarter Wendepunkte der Biegelinie bei Erreichen der Verzweigungslast. Für diesen Fall werden Grenzwerte für die Abweichung der Näherung von der exakten Lösung für die Knicklast abgeleitet.

Bei einmaliger Teilung der Knicklänge ergibt sich gemäß dem Drei-Ebenen-Modell das ideale Rechensystem für den Stab, so wie es links in Bild 4.6-9 dargestellt ist. Mittels Substitution der Ebenen A und B durch Ersatzfedern lässt sich das rechts davon gezeigte, zugehörige Ersatzsystem erzeugen. In diesem wird die Stützung der Fachwerkkette durch den Biegestab A und den Biegeschubstab B durch entsprechende Ersatzfedern erfasst.

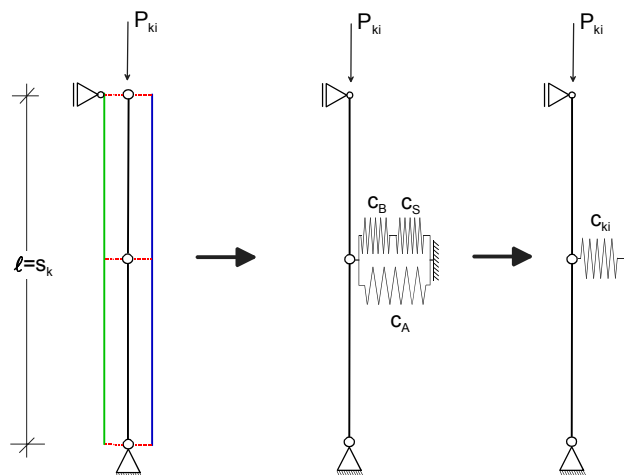


Bild 4.6-9: links: Ideelles System für den Knickstab Eulerfall 2 mit einmal unterteilter Knicklänge; rechts: Das zugehörige Ersatzsystem

Die Steifigkeiten der Ersatzfedern bestimmen sich wie folgt:

Ersatzfeder für den Biegestab A:

$$C^A = \frac{48 \cdot B^A}{\ell^3} \quad \text{Gl. 4-168}$$

Ersatzfeder für den Biegeschubstab:

$$C^{\text{Steiner}} = \frac{48 \cdot B^B}{\ell^3}; \quad C^S = \frac{4 \cdot S}{\ell}; \quad \Rightarrow C^B = \left(\frac{1}{C^A} + \frac{1}{C^S} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\ell^3}{48 \cdot B^B} + \frac{\ell}{4 \cdot S}} \quad \text{Gl. 4-169}$$

Summarische Ersatzfeder für Biegeschubstab und Biegestab:

$$C_{ki} = C^A + C^B = \frac{48 \cdot B^A}{\ell^3} + \frac{1}{\frac{\ell^3}{48 \cdot B^B} + \frac{\ell}{4 \cdot S}} \quad \text{Gl. 4-170}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht leitet sich die kritische Last des einfach unterteilten Stabes bezüglich des Durchschlagproblems ab:

$$P_{ki}^{\text{Näherung}} = C_{ki} \cdot \frac{\ell}{4} = \frac{12 \cdot B^A}{\ell^2} + \frac{1}{\frac{\ell^2}{12 \cdot B^B} + \frac{1}{S}} \quad \text{Gl. 4-171}$$

Als Maß für die Abweichung der Näherung des einfach unterteilten Dreistabsystems zur exakten Lösung für den nachgiebig verbundenen Knickstab wird das Verhältnis aus Näherung und exakter Lösung gebildet. Man erhält eine Funktion in Abhängigkeit von den Steifigkeiten B^A , B^B , S und der Systemlänge ℓ :

$$F(S, B^B, B^A, \ell) = \frac{P_{ki}}{P_{ki}^{\text{Näherung}}} = \frac{\pi^2 \cdot (B^A \cdot \ell^2 \cdot S + B^A \cdot \pi^2 \cdot B^B + B^B \cdot S \cdot \ell^2) \cdot (\ell^2 \cdot S + 12 \cdot B^B)}{12 \cdot (\ell^2 \cdot S + \pi^2 \cdot B^B) \cdot (B^A \cdot \ell^2 \cdot S + 12 \cdot B^A \cdot B^B + B^B \cdot S \cdot \ell^2)} \quad \text{Gl. 4-172}$$

Mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen bestimmt sich die obere Grenze für die Abweichung:

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} F(S, B^B, B^A, \ell) &= \lim_{\ell \rightarrow 0} F(S, B^B, B^A, \ell) = \lim_{S \rightarrow \infty} F(S, B^B, B^A, \ell) = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} F(S, B^B, B^A, \ell) = \lim_{B^A \rightarrow \infty} F(S, B^B, B^A, \ell) = \lim_{B^B \rightarrow 0} F(S, B^B, B^A, \ell) = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad \text{Gl. 4-173}$$

$$\lim_{B^A \rightarrow 0} F(S, B^B, B^A, \ell) = \frac{\pi^2 (\ell^2 \cdot S + 12 \cdot B^B)}{12 \cdot (\ell^2 \cdot S + \pi^2 \cdot B^B)} \geq \frac{\pi^2}{12} \quad \text{Gl. 4-174}$$

$$\lim_{B^B \rightarrow \infty} F(S, B^B, B^A, \ell) = \frac{\pi^2 \cdot B^A + \ell^2 \cdot S}{12 \cdot B^A + \ell^2 \cdot S} \geq \frac{\pi^2}{12} \quad \text{Gl. 4-175}$$

Die mittels der Näherung ermittelte kritische Last ist demnach rechnerisch maximal um Faktor $\frac{12}{\pi^2} \approx 1,216$ größer als die tatsächliche Knicklast des Stabes. Die maximale Abweichung der Näherung beträgt damit 21,6%, auf der unsicheren Seite liegend, bezogen auf die tatsächliche Knicklast. Zur Übersicht wird mit Bild 4.6-10 der Verlauf des relativierten, auf die Knicklast bezogenen Fehlers

$$F_{\text{rel}} = \frac{P_{ki}^{\text{Näherung}}}{P_{ki}^{\text{exakt}}} - 1;$$

in Abhängigkeit von der Systemlänge unter Variation der Schubsteifigkeit S bei exemplarisch vorgegebenen Biegesteifigkeiten (Werte der „Beispielstütze“, $B^A=0,243 \text{ MNm}^2$, $B^B=1,089 \text{ MNm}^2$) gezeigt:

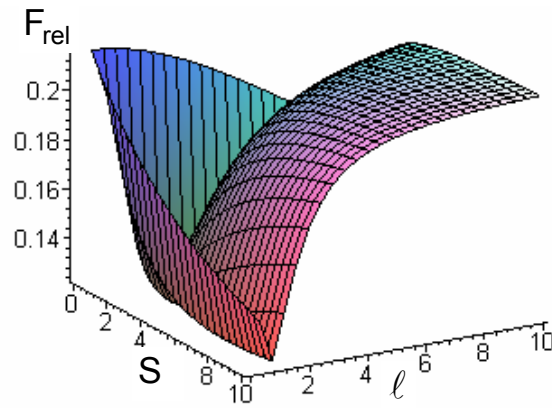


Bild 4.6-10: Verlauf der analytisch ermittelten Abweichung des Dreistabsystems bei einfacher Unterteilung zur exakten Lösung für den nachgiebig verbundenen Knickstab in Abhängigkeit von der Systemlänge ℓ und der Schubsteifigkeit S .

Ein Schnitt durch den Funktionsgraphen für die im vorangegangenen Abschnitt behandelte Beispielstütze an der maßgebenden Stelle ($\ell=5\text{m}$) ist in Bild 4.6-11 zu sehen:

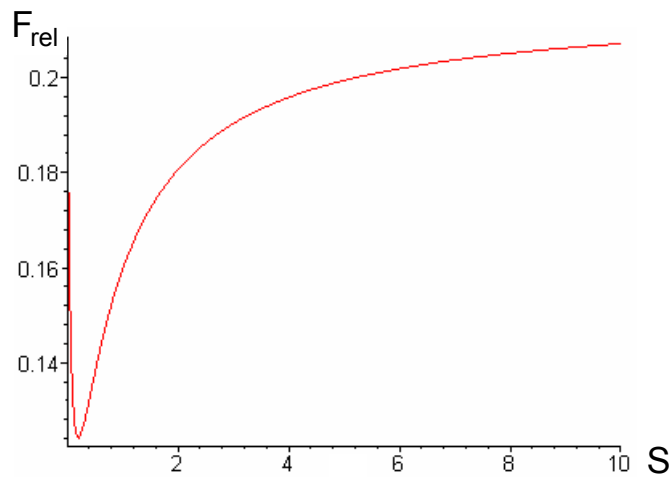


Bild 4.6-11: Schnitt durch den in Bild 4.6-10 dargestellten Funktionsverlauf an der Stelle $\ell=5\text{m}$

Mittels Substitution von Steifigkeitsverhältnissen gemäß Gl. 4-177 und Gl. 4-178 kann die Funktion der Abweichung (Gl. 4-172) mit Gl. 4-176 ausschließlich durch die voneinander abhängigen Größen $\tilde{\alpha}$ [m^{-1}] und β [-] beschrieben werden. Diese Beziehungen sind die Grundlage der Parameterstudien des folgenden Abschnitts.

$$F(\tilde{\alpha}, \beta) = \frac{12 \cdot (\tilde{\alpha} \cdot \beta + \pi^2 \cdot \beta + \pi^2) \cdot (12 + \tilde{\alpha})}{(\pi^2 + \tilde{\alpha}) \cdot \pi^2 (\tilde{\alpha} \cdot \beta + 12 \cdot \beta + 12)} ; \quad \text{Gl. 4-176}$$

$$\text{mit: } \tilde{\alpha} = \alpha \cdot \ell = \frac{(B^A + B^B) \cdot S \cdot \ell}{B^A \cdot B^B} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B^A}{B^B} \quad \text{Gl. 4-177, 4-178}$$

4.6.3.2 Ergänzende numerische Studien zum Einfluss der Unterteilung

Die analytischen Ableitungen des vorherigen Abschnitts für die Fehlerfunktion gelten, wenn das ideale System eine Rasterung vom Betrag der halben Knicklänge aufweist (Anzahl der Teilstäbe $n=2$). Von Interesse ist das Verhalten der Fehlerfunktion bei feineren Rasterungen. Allerdings sind analytische Ableitungen für Rasterungen mit $n>2$ sehr aufwendig. Die Stäbe der Ebenen A und B können dann z. B. nicht durch unabhängige Ersatzfedern abgebildet werden. Deshalb wurden numerische Traglastiterationen bei Variation der Größen $\tilde{\alpha}$, β und n durchgeführt. Auf dieser Basis kann die notwendige Unterteilung bei der Generierung des Rechensystems abgeschätzt werden.

Zunächst wurde anhand von Vergleichsrechnungen getestet, ob bei konstantem $\tilde{\alpha}$, β und n für unterschiedliche Werte der Variablen ℓ (Systemlänge), B^A , B^B (Biegesteifigkeiten) und S (Schubsteifigkeit) Abweichungen bezüglich des Fehlerfaktors auftreten. Tendenziell sind sehr ähnliche Verläufe zu beobachten; die auftretenden Differenzen sind im relevanten Bereich der Steifigkeiten bzw. der Knicklänge gering und werden auf numerische Probleme zurückgeführt. Bei den in Bild 4.6-12 gezeigten Diagrammen ist der Fehlerfaktor

$$F = \frac{P_{ki}^{3\text{-Ebenenmodell}}}{P_{ki}^{\text{exakt}}}$$

für verschiedene Werte von $\tilde{\alpha}$ und β in Abhängigkeit von der Unterteilung angetragen. Dabei sind die Unterteilung n an der Abszisse und der Faktor F an der Ordinate angetragen. Qualitativ verhalten sich die Kurven sehr ähnlich: Sie fallen anfangs stark ab und nähern sich dann asymptotisch der Geraden $F \approx 1$ an. Gut zu erkennen ist, dass für $n \geq 4$ der Fehler selbst im ungünstigen Fall in etwa maximal 5% ($F \leq 1,05$) beträgt. Zu beachten ist, dass der F stets größer 1 ist, und somit auf der „unsicheren Seite“ liegt.

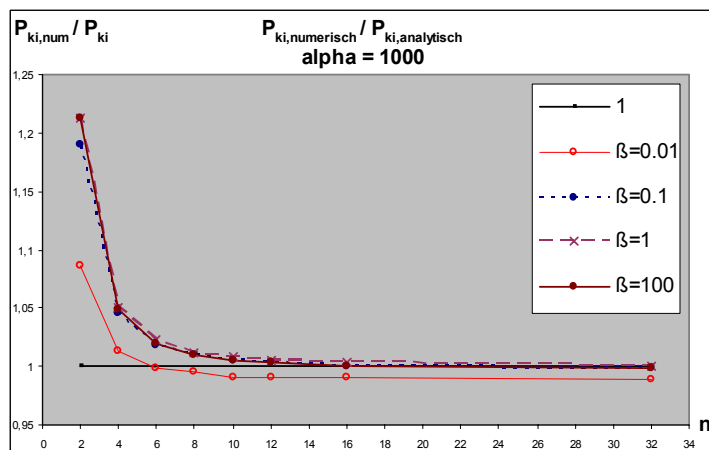
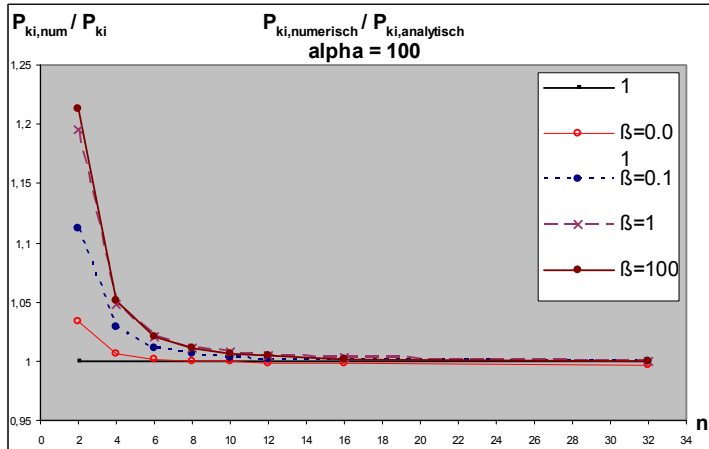
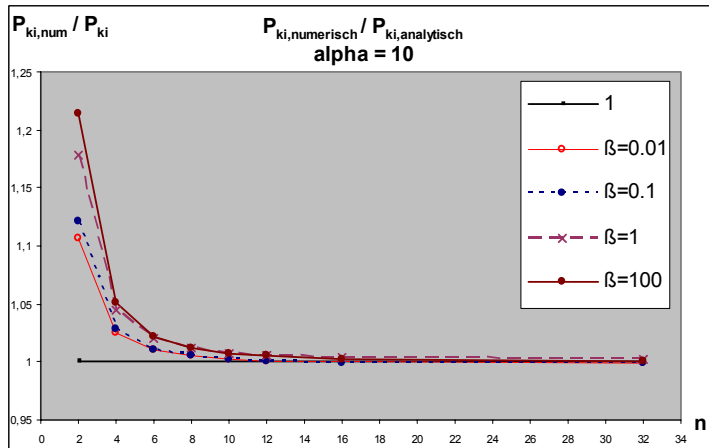
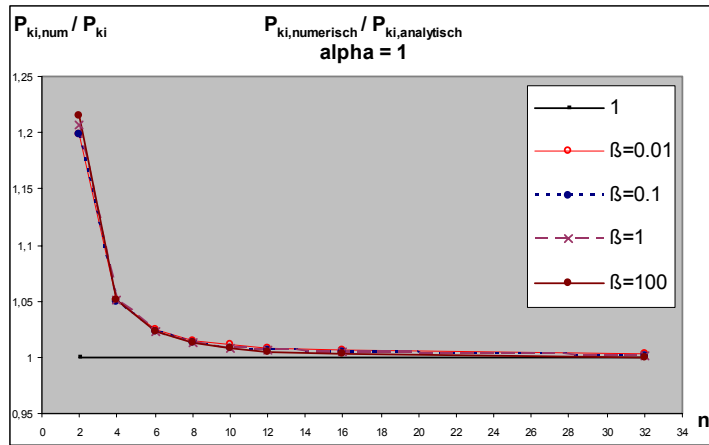


Bild 4.6-12: Diagramme für den Fehlerfaktor in Abhängigkeit von $\tilde{\alpha}$ [m^{-1}], β [-] und n

Bei der Generierung des ideellen Systems genügt demnach eine Unterteilung der Knicklänge in mindestens vier Teilstäbe, um die Traglast für die meisten Anwendungen hinreichend genau erfassen zu können. Im Zweifelsfall sollte die Rasterung anhand der Konvergenz der Ergebnisse bei einer verfeinerten Unterteilung des zu berechnenden Systems überprüft werden.

Anmerkung zu den Diagrammen: Die Diagramme resultieren aus Berechnungen mit dem Programmsystem der Firma „SOFISTIK“. Stichprobenartige Gegenrechnungen mit dem Programm „R-Stab“ der Firma Dlubal lieferten vergleichbare Ergebnisse. Die Abweichung der Kurve für $\alpha=1000$, $\beta=0,01$ im Bereich der feinen Rasterung wird auf die numerischen Abweichungen, wie sie bei Produkten von sehr großen und sehr kleinen Zahlen auftreten, zurückgeführt.

4.6.4 Durchschlagproblematik

4.6.4.1 Theoretische Grundlagen zur Durchschlagproblematik

Bei Flächentragwerken ist das „Durchschlagen“ der Fläche bisweilen ein nicht zu vernachlässigender Aspekt. Auf die Problematik wird kurz am Beispiel einer Stabkonstruktion eingegangen, um im Anschluss das Drei-Ebenen-Modell in Hinblick auf diesen Aspekt zu testen. Für eine ungestützte Konstruktion, wie sie in Bild 4.6-13 gezeigt ist, kann neben dem Durchschlagen, je nach Geometrie- und Steifigkeitsverhältnissen, auch das Knicken der Stäbe maßgebend werden. Während für das Stabknicken die Biegesteifigkeit der Stäbe der entscheidende Parameter ist, ist für das Durchschlagen deren Dehnsteifigkeit maßgebend.

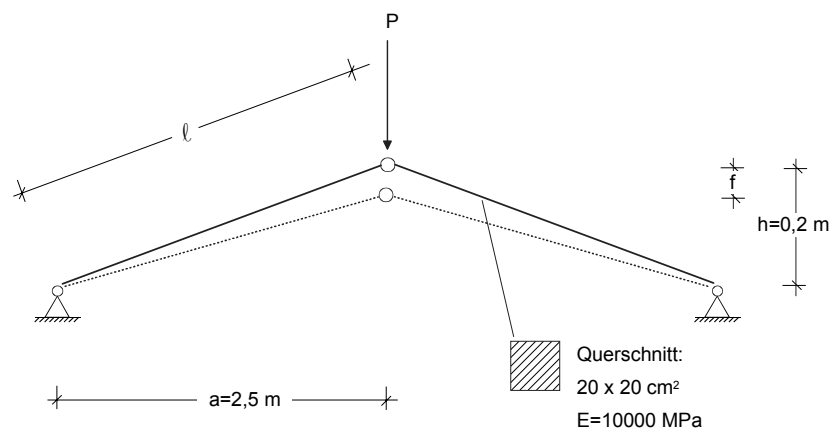


Bild 4.6-13: Durchschlagproblematik: Beispielsystem ungestützte Stabkonstruktion (verschobenes System gestrichelt)

Es gelten folgende Zusammenhänge zwischen Normalkraft N , Belastung P und Durchsenkung f und Stabdehnung ε (vgl. z. B.: Pflüger [66]):

$$\varepsilon(f) = 1 - \frac{\sqrt{\ell^2 + 2 \cdot h \cdot f + f^2}}{\ell} \quad \Rightarrow \quad N(f) = \left(1 - \frac{\sqrt{\ell^2 + 2 \cdot h \cdot f + f^2}}{\ell} \right) \cdot EA \quad \text{Gl. 4-179}$$

$$P(f) = 2 \cdot EA \cdot \frac{h+f}{\ell} \cdot \left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - 2 \cdot h \cdot f + f^2}} - 1 \right) \quad \text{Gl. 4-180}$$

Daraus leitet sich die kritische Last für das Durchschlagen ab:

$$P_{\text{krit}} = 2 \cdot EA \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{\ell} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{Gl. 4-181}$$

Die Stützung eines bezüglich Durchschlagens gefährdeten Systems (z.B. durch eine Feder am Firstknoten) kann für computergestützte Berechnungen vorteilhaft sein. Aus numerischen Gründen kann bereits eine verhältnismäßig kleine Federsteifigkeit ausreichen, um die Konvergenz bei Iterationen zur Suche des Gleichgewichts zu begünstigen. Für das gestützte System gilt ([66]):

$$\varepsilon(f) = 1 - \frac{\sqrt{\ell^2 + 2 \cdot h \cdot f + f^2}}{\ell} \quad \Rightarrow \quad N(f) = \left(1 - \frac{\sqrt{\ell^2 + 2 \cdot h \cdot f + f^2}}{\ell} \right) \cdot EA \quad \text{Gl. 4-182}$$

$$P(f) = 2 \cdot EA \cdot \frac{h+f}{\ell} \cdot \left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - 2 \cdot h \cdot f + f^2}} - 1 \right) + f \cdot C \quad \text{Gl. 4-183}$$

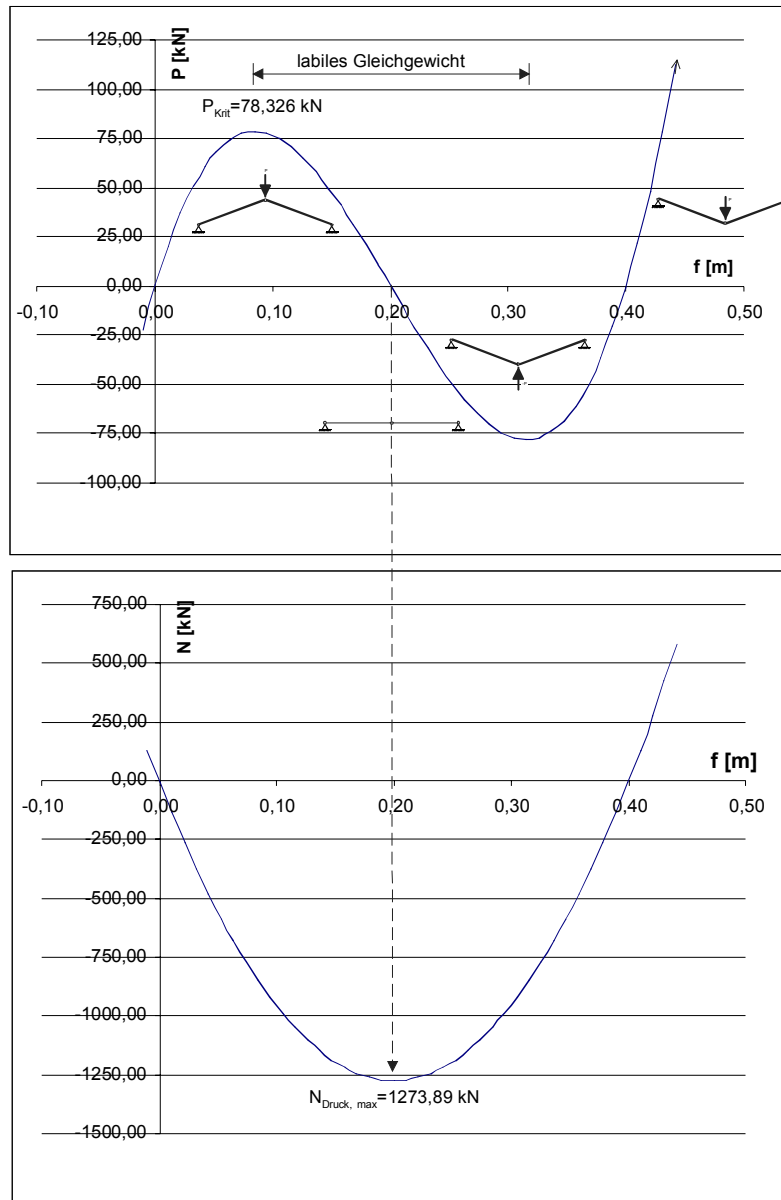
4.6.4.2 Beispiel Sparrenkonstruktion

Allgemeines

Für erste Testrechnungen wurde die in Bild 4.6-13 gezeigte ungestützte Sparrenkonstruktion untersucht. Bei den gewählten Querschnittswerten ($EA=400 \text{ MN}$; $EI=1,333 \text{ MNm}^2$) ist das Stabknicken nicht maßgebend, da die maximal auftretende Normalkraft ($N_{\max}=1274 \text{ kN}$) kleiner als die Knicklast N_{ki} der Teilstäbe (Gl. 4-184) ist. Der Zusammenhang zwischen Last und Durchsenkung für das vorliegende System ist in Bild 4.6-14 sowohl grafisch als auch tabellarisch aufgezeigt.

$$N_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{s_k^2} = 2092,13 \text{ kN} ; \quad \text{Gl. 4-184}$$

Ergänzend ist das Verhalten des Beispielsystems im Falle einer Stützung im Firstknoten durch die in Bild 4.6-15 gezeigte Kurvenschar in Abhängigkeit von der Federkonstante beschrieben.



f [mm]	P [kN]	$-\epsilon$	N [kN]
-10	-21,8210	0,0003	130,34
-5	-10,5234	0,0002	64,38
0	0,0000	0,0000	0,00
5	9,7676	-0,0002	-62,80
10	18,7977	-0,0003	-124,03
15	27,1086	-0,0005	-183,67
20	34,7187	-0,0006	-241,73
25	41,6466	-0,0007	-298,20
30	47,9106	-0,0009	-353,10
35	53,5292	-0,0010	-406,41
40	58,5212	-0,0011	-458,13
45	62,9049	-0,0013	-508,27
50	66,6992	-0,0014	-556,83
55	69,9226	-0,0015	-603,79
60	72,5939	-0,0016	-649,18
65	74,7318	-0,0017	-692,97
70	76,3550	-0,0018	-735,17
75	77,4824	-0,0019	-775,79
80	78,1328	-0,0020	-814,82
85	78,3250	-0,0021	-852,26
90	78,0780	-0,0022	-888,11
95	77,4106	-0,0023	-922,37
100	76,3418	-0,0024	-955,04
105	74,8905	-0,0025	-986,11
110	73,0757	-0,0025	-1015,60
115	70,9164	-0,0026	-1043,49
120	68,4317	-0,0027	-1069,79
125	65,6406	-0,0027	-1094,50
130	62,5621	-0,0028	-1117,62
135	59,2154	-0,0028	-1139,14
140	55,6194	-0,0029	-1159,07
145	51,7934	-0,0029	-1177,41
150	47,7565	-0,0030	-1194,15
155	43,5278	-0,0030	-1209,30
160	39,1263	-0,0031	-1222,85
165	34,5714	-0,0031	-1234,82
170	29,8822	-0,0031	-1245,18
175	25,0778	-0,0031	-1253,95
180	20,1774	-0,0032	-1261,13
185	15,2003	-0,0032	-1266,71
190	10,1655	-0,0032	-1270,70
195	5,0924	-0,0032	-1273,09
200	0,0000	-0,0032	-1273,89
205	-5,0924	-0,0032	-1273,09
210	-10,1655	-0,0032	-1270,70
215	-15,2003	-0,0032	-1266,71
220	-20,1774	-0,0032	-1261,13
225	-25,0778	-0,0031	-1253,95
230	-29,8822	-0,0031	-1245,18
235	-34,5714	-0,0031	-1234,82
240	-39,1263	-0,0031	-1222,85
245	-43,5278	-0,0030	-1209,30
250	-47,7565	-0,0030	-1194,15
255	-51,7934	-0,0029	-1177,41
260	-55,6194	-0,0029	-1159,07
265	-59,2154	-0,0028	-1139,14
270	-62,5621	-0,0028	-1117,62
275	-65,6406	-0,0027	-1094,50
280	-68,4317	-0,0027	-1069,79
285	-70,9164	-0,0026	-1043,49
290	-73,0757	-0,0025	-1015,60
295	-74,8905	-0,0025	-986,11
300	-76,3418	-0,0024	-955,04
305	-77,4106	-0,0023	-922,37
310	-78,0780	-0,0022	-888,11
315	-78,3250	-0,0021	-852,26
320	-78,1328	-0,0020	-814,82
325	-77,4824	-0,0019	-775,79
330	-76,3550	-0,0018	-735,17
335	-74,7318	-0,0017	-692,97
340	-72,5939	-0,0016	-649,18
345	-69,9226	-0,0015	-603,79
350	-66,6992	-0,0014	-556,83

Bild 4.6-14: Last – Verschiebungsbeziehung für die ungestützte Sparrenkonstruktion

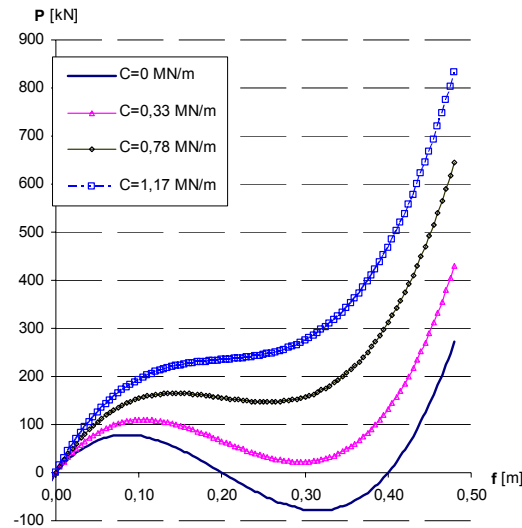


Bild 4.6-15: Last – Verschiebungsbeziehung für die gestützte Sparrenkonstruktion in Abhängigkeit von der Federkonstante C

Testrechnung Sparrenkonstruktion mit dem Drei-Ebenen-Modell

Abschließend wurde das ungestützte Sparrensystem mit dem Drei-Ebenen-Modell erfasst (15 Unterteilungen pro Sparrenstab) und die Last-Verformungskurve mit Hilfe einer Traglastiteration punktweise berechnet (Eingabedatei siehe Anhang B). Bei der Generierung des Systems wurden die Knoten in allen drei Richtungen gekoppelt. Die Ebenen A und B wurden im Firstpunkt unterbrochen, um den Stäben der Ebene A und B die korrekte Länge zuweisen zu können. Das ideale System ist schematisch in Bild 4.6-16 gezeigt. Zu beachten ist, dass hier aus darstellungstechnischen Gründen eine relativ große Spreizung d gewählt wurde.

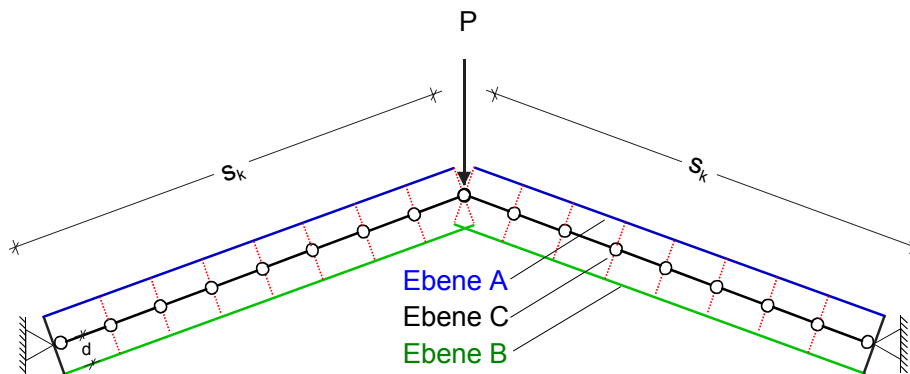


Bild 4.6-16: Sparrensystem, Drei-Ebenen-Modell, schematische Darstellung

Die Biegesteifigkeiten der Ebenen A und B wurden wie bei der Testrechnung des Eulerstabes (vgl.: Kapitel 4.6.2.2) angesetzt. Durch Variation der Schubsteifigkeit wurden die Fälle Vollquerschnitt ($S \rightarrow \infty$) und nachgiebig verbundener Beispielquerschnitt ($S=0,384 \text{ MN}$, vgl. Kapitel 4.6.2.2) untersucht.

Die Traglastiteration für den Vollquerschnitt stimmt sehr gut mit den analytisch bestimmten Werten überein, wie der in Bild 4.6-17 und Bild 4.6-18 visualisierte Ergebnisvergleich zeigt. Dabei sind die Berechnungsergebnisse durch „x“ angetragen während die analytisch bestimmten Werte durch eine durchgehende Linie repräsentiert werden. Der Sprung der numerischen Rechnung im Bereich der kritischen Last ist gestrichelt eingezeichnet.

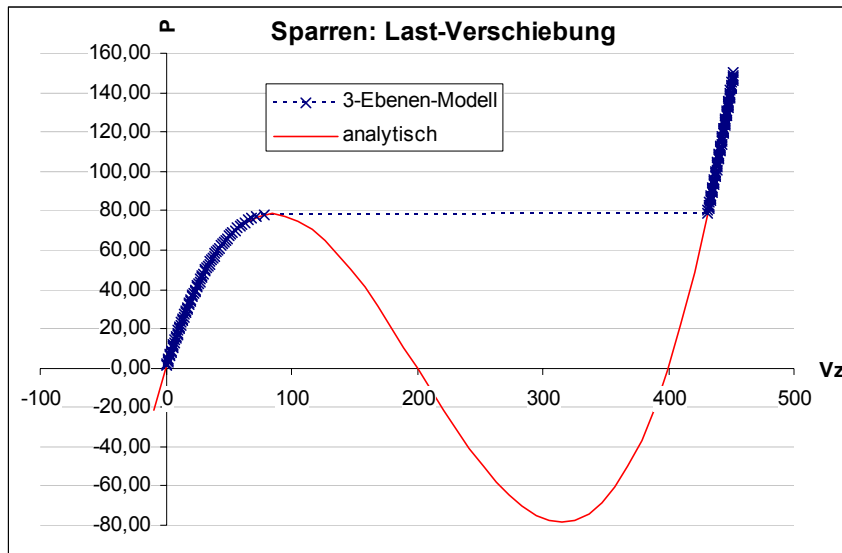


Bild 4.6-17: Last-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit x gekennzeichnet

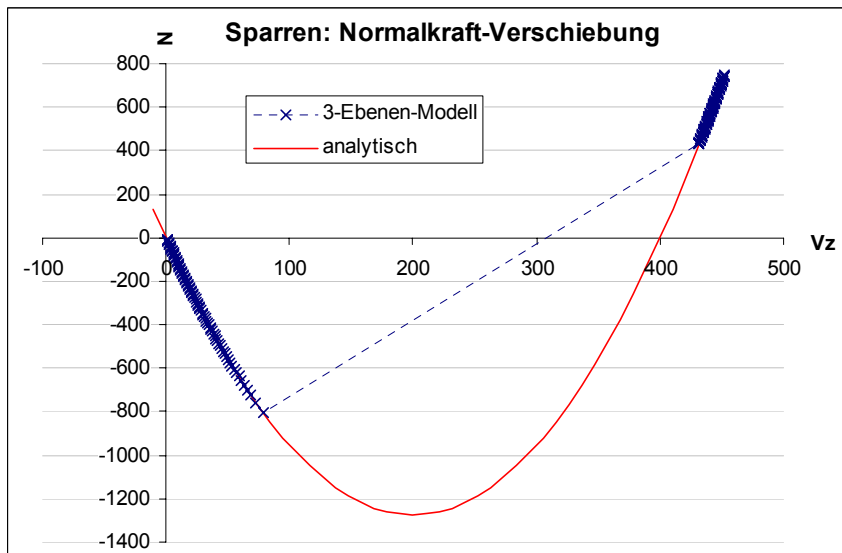


Bild 4.6-18: Normalkraft-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit x gekennzeichnet

Für den nachgiebig verbundenen Beispielquerschnitt ($S=0,384 \text{ MN}$) wird in den Sparrenstäben die kritische Last bezüglich Biegeschubknicken erreicht, bevor das Durchschlagen maßgebend werden kann. Die Knicklast des nachgiebig verbundenen Querschnitts beträgt nach Gleichung (4-160) $N_{ki}=P_{ki}=699 \text{ kN}$. Das Programm beendet die Traglastiteration mit Erreichen der Knicklast der Sparrenstäbe, bei einer Last von $P=74,83 \text{ kN}$, was einer Normalkraft von 695 kN entspricht. Eine weitere Laststeigerung war nicht möglich, obwohl theoretisch auch ein Gleichgewicht jenseits dieser Laststufe möglich ist. Die Abweichung zur Knicklast der Sparren $N_{ki}=699 \text{ kN}$ ist sehr gering, vor allem, wenn man bedenkt, dass in diesem Lastbereich bereits eine geringfügige Änderung der Last P aus Gründen der Geometrie eine große Änderung der Normalkraft zur Folge hat. In Bild 4.6-19 und Bild 4.6-20 sind die Ergebnisse dieser Iteration der exakten Lösung grafisch gegenübergestellt. Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

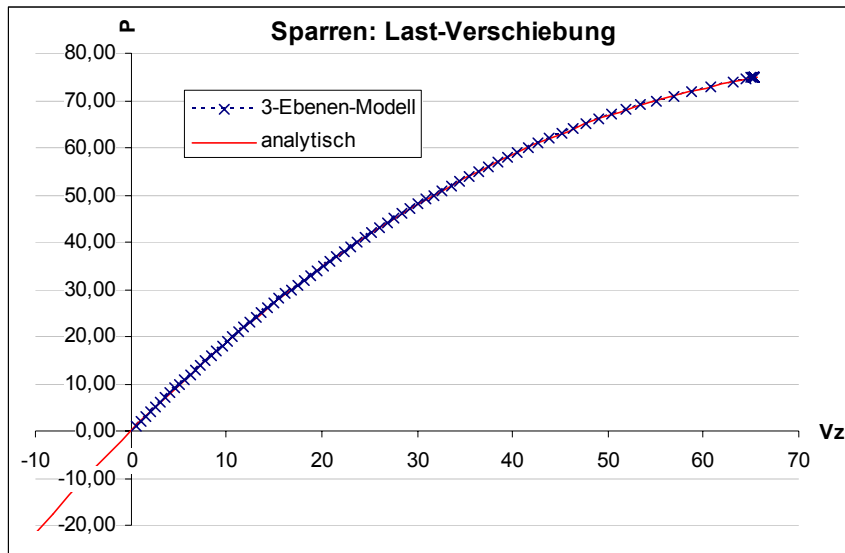


Bild 4.6-19: Last-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion mit nachgiebig verbundenem Querschnitt; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet

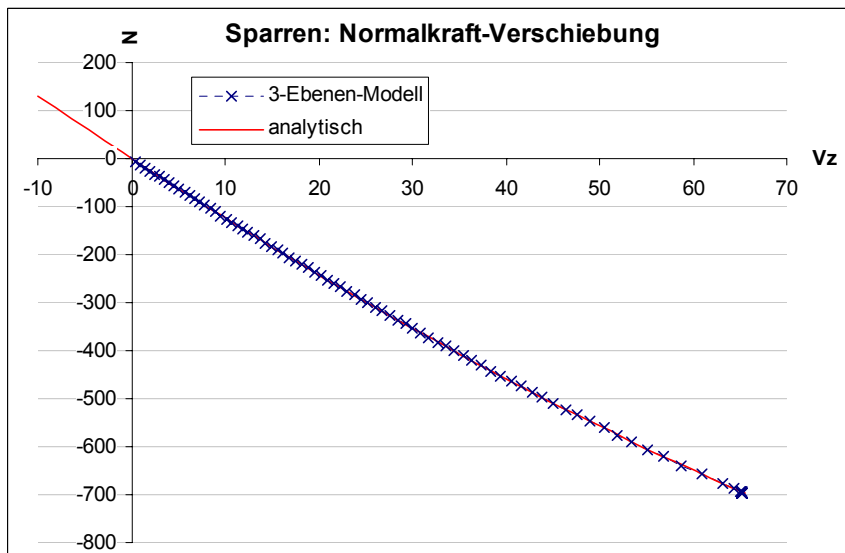


Bild 4.6-20: Normalkraft-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion mit nachgiebig verbundenem Querschnitt; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet

4.6.5 Stabilitätsuntersuchungen von Flächen

Die Untersuchungen der Abschnitte 4.6.1 - 4.6.4 lassen sich auf die Berechnung räumlicher Stabtragwerke übertragen. Damit können Berechnungen von Flächen nach Theorie zweiter Ordnung beispielsweise in Form von Rostberechnungen unter Einsatz des Drei-Ebenen-Modells erfolgen (vgl.: Kapitel 6.5). Ein wichtiger Gesichtspunkt ist hierbei die Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit. Da die Bestimmung der tatsächlich vorhandenen Torsionssteifigkeit oft problematisch ist (vgl.: Kapitel 6.4) und das Verfahren bezüglich dieses Aspektes nur einen näherungshaften Charakter haben kann, wird vorgeschlagen, den Steineranteil an der Torsionssteifigkeit abzumindern. Im Zweifelsfall sind hier Grenzwertbetrachtungen durchzuführen (siehe auch Kapitel 5.4). Die Berechnung erfolgt dann mit einer abgeminderten Steifigkeit B_{xy}^{B*} :

$$B_{xy}^{B*} = \eta \cdot B_{xy}^B ; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{Gl. 4-185}$$

4.7 Zur Krafteinleitung in das ideelle System

4.7.1 Rand- und Übergangsbedingungen

Aufgrund der Kopplung der Verschiebung der ideellen Ebenen ist die Aufteilung der Kräfte unabhängig davon, über welche Ebene sie in das ideelle System eingeleitet werden. Um Effekte aus programmspezifischen Nachläufen, wie z.B. sägezahnförmige Querkraftverläufe an der belasteten Ebene zu vermeiden, ist es sinnvoll, Lasten grundsätzlich als Knotenlasten einzugeben. Lokale Erscheinungen an Krafteinleitungsbereichen, wie z.B. Querkzugspannungen an ausgeklinkten Auflagern, sind gegebenenfalls in üblicher Weise an geeigneten Detailmodellen zu untersuchen. Externe Normalkräfte können im übertragenen Sinn nur auf den Gesamtquerschnitt aufgebracht werden, wie dies z.B. mit einer starren Lastverteilungsplatte geschieht, da die Normalkräfte bei der Rücktransformation nach den Regeln der Schubanalogie (vgl.: 4.3) im Verhältnis der Dehnsteifigkeiten auf die Teilquerschnitte des realen Querschnitts aufgeteilt werden. Eine Ausnahme stellen zweiteilige Verbundquerschnitte dar. Hier kann mit Hilfe einer Einwirkungskombination aus einem Randmoment an Ebene B und einer passenden Normalkraft auch eine partielle Normalkrafteinleitung mit dem ideellen System abgebildet werden. Eine derartige Übertragung in das Rechensystem ist in Bild 4.7-1 schematisch dargestellt.

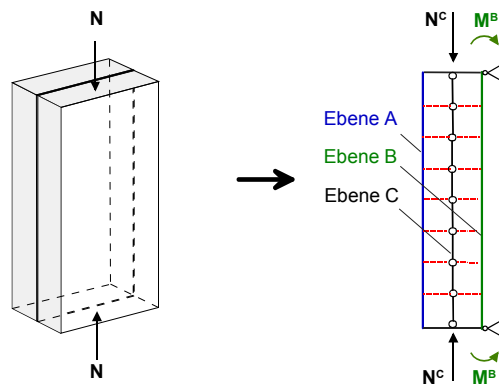


Bild 4.7-1: Einseitig belasteter Verbundquerschnitt, Transformation zum ideellen Rechensystem

Biegemomente, die auf der Biegung der einzelnen Teilquerschnitte des realen Querschnitts beruhen, werden über die Ebene A eingeleitet. Zur Veranschaulichung sind mit Bild 4.7-2 verschiedene Möglichkeiten für Endauflager und ihre Umsetzung im ideellen System am Beispiel eines zweiteiligen Verbundquerschnitts gezeigt.

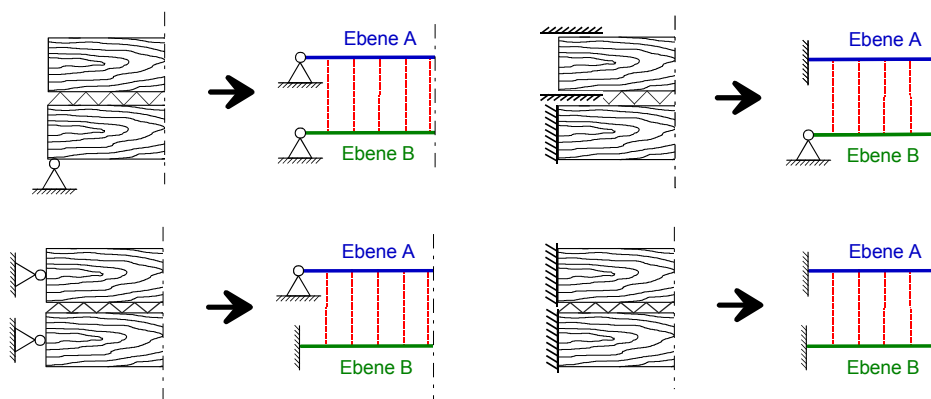


Bild 4.7-2: Verschiedene Endlagerungen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und die Umsetzung im ideellen System

Diese Überlegungen gelten sinngemäß auch für die Übertragung von Kräften an Übergangsstellen wie z.B. Trägerstößen. Eine Belegung der Ebene B mit $S \rightarrow 0$ bildet einen Bereich ohne Verbund ab. Mit Hilfe eines Gelenks an der Ebene A können Trägerstöße, wie Sie in Bild 4.7-3 gezeigt sind,

erfasst werden. Ein anschauliches Beispiel zur Erfassung solcher Besonderheiten am ideellen System ist in [50] bzw. [55] anhand der Berechnung eines „zusammengesetzten Trägers mit bereichsweise unterbrochenem Verbund sowie besonderen Rand- und Übergangsbedingungen“ gegeben.

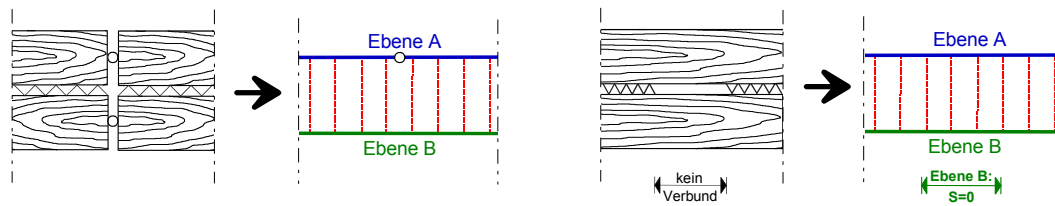
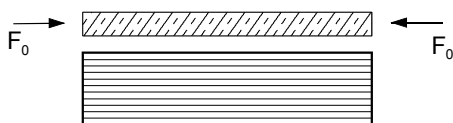


Bild 4.7-3: Beispielhafte Übergangssituationen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und ihre Umsetzung im ideellen System

4.7.2 Eigenspannungszustände

An Verbundquerschnitten verursachen unterschiedliche Dehnungsänderungen der Querschnittsteile, wie sie beispielsweise infolge ungleichen Schwindens oder durch voneinander abweichende Temperaturdehnungen auftreten können, Eigenspannungszustände. Diese können mitunter durch die adäquate Einleitung von virtuellen Kraftgrößen, welche am ideellen System eine „externe Gleichgewichtsgruppe“ bilden, erfasst bzw. angenähert werden. Für den Eigenspannungszustand „Zwang infolge ungleicher Temperaturdehnung“ kann beispielsweise das von Kreuzinger in [49] beschriebene Gedankenmodell eingesetzt werden. Hier wird die Temperaturdehnung zunächst durch gedachte „Festhaltekräfte“ behindert. Die dazu erforderliche Kraft wird am unverbundenen System aus der Dehnungsdifferenz bestimmt und dort aufgebracht (Lastfall 1). Im nächsten Schritt wird der Verbund hergestellt und die Festhaltekraft entfernt. Das entspricht einer Überlagerung des soeben am freien System erzeugten Zustandes mit den Verhältnissen, die sich am Verbundquerschnitt unter Einwirkung einer Kraft gleicher Größe und Angriffsstelle, jedoch mit entgegengesetzter Orientierung ergibt (Lastfall 2, vgl.: Bild 4.7-4). Die Überlagerung dieser beiden Lastfälle liefert die Verhältnisse des Eigenspannungszustandes.

Lastfall 1:



Lastfall 2:

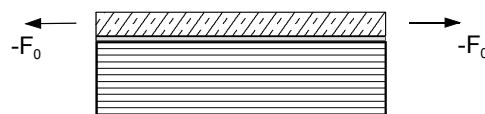


Bild 4.7-4: Lastfälle des Gedankenmodells zur Erfassung von Dehnungsänderungen. Schematische Darstellung am Beispiel eines Holz-Beton-Verbundquerschnitts

Für die Bestimmung der Ergebnisse aus Lastfall 2 ist die Berücksichtigung der Verbundeigenschaften erforderlich. Für zweiteilige Querschnitte ist ein analytischer Lösungsweg z. B. bei [49] angegeben. Alternativ kann die Berechnung auch mit der Schubanalogie erfolgen, indem auf das ideelle System die in Bild 4.7-1 gezeigte Einwirkungskombination aufgebracht wird. Das Randmoment M_B repräsentiert dabei das aus der exzentrischen Lasteinleitung resultierende Versatzmoment ($M^B = N \cdot e$). Beide Lösungswege führen zum selben Ergebnis. Anhand von Umformungen lässt sich z. B. die Entsprechung der Beziehungen für den Schubfluss im Lastfall 2 zeigen, wodurch die allgemeine Entsprechung belegt ist. Aus den in Kapitel 4.5.2 abgeleiteten Beziehungen ergibt sich für den Schubfluss t in der Verbundfuge infolge des Randmomentes M_R gemäß der Schubanalogie folgende Formel:

$$t(x) = \frac{Q^B(x)}{a}; \quad \text{Gl. 4-186}$$

$$t(x) = \frac{M_R \cdot S}{\sqrt{\alpha} \cdot B^B \cdot a} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot (L-x)}}{1 + e^{\sqrt{\alpha} \cdot L}}; \quad \text{mit } M_0^B = M_R; \quad \text{Gl. 4-187}$$

In [49] sind zur Bestimmung des Schubflusses die nachfolgend aufgeführten Relationen angegeben.

$$t(\tilde{x}) = t_0 \cdot \frac{e^{\tilde{x}/\ell} - e^{-\tilde{x}/\ell}}{e^{b/\ell} - e^{-b/\ell}}; \quad \text{Gl. 4-188}$$

$$t_0 = F_0 \cdot \frac{\ell \cdot c}{EA_1} \cdot \frac{e^{b/\ell} - e^{-b/\ell}}{e^{b/\ell} + e^{-b/\ell}}; \quad \text{Gl. 4-189}$$

$$\tilde{e}_1 = a \cdot \frac{EI_1}{EI_1 + EI_2}; \quad \tilde{e}_2 = a \cdot \frac{EI_2}{EI_1 + EI_2}; \quad \text{Gl. 4-190}$$

$$EA_1^* = \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{\tilde{e}_1^2}{EI_1} \right)^{-1}; \quad EA_2^* = \left(\frac{1}{EA_2} + \frac{\tilde{e}_2^2}{EI_2} \right)^{-1}; \quad \text{Gl. 4-191}$$

$$\ell = \sqrt{\left(c \cdot \left(\frac{1}{EA_1^*} + \frac{1}{EA_2^*} \right) \right)^{-1}}; \quad \text{Gl. 4-192}$$

$$b = \frac{L}{2}; \quad \text{Gl. 4-193}$$

Diese Formeln lassen sich in die Schreibweise der Schubanalogie übersetzen. Zunächst wird die gewichtete Dehnsteifigkeit EA^* des Verbundquerschnitts durch das Verhältnis des Kennwertes α zur Fugensteifigkeit c beschrieben.

$$\frac{1}{EA^*} = \frac{1}{EA_1^*} + \frac{1}{EA_2^*} = \frac{a^2}{B^A} + \frac{EA_1 + EA_2}{EA_1 \cdot EA_2} = a^2 \cdot \frac{B^A + B^B}{B^A \cdot B^B} = \frac{\alpha}{c}; \quad \text{Gl. 4-194}$$

Damit lässt sich auch die „charakteristische Länge“ ℓ durch α ausdrücken:

$$\ell = \sqrt{\left(c \cdot \left(\frac{1}{EA_1^*} + \frac{1}{EA_2^*} \right) \right)^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}; \quad \text{mit } c = \frac{S}{a^2}; \quad \text{Gl. 4-195}$$

Auf Basis der Beziehung zwischen der Festhaltekraft F_0 und dem Randmoment M^B kann nun der Verlauf des Schubflusses entsprechend umformuliert werden. Die Anpassung des Koordinatenursprunges mit (4-199) führt letztendlich wieder auf Gleichung (4-187).

$$F_0 = M_R \cdot \frac{EA_1 + EA_2}{EA_2 \cdot a}; \quad \text{Gl. 4-196}$$

$$t_0 = F_0 \cdot \frac{S}{a^2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot EA_1} \cdot \frac{e^{\frac{L \cdot \sqrt{\alpha}}{2}} - e^{-\frac{L \cdot \sqrt{\alpha}}{2}}}{e^{\frac{L \cdot \sqrt{\alpha}}{2}} + e^{-\frac{L \cdot \sqrt{\alpha}}{2}}} = \frac{M_R \cdot S}{B^B \cdot a \cdot \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{e^{L \cdot \alpha} - 1}{e^{L \cdot \alpha} + 1} \quad \text{Gl. 4-197}$$

$$t(\tilde{x}) = t_0 \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot \tilde{x}} - e^{-\sqrt{\alpha} \cdot \tilde{x}}}{e^{\frac{L}{2} \cdot \sqrt{\alpha}} - e^{-\frac{L}{2} \cdot \sqrt{\alpha}}} = \frac{M_R \cdot S}{B^B \cdot a \cdot \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha} \cdot \left(\tilde{x} + \frac{L}{2}\right)} - e^{\sqrt{\alpha} \cdot \left(\frac{L}{2} - \tilde{x}\right)}}{e^{\sqrt{\alpha} \cdot L} + 1}; \quad \text{Gl. 4-198}$$

$$\tilde{x} = x - \frac{L}{2}; \quad \text{Gl. 4-199}$$

5 Verifizierung und Anwendungsgrenzen des Verfahrens der Schubanalogie

5.1 Vorbemerkung

Neben den grundsätzlich gegebenen Fehlerquellen, wie z. B. fehlerhafte Erfassung des statischen Systems, falsche Annahmen bezüglich der Steifigkeiten etc. können die Ursachen für Abweichungen bei einer Berechnung gemäß der Schubanalogie prinzipiell in folgende drei Arten unterschieden werden:

- 1.) Eventuelle numerische Probleme der verwendeten Software bzw. programmseitige Probleme und „Fehler“, Eingabefehler.
- 2.) Abweichungen der Rechenergebnisse in Abhängigkeit von der gewählten Unterteilung des ideellen Systems.
- 3.) Eventuelle Abweichungen der Theorie gemäß der Schubanalogie von der theoretisch exakten Lösung (abhängig von Querschnittsgeometrie und Steifigkeitsverhältnissen).

Die mit 1.) genannten Fehler können durch Plausibilitätskontrollen und geeignete Testrechnungen, wie sie z.B. auch in [55] genannt sind, ausgeschlossen werden. Der mit 2.) angesprochene Einfluss der Rasterung, mit der das statische System generiert wird, auf die Qualität der Näherung ist nicht pauschal zu erfassen. Im Kapitel 4.6.3 wurde auf diesen Aspekt in Bezug auf die Knicklast eingegangen. Generell kann davon ausgegangen werden, dass die Unterteilung dann fein genug gewählt ist, wenn eine weitere Verfeinerung des Rasters eine Änderung der Ergebnisse von unbedeutender Größenordnung zur Folge hat. Im Prinzip gelten die Zusammenhänge wie sie bei jeder Berechnung mit finiten Elementen anzuwenden sind. Mehr Informationen zu diesem Thema sind z.B. in [100] zu finden.

Punkt 3.) ist Gegenstand dieses Kapitels. Zur Klärung des Sachverhaltes wird vor allem folgender Grundgedanke verwendet: Unter identischen äußeren Belastungen soll das ideale System dieselbe Biegelinie wie das reale System aufweisen. Dies ist der Fall, wenn sowohl der ideale als auch der reale Querschnitt bei identischem Verformungszustand der Querschnittsflächen dieselbe innere Energie haben. Unter dieser Voraussetzung ist gegeben, dass in beiden Fällen die gleichen Rückstellkräfte wirken und somit auch bei statisch unbestimmten Systemen dieselbe Schnittgrößenverteilung am Gesamtquerschnitt vorliegt. Für eine allgemeine Ableitung werden die inneren elastischen Potentiale pro Längeneinheit (Π^*) des ideellen Rechenquerschnitts und des realen Querschnitts zunächst in die Einzelanteile aus Biegung mit Querkraft, Normalkraft und Torsion getrennt und jeweils für sich verglichen. Auch wenn die Zusammenhänge überwiegend allgemeingültiger Natur sind, wird bei den Ableitungen grundsätzlich von rechteckigen Teilquerschnitten ausgegangen.

5.2 Verifizierung der Theorie für Biegung mit Schub

5.2.1 Zweiteilige Querschnitte mit schubstarren, nachgiebig verbundenen Einzelquerschnitten

Basierend auf den bereits in [48] und [81] dargelegten Überlegungen wird das innere elastische Potential pro Längeneinheit (Π^*) für einen Querschnitt bestehend aus zwei nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten im Falle einer Biegebelastung abgeleitet und mit dem inneren elastischen Potential pro Längeneinheit des ideellen Rechenquerschnitts der Schubanalogie verglichen. Bild 5.2-1 zeigt die geometrischen Beziehungen am realen Querschnitt. Zunächst wird ein aus zwei nachgiebig

verbundenen, schubstarrten Einzelquerschnitten zusammengesetzter Querschnitt (wie z.B. ein verdübelter Balken) betrachtet.

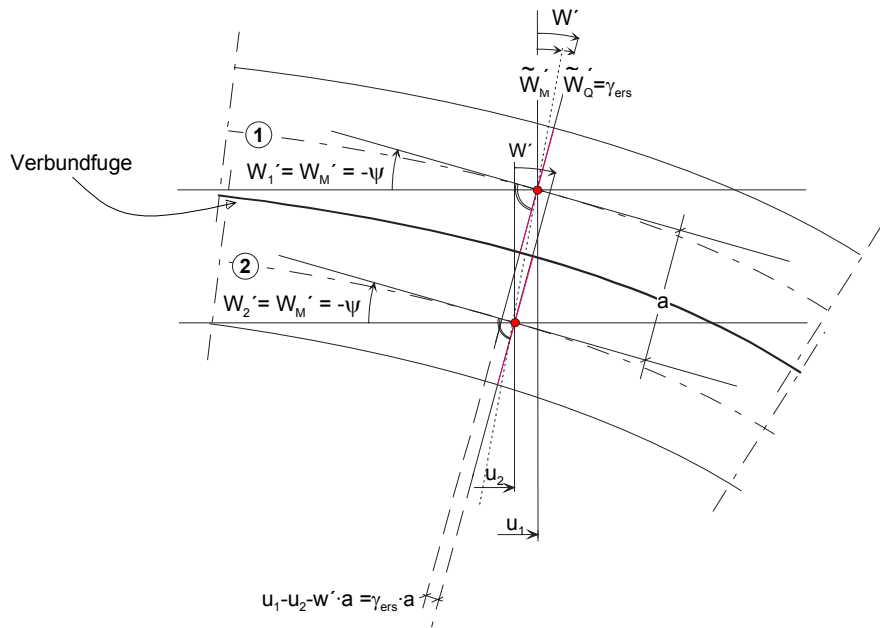


Bild 5.2-1: Geometrische Beziehungen für zwei nachgiebig zusammengesetzte (schubstarre) Einzelquerschnitte

Die innere Energie (Potential) Π_I^* eines solchen Verbundquerschnitts beträgt pro Längeneinheit:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \Pi_{1,M}^* + \Pi_{2,M}^* + \Pi_{1,N(M)}^* + \Pi_{2,N(M)}^* + \Pi_C^* ;$$

$$\Pi_{\text{I,M,Q}}^* = \frac{1}{2} \cdot \{B_1 \cdot w_1'^2 + D_1 \cdot u_1'^2 + B_2 \cdot w_2'^2 + D_2 \cdot u_2'^2 + c \cdot \Delta u_{1,2}^2\}; \quad \text{Gl. 5-1}$$

Mittels der geometrischen Beziehungen (5-2) lässt sich dieser Ausdruck in die allgemeine Formulierung gemäß Gleichung (5-3) überführen. Dabei bezeichnen $\tilde{w}_B$ den Biegenteil und $\tilde{w}'_Q$ den Schubanteil der Neigung eines gedachten Ersatzquerschnitts, wie er durch die lineare Verbindung der Teilquerschnittsschwerpunkte entsteht.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}'; \\ \mathbf{u}_1 &= \tilde{\mathbf{w}}'_M \cdot \mathbf{a}_1 = \tilde{\mathbf{w}}'_M \cdot |\mathbf{z}_{S1}|; & \mathbf{u}_2 &= \tilde{\mathbf{w}}'_M \cdot \mathbf{a}_2 = \tilde{\mathbf{w}}'_M \cdot |\mathbf{z}_{S2}|; \\ \Delta \mathbf{u}_{1,2} &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{w}' \cdot \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{w}}'_Q \cdot \mathbf{a} = \gamma_{\text{ers}} \cdot \mathbf{a}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \text{Gl. 5-2}$$

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (B_1 + B_2) \cdot w''^2 + D_1 \cdot u_1'^2 + D_2 \cdot u_2'^2 + c \cdot (u_1 - u_2 - w' \cdot a)^2 \right\};$$

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \{ (B_1 + B_2) \cdot w''^2 + (D_1 \cdot a_1^2 + D_2 \cdot a_2^2) \cdot \tilde{w}_M''^2 + c \cdot a^2 \cdot \gamma_{\text{ers}}^2 \};$$

$$\prod_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \{B^A \cdot w^{r2} + B^B \cdot \tilde{w}_M^{r2} + S \cdot \gamma_{ers}^2\} \equiv \prod_{II,M,Q}^* \quad \text{Gl. 5-3}$$

Gleichung (5-3) beschreibt die innere Energie pro Länge eines ideellen Trägers gemäß der Schubanalogie, dessen Verformungsbeziehungen in Bild 5.2-2 dargestellt sind, wenn gilt:

$$W'_0 = \gamma = \gamma_{\text{ers}} = \tilde{W}'_0; \quad \text{Gl. 5-4}$$

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \{B_1 \cdot w_1'^2 + B_2 \cdot w_2'^2 + D_1 \cdot u_1'^2 + D_2 \cdot u_2'^2 + G_3 \cdot A_{3'}^* \cdot \gamma_{3'}^2\}; \quad \text{Gl. 5-6}$$

Die geometrischen Zusammenhänge (5-2) erlauben folgende Umformung:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \{(B_1 + B_2) \cdot w'^2 + (D_1 \cdot a_1^2 + D_2 \cdot a_2^2) \cdot \tilde{w}_M'^2 + G_3 \cdot A_{3'}^* \cdot \gamma_{3'}^2\};$$

mit $\gamma_{3'} = \gamma_{\text{ers}} \cdot \frac{a}{d_{3'}}$ gilt:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ B^A \cdot w'^2 + B^B \cdot \tilde{w}_M'^2 + G_3 \cdot A_{3'}^* \cdot \gamma_{\text{ers}}^2 \cdot \frac{a^2}{d_{3'}^2} \right\}; \quad \text{Gl. 5-7}$$

Da die Schubschicht keine Biegesteifigkeit hat, ist der Schubfluss über die Schichtdicke konstant. Somit ist die Korrektur für die Schubfläche $\kappa=1$. Damit ist das Potential des realen Querschnitts auch in diesem Fall gleichwertig mit der inneren Energie des ideellen Zweipunktquerschnitts.

Das bedeutet, die Schubanalogie liefert für Querschnitte, die aus zwei nachgiebig verbundenen Einzelquerschnitten zusammengesetzt sind, die exakte Lösung, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- Der Einfluss der Schubverformungen der Einzelquerschnitte wird vernachlässigt
- Das Verbundmedium hat keinen Anteil an der Biegesteifigkeit B^A
- Die Diskretisierung des ideellen Systems erfolgt ausreichend genau

5.2.2 Allgemeine Anmerkungen zu mehrteiligen, aus schubstarren, nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten zusammengesetzten Querschnitten

Die innere Energie pro Längeneinheit für Biegung mit Querkraft eines Verbundquerschnitts aus mehreren nachgiebig verbundenen, schubstarren Einzelschichten lässt sich allgemein wie folgt beschreiben:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (B_i \cdot w'^2 + D_i \cdot u_i'^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{i,i+1} \cdot \Delta u_{i,i+1}^2) \right\}; \quad \text{Gl. 5-8}$$

Setzt man voraus, dass die Schwerpunkte der Teilquerschnitte auf einer Linie liegen, gelten die in Bild 5.2-4 dargestellten geometrischen Beziehungen.

Bei dreiteiligen Querschnitten mit symmetrischem Aufbau liegen die Schwerpunkte der Teilquerschnitte aus Symmetriegründen stets auf einer Linie. Auch die Bedingung (5-12) ist erfüllt:

$$c_{1,2} = c_{2,3} = c; \quad d_1 = d_3; \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{d_1 + d_2}{2} = a_2 = \frac{d_2 + d_3}{2} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{i,i+1} \cdot \left(\frac{d_i + d_{i+1}}{2} \right)^2 \right) = c \cdot \sum_{i=1}^2 (a_i)^2 = c \cdot \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot 2 \right) = \frac{a^2}{2} = S;$$

Für beliebige Querschnittszusammensetzungen – mit Ausnahme des Zweipunkt- und des symmetrisch aufgebauten Dreipunktquerschnitts – liegen die Schwerpunkte der Teilquerschnitte im verformten Zustand nicht mehr zwingend auf einer Linie. Das ist eine Verletzung der bei der Ableitung der Theorie festgelegten Rahmenbedingungen, welche aus der Tatsache folgt, dass der Verlauf des Schubflusses über die Querschnittshöhe nicht konstant ist, sondern durch den Verlauf des mit dem E-Modul gewichteten statischen Moments SE bestimmt wird. Die Größe der hieraus resultierenden Abweichungen ist vor allem von den Geometrie- und Steifigkeitsverhältnissen des Verbundquerschnitts abhängig. Allgemeingültige Aussagen zu den hieraus resultierenden Abweichungen sind kaum möglich. Aus diesem Grund werden in den folgenden Abschnitten spezielle Querschnittsaufbauten, die vor allem für den Ingenieurholzbau von Bedeutung sind, untersucht, um für diese Fälle möglichst konkrete Angaben über die Abweichungen der Methode abzuleiten.

5.2.3 Verbundquerschnitte aus beliebig vielen schubstarren, identischen Teilquerschnitten und jeweils identischer Verbindung

Ein für die Holzbaupraxis relevanter Sonderfall des mehrteiligen, nachgiebig verbundenen Querschnitts liegt vor, wenn alle Teilquerschnitte und Schubverbindungen identisch ausgebildet sind (z.B. Brettsperrholz, vgl. Kapitel 3.2.1). Auch in diesem Fall ist die Forderung (5-12) erfüllt:

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i+2} = c; \quad d_i = d_{i+1} = d; \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{i,i+1} \cdot \left(\frac{d_i + d_{i+1}}{2} \right)^2 \right) = c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} d^2 = c \cdot d^2 \cdot (n-1) = \frac{c \cdot (d \cdot (n-1))^2}{(n-1)} = \frac{c}{(n-1)} \cdot a^2 = S;$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Schwerpunkte der Teilquerschnitte bei identischen Fugensteifigkeiten – mit Ausnahme des Zweipunkt- und des symmetrisch aufgebauten Dreipunktquerschnitts – im verformten Zustand nicht mehr zwingend auf einer Linie liegen. Das folgt aus der Tatsache, dass der Verlauf des Schubflusses über die Querschnittshöhe nicht konstant ist, sondern durch den Verlauf des mit dem E-Modul gewichteten statischen Moments SE bestimmt wird. Diese Verletzung der eingangs festgelegten Rahmenbedingungen entspricht allerdings auch den Annahmen, die der Technischen Biegetheorie im allgemeinen zugrunde liegen. Diese geht vom Ebenbleiben des Querschnitts aus, was im Widerspruch zu der S-förmigen Querschnittsverwölbung, die sich aus der parabelförmigen Schubspannungsverteilung ergibt, steht. Im Allgemeinen wird dies durch einen Korrekturfaktor für die Querschnittsfläche κ berücksichtigt (vgl. z.B.: [93], [79] etc.). Die Auswirkungen der Schubdeformation auf die Spannungsverteilung werden bei dieser Theorie allerdings vernachlässigt (vgl. Kapitel 6.1). Analog zu dem allgemein üblichen Vorgehen zur Bestimmung von κ kann auch im vorliegenden Fall ein Korrekturfaktor mittels Energiebetrachtungen bestimmt werden.

Unter Vorgabe der konstanten Gleitung γ_{ers} bestimmt sich die innere Formänderungsenergie pro Längeneinheit Π_{II}^* des ideellen Querschnitts unter Schubbelastung. Da die einzelnen Teilquerschnitte des Verbundquerschnitts als schubstarr vorausgesetzt wurden, geht hier ausschließlich der Anteil infolge der Fugenverschiebung ein. Folglich ist an der Arbeit aus Querkraftschub nur der Querkraftanteil Q^B beteiligt.

$$\Pi_{\text{II},Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^B{}^2}{S} \cdot \kappa; \quad \text{Gl. 5-13}$$

Dem gegenüber steht die innere Formänderungsenergie pro Längeneinheit Π_{I}^* der Federn in den Verbundfugen des Verbundquerschnitts:

$$\Pi_{\text{I},Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (c_{i,i+1} \cdot \Delta u_{i,i+1}^2) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{t_{i,i+1}^2}{c_{i,i+1}} \right) \quad \text{Gl. 5-14}$$

Die Verteilung des Schubflusses über die Verbundfugen ($t_{i/i+1}$) ergibt sich aus den durch die Steineranteile der einzelnen Schichten hervorgerufenen linearen Schubanteilen:

$$t_{i/i+1} = \frac{Q^B}{B^B} \cdot (SE)_{i/i+1} = \frac{Q^B}{B^B} \cdot \sum_{j=1}^i (z_{sj} \cdot E_j \cdot d_j \cdot b_j) = \frac{Q^B}{B^B} \cdot \sum_{j=1}^i (z_{sj} \cdot D_j) \quad \text{Gl. 5-15}$$

$$t_{i/i+1} = Q^B \cdot \frac{\sum_{j=1}^i (z_{sj} \cdot D_j)}{\sum_{j=1}^n (z_{sj}^2 \cdot D_j)} \quad \text{Gl. 5-16}$$

Für den Fall, dass der Verbundquerschnitt aus n identischen Schichten aufgebaut ist ($n \in \{2, 3, \dots\}$), vereinfacht sich der Ausdruck wie folgt:

$$z_{si} = \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) - i \right] \cdot d; \quad D_i = D_{i+1};$$

$$t_{i/i+1} = Q^B \cdot \frac{\sum_{j=1}^i z_{sj}}{\sum_{j=1}^n z_{sj}^2} = Q^B \cdot \frac{6 \cdot i \cdot (n-i)}{d \cdot n \cdot (n^2 - 1)}; \quad \text{Gl. 5-17}$$

Somit lassen sich für diesen Sonderfall auch die Energieausdrücke (5-13) und (5-14) handlicher gestalten:

$$\Pi_{\text{II},Q}^* = Q^B{}^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{(n+1)}{d^2 \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot c}; \quad \text{Gl. 5-18}$$

$$\Pi_{\text{II},Q}^* = Q^B{}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa}{d^2 \cdot (n-1) \cdot c}; \quad \text{mit} \quad S = d^2 \cdot (n-1) \cdot c \quad \text{Gl. 5-19}$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich der Korrekturwert κ bzw. die energieäquivalent korrigierte Schubsteifigkeit S^* für den aus n quasi schubstarrten, nachgiebig verbundenen, identischen Lagen aufgebauten Querschnitt:

$$\kappa = \frac{6}{5} \cdot \frac{n^2 + 1}{n \cdot (n + 1)} ; \quad n \in \{2, 3, \dots\} \quad \text{Gl. 5-20}$$

$$S^* = \frac{S}{\kappa} = \frac{5}{6} \cdot \frac{d^2 \cdot c \cdot n \cdot (n^2 - 1)}{n^2 + 1} ; \quad n \in \{2, 3, \dots\} \quad \text{Gl. 5-21}$$

Bild 5.2-5 veranschaulicht die Abhängigkeit des Korrekturfaktors κ von der Schichtanzahl n . Gut zu erkennen ist die Annäherung an den für homogene, schubweiche Rechteckquerschnitte gültigen Wert $\kappa_{RQ}=1,2$. Übereinstimmend mit den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts ist für zweischichtige und symmetrische dreischichtige Aufbauten keine Korrektur ($\kappa=1$) vorzunehmen.

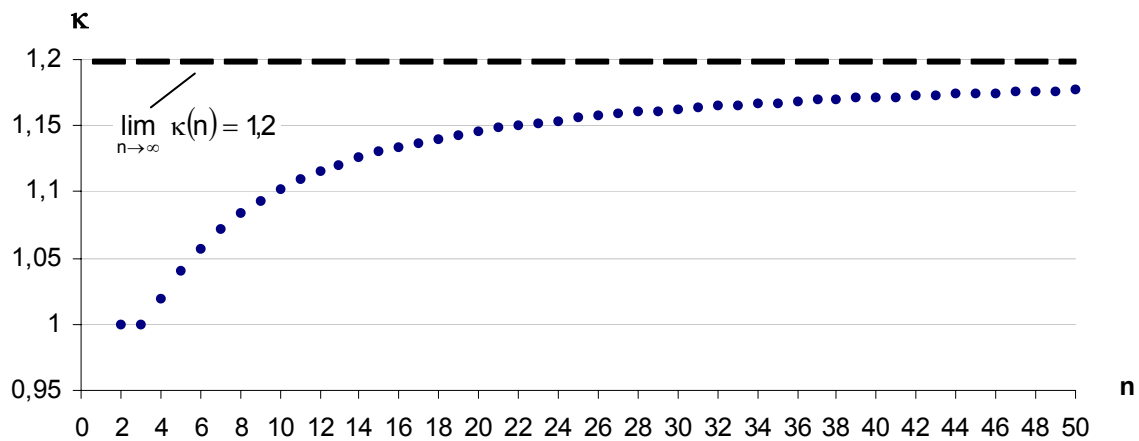


Bild 5.2-5: Verlauf des über Energieäquivalenz abgeleiteten Korrekturwertes κ für einen Querschnitt aus n identischen, mit identischen Verbindungen nachgiebig zusammengesetzten Schichten

Ähnliche Zusammenhänge ergeben sich, wenn die Fugenverbindungen eine endliche Dicke von jeweils d' aufweisen. Dies ist z.B. bei der Verbindung mit „reinen“ Schubschichten, wie sie näherungsweise beim Brettsper Holz oder Sandwichelementen vorhanden sind, der Fall. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Anteil solcher Schubschichten an der Dehn- und Biegesteifigkeit des Elementes vernachlässigt werden kann ($E_{\text{Schubschicht}} \rightarrow 0$).

Für die Schwerpunkte der einzelnen Schichten, für den Schubfluss in den Schubschichten und für die Verformungsenergie infolge Schubbelastung eines solchen Verbundquerschnittes gilt:

$$z_{si} = \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) - i \right] \cdot (d' + d) ;$$

$$t_{i/i+1} = Q^B \cdot \frac{\sum_{j=1}^i z_{sj}}{\sum_{j=1}^n z_{sj}^2} = Q^B \cdot \frac{6 \cdot i \cdot (n-i)}{n \cdot (n^2 - 1) \cdot (d + d')} ; \quad \text{Gl. 5-22}$$

$$\Pi_{I,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{d'}{G' \cdot b'} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} t_{i,i+1}^2 = Q^{B^2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{(n+1) \cdot d'}{G' \cdot b' \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot (d + d')^2} ; \quad \text{Gl. 5-23}$$

Der Potentialausdruck für den ideellen Rechenquerschnitt vereinfacht sich für diesen Sonderfall wie folgt:

$$\Pi_{II,Q}^* = Q^{B^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa \cdot d'}{(d + d')^2 \cdot (n-1) \cdot G \cdot b'} ; \quad \text{mit} \quad S = \frac{(d + d')^2 \cdot (n-1) \cdot G \cdot b'}{d'} ; \quad \text{Gl. 5-24}$$

Gleichsetzen der beiden Energiebeziehungen führt auf die bereits bekannte Gleichung (5-20), womit für die korrigierte Schubsteifigkeit S^* bei einer Verbindung mit identischen Schubschichten folgende Beziehung gilt:

$$S^* = \frac{S}{\kappa} = \frac{5}{6} \cdot \frac{(d + d')^2 \cdot G \cdot b' \cdot n \cdot (n^2 - 1)}{d' \cdot (n^2 + 1)} ; \quad n \in \{2, 3, \dots\} \quad \text{Gl. 5-25}$$

Die Schubanalogie liefert demnach für Querschnitte, die aus lauter identischen, durch gleichartige Fugen nachgiebig verbundene Schichten aufgebaut sind, eine Lösung, deren Genauigkeit auf dem Niveau der technischen Biegetheorie mit Berücksichtigung der Schubdeformation liegt, wenn die Schubsteifigkeit S mit dem in Gleichung (5-20) definierten Korrekturfaktor κ angepasst wird. Vor allem für Querschnitte die aus weniger als 8 Teilquerschnitten bestehen, ist der Korrekturfaktor relativ gering (vgl.: Bild 5.2-5). Somit dürfte ein „unkorrigierter“ Ansatz der Schubsteifigkeit nach (4-6) für die meisten Anwendungen des Ingenieurholzbaues, bei denen lauter identische Schichten mit identischer Verbindung zum Einsatz kommen, zu ausreichend genauen Ergebnissen führen. Wie gezeigt wurde, ist es dabei von untergeordneter Bedeutung, ob die Verbindung mit nachgiebigen Verbindungsmitteln oder mit reinen Schubschichten endlicher Dicke realisiert wird.

5.2.4 Verbundquerschnitte aus beliebigen (schubstarren) Teilquerschnitten und voneinander abhängigen Verbindungssteifigkeiten

Auch wenn die einzelnen Teilquerschnitte beliebige voneinander abweichende Abmessungen und Elastizitäts-Moduli aufweisen, kann die Forderung, dass die Schwerpunkte der Teilquerschnitte im verformten Zustand auf einer Linie liegen, erfüllt werden. Dies ist der Fall, wenn die Steifigkeiten der Verbindungsfugen in einer ganz bestimmten Relation zueinander stehen. Diese Tatsache macht sich bereits Schelling [73] zunutze, um die Steifigkeiten der Verbundfugen so „aufeinander abzustimmen“, dass sich eine „statisch günstige“ (wirtschaftliche) Verteilung ergibt. Mit Hilfe des Schubflusses leitet er ein Verhältnis für die Fugensteifigkeiten ab, bei dem sich „ein geradliniger Verlauf der Schwerpunktdehnungen“ einstellt. In die Terminologie dieser Arbeit übertragen, lautet der Zusammenhang der Steifigkeit von zwei beliebigen Fugen ($j, j+1$ und $i, i+1$) wie folgt:

$$\frac{c_{i,j+1}}{c_{j,j+1}} = \frac{SE_{i,j+1}}{SE_{j,j+1}} \cdot \frac{a_{j,j+1}}{a_{i,i+1}} ; \quad \text{Gl. 5-26}$$

Sind alle Steifigkeiten gemäß dieser Vorgabe voneinander abhängig, gilt für das innere elastische Potential des Verbundquerschnitts Gleichung (5-11). Dieses stimmt mit dem inneren elastischen Potential des ideellen Querschnitts (5-3) überein, wenn für die Schubsteifigkeit S , abweichend von der ursprünglichen Definition (4-6), der aus der Energieäquivalenz abgeleitete Wert S_k (5-27) angesetzt wird.

$$S_k = \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{i,i+1} \cdot \left(\frac{d_i + d_{i+1}}{2} \right)^2 \right) ; \quad \text{Gl. 5-27}$$

Diese Überlegungen gelten auch, wenn die Verbundfugen eine endliche Ausdehnung senkrecht zur Elementachse haben, wie dies z. B. auch bei schubweichen Zwischenschichten der Fall ist („reine Schubschichten“, $E_{\text{Schubschicht}} \rightarrow 0$). Die Bestimmung der Ersatzschubsteifigkeit erfolgt dann mit der allgemeinen Formulierung (5-28).

$$S_k = \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{i,i+1} \cdot (a_{i,i+1})^2 \right); \quad \text{Gl. 5-28}$$

Im Falle eines Verbundes durch Schubschichten ist die Federsteifigkeit durch die entsprechende Beziehung von Schubsteifigkeit ($G'_{i,i+1}$) und Geometrie der Schubschicht ($d'_{i,i+1}$, $b'_{i,i+1}$) zu ersetzen:

$$c_{i,i+1} \equiv \frac{G'_{i,i+1} \cdot b'_{i,i+1}}{d'_{i,i+1}}; \quad \text{Gl. 5-29}$$

5.2.5 Verbundquerschnitte aus beliebigen (schubstarren) Teilquerschnitten und voneinander unabhängigen Verbindungssteifigkeiten

Für beliebige mehrteilige Querschnittsaufbauten stimmt die Schubanalogie mit Ausnahme der soeben behandelten Sonderfälle nicht mit der theoretisch exakten Lösung überein. In diesen Fällen ist sie eine Näherung, über deren Qualität keine pauschale Angabe gemacht werden kann. (siehe auch Kapitel 5.2.2). In Kapitel 5.5 werden entsprechende Parameterstudien durchgeführt. Aus den Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes lässt sich jedoch folgende allgemeine Aussage ableiten:

Haben die einzelnen Teilquerschnitte z. B. unterschiedliche Abmessungen oder sind sie mit unterschiedlich steifen Fugen verbunden, ist es sinnvoll, die Ersatzschubsteifigkeit mit der aus der Energieäquivalenz abgeleiteten Beziehung (5-28) zu bestimmen. Je mehr sich das Verhältnis der Fugensteifigkeiten zueinander an der Gleichung (5-26) orientiert, umso genauer ist das Ergebnis. Sind (5-26) und (5-28) eingehalten, liefert die Schubanalogie die theoretisch exakte Lösung. Eine entsprechende Abstimmung der Fugensteifigkeiten lässt sich z. B. durch Variation der Abstände von mechanischen Verbindungsmitteln erreichen, was meist zu einer „statisch günstigen“ bzw. wirtschaftlichen Lösung führt (vgl.: [73], [74]).

5.2.6 Verbundquerschnitte aus schubweichen, nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten

Bisher wurde bezüglich der Verbindung von reinen Schubschichten ($E_{\text{Schubschicht}} \rightarrow 0$) bzw. von unendlich dünnen Schubfugen ausgegangen. Die Anteile des Verbundmediums an den Biegesteifigkeiten B^A und B^B wurden vernachlässigt. Sollen diese berücksichtigt werden, so sind auch die Schubfugen wie Teilquerschnitte zu behandeln. Wird die Schubdeformation der einzelnen Teilquerschnitte selbst mit erfasst, so sind die geometrischen Beziehungen um die daraus resultierenden Anteile zu ergänzen, wie in Bild 5.2-6 gezeigt ist. Zusätzlich zu den bisher erfassten Verformungsgrößen sind die Schubgleitungen $\gamma_i = w'_{Q,i}$ der Teilquerschnitte zu berücksichtigen.

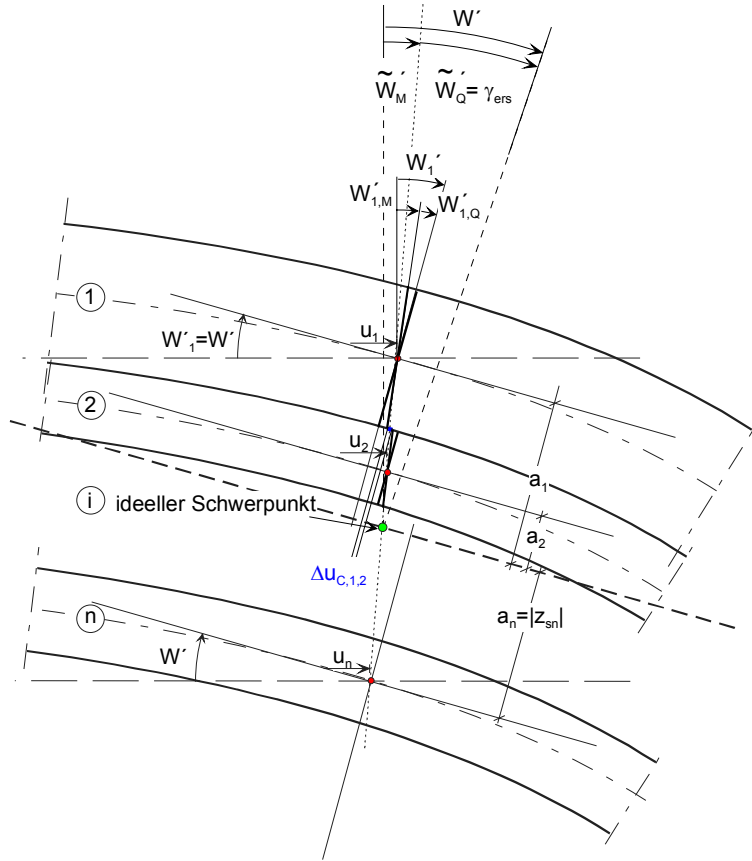


Bild 5.2-6: Aus mehreren beliebigen, nachgiebig verbundenen, schubweichen Teilquerschnitten zusammengesetzter Querschnitt, schematische Darstellung der geometrischen Beziehungen.

Für die innere Energie pro Längeneinheit bezüglich Biegung mit Querkraft eines solchen Verbundquerschnitts gilt:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (B_i \cdot w_{M,i}''^2 + D_i \cdot u_i'^2) + \sum_{i=1}^n ((GA^*)_i \cdot w_{Q,i}'^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{i,i+1} \cdot \Delta u_{c,i,i+1}^2) \right\}; \quad \text{Gl. 5-30}$$

Die Federkräfte werden durch die gegenseitige Verschiebung zweier Teilquerschnitte an der Verbundfuge $\Delta u_{c,i,i+1}$ aktiviert. Diese entspricht der Fugenverschiebung bei schubstarrten Teilquerschnitten abzüglich des aus der Schubgleitung der Teilquerschnitte resultierenden Verformungsanteils:

$$\Delta u_{c,i,i+1} = \tilde{w}'_Q \cdot a_{i,i+1} - w'_{Q,i} \cdot \frac{d_i}{2} - w'_{Q,i+1} \cdot \frac{d_{i+1}}{2}; \quad \text{Gl. 5-31}$$

Der Potentialausdruck kann alternativ wie folgt angeschrieben werden:

$$\Pi_{I,M,Q}^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (B_i \cdot w_{M,i}''^2) + B^B \cdot \tilde{w}_M''^2 + \sum_{i=1}^n ((GA^*)_i \cdot w_{Q,i}'^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{i,i+1} \cdot \left(\tilde{w}'_Q \cdot a_{i,i+1} - w'_{Q,i} \cdot \frac{d_i}{2} - w'_{Q,i+1} \cdot \frac{d_{i+1}}{2} \right)^2 \right) \right\}; \quad \text{Gl. 5-32}$$

Diese Beziehung weicht von (5-3) ab und kann auch durch weitere Umformungen nicht zur Übereinstimmung gebracht werden. Das ist schon allein darin begründet, dass im ideellen System der Schubanalogie die Schubverformungen generell in der Ebene B berücksichtigt werden. Die Eigenanteile erfahren hier keine Schubverformung, weshalb die Gleitwinkel der Teilquerschnitte $w'_{Q,i}$ stets zu null werden und somit abweichende Drehwinkel $w'_{M,i}$ anliegen. Eine Modifizierung der Theorie, gemäß der beiden Ebenen adäquate Schubsteifigkeiten zugewiesen werden ist denkbar. Eine solche Erweiterung ist für die Berechnung von Flächen aus Holz jedoch von untergeordneter Bedeutung. Im Falle von Brettspertholz ist es zweckmäßig, die Biegesteifigkeit der Schubschichten (Querlagen) zu vernachlässigen. Dies begründet sich darin, dass der Elastizitätsmodul von Holz senkrecht zur Faser sehr gering ist. Überdies sind die Schmalseiten der Bretter meist nicht verleimt, bzw. die Zugspannungsübertragung durch Entlastungsnuten und Schwindrisse etc. eingeschränkt. Bei den meisten anderen Holzbauweisen, wie beispielsweise der Brettrippenbauweise ist die Schubdeformation der Teilquerschnitte im Vergleich zur gegenseitigen Verschiebung in den Verbundfugen in der Regel vernachlässigbar. Das Vorgehen der Schubanalogie, bei dem die gesamte Schubsteifigkeit dem Steineranteil zugeordnet wird, ist also für die Berechnung der meisten Flächen aus Holz eine praktikable Näherung.

5.3 Verifizierung der Theorie für Normalkrafteinwirkungen

Normalkräfte werden bei der Schubanalogie so erfasst, dass Sie über den gesamten Verbundquerschnitt dieselbe Dehnungsänderung hervorrufen. Das entspricht dem Verhalten des realen Systems im „ungestörten“ Bereich. Im Bereich von Lasteinleitungen ergibt sich solch eine Situation beispielsweise bei quasi starren Lastverteilungsplatten. Die Normalkraft teilt sich hier im Verhältnis der Dehnsteifigkeiten auf die einzelnen Teilquerschnitte auf. Für den Anteil der Normalkraft an der inneren Energie pro Längeneinheit gilt am Verbundquerschnitt folgende Beziehung:

$$\Pi_{I,N}^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n ((EA)_i \cdot u_i'^2) = \frac{u'^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (EA)_i ; \quad \text{Gl. 5-33}$$

Dies entspricht dem Normalkraftanteil der inneren Energie $\Pi_{II,N}^*$ des ideellen Systems. Je nach Aufteilung der Dehnsteifigkeit auf die ideellen Ebenen (vgl. Kapitel 4.6) sind dabei die Anteile der Ebenen zu addieren.

$$\Pi_{II,N}^* = \frac{u'^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^n D_i ; \quad \text{Gl. 5-34}$$

Anmerkung: Für Berechnungen nach Theorie zweiter Ordnung müssen die Teilstäbe, mit denen das ideelle System generiert wird, theoretisch unendlich kurz sein, damit die Fachwerkstabkette der Ebene C die „exakte Biegelinie“ annimmt (vgl. auch 5.1). Dieser Aspekt ist anhand von Parameterstudien im Kapitel 4.6.3 näher untersucht.

5.4 Verifizierung der Theorie für Torsionsbeanspruchung

Stamm und Witte leiten in [86] „die Formänderungsenergie einer durch Quer-, Längs- und Schubkräfte belasteten Sandwichplatte mit dicken Deckschichten“ her (Gl. 5-35). Der Ableitung liegen vereinfachende Annahmen, wie sie in ähnlicher Form auch für die Schubanalogie beansprucht werden, zugrunde. Im Einzelnen lassen sich die Forderungen gemäß [86] wie folgt zusammenfassen:

- Es wird ein Sandwichelement, bestehend aus zwei, mittels einer Schubschicht verbundenen, Decklagen betrachtet.
- Alle Schichten bestehen aus linear orthotropen Werkstoffen.
- Die Steifigkeiten der Schichten dürfen voneinander abweichen, solange folgende Forderung eingehalten wird: Das Verhältnis der Elastizitätsmodule der Deckschichten ist in beiden Richtungen gleich und entspricht dem Verhältnis der Schubmodule der Deckschichten.
- Das Verbundmedium wird als reine Schubschicht idealisiert; d. h. der Kern hat keine Eigentragswirkung ($\sigma_{x,K} \approx 0$, $\sigma_{y,K} \approx 0$, $\tau_{xz,K} = \text{const.}$, $\tau_{yz,K} = \text{const.}$).
- Der Einfluss der Schubverformungen der Einzelquerschnitte infolge Querkraftschubs wird mit Ausnahme der Schubschicht vernachlässigt.
- Sämtliche Schichten erfahren senkrecht zur Platte die gleiche Verschiebung ($v_{z,i} = v_{z,i+1}$); die Platte ist nicht zusammendrückbar.
- Die Verformungen sind infinitesimal klein, so dass Verformungsanteile höherer Ordnung vernachlässigt werden können.
- Es treten keine Wölbkräfte infolge Torsion auf.

Für die Formänderungsenergie W einer solchen Platte gilt nach Stamm und Witte Gleichung (5-35) (Bezeichnungsweisen gemäß [86]). Im Folgenden wird diese Beziehung in die Terminologie dieser Arbeit übersetzt und für die Anwendung auf Flächen aus Holz angepasst.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iint_F \left[B_{xS} (\gamma'_{xz} - w'')^2 + B_{yS} (\dot{\gamma}_{yz} - \ddot{w})^2 + (v_y B_{xS} + v_x B_{yS}) (\gamma'_{xz} - w'') (\dot{\gamma}_{yz} - \ddot{w}) + \right. \\ \left. + T_{xyS} (\dot{\gamma}_{xz} + \gamma'_{yz} - 2\dot{w}')^2 + (B_{xu} + B_{xo}) w''^2 + (B_{yo} + B_{yu}) \ddot{w}^2 + \right. \\ \left. + 4(T_{xyu} + T_{xyo}) \dot{w}'^2 + v_y (B_{xu} + B_{xo}) w'' \ddot{w} + v_x (B_{yu} + B_{yo}) w'' \ddot{w} + \right. \\ \left. + A_{xz} \gamma_{xz}^2 + A_{yz} \gamma_{yz}^2 \right] ; \text{ Gl. 5-35}$$

Die Steifigkeiten des Werkstoffes Holz gehorchen nicht vollkommen den Gesetzen der „klassischen“ Elastizitätstheorie. Vor allem das Verhältnis von Schubmodul zu Elastizitätsmodul kann nicht in üblicher Weise nach Gleichung (5-36) beschrieben werden.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} ; \quad \text{Gl. 5-36}$$

Im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen ist es sinnvoll, die Querdehnzahlen ν_x und ν_y gleich Null zu setzen. Das ist auch durch den momentanen Kenntnisstand auf diesem Gebiet gerechtfertigt - auch wenn Anhaltswerte für Querdehnzahlen beispielsweise bei [3] und [20] gegeben sind. Damit vereinfacht sich der Energieausdruck:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iint_F \left[B_{xS} (\gamma'_{xz} - w'')^2 + B_{yS} (\dot{\gamma}_{yz} - \ddot{w})^2 + T_{xyS} (\dot{\gamma}_{xz} + \gamma'_{yz} - 2\dot{w}')^2 + \right. \\ \left. + (B_{xu} + B_{xo}) w''^2 + (B_{yo} + B_{yu}) \ddot{w}^2 + 4(T_{xyu} + T_{xyo}) \dot{w}'^2 + \right. \\ \left. + A_{xz} \gamma_{xz}^2 + A_{yz} \gamma_{yz}^2 \right] ; \quad \text{Gl. 5-37}$$

Die Gleitung γ wird von Stamm und Witte auf die Schwerachsen der Deckschichten bezogen und entspricht somit der bei der Schubanalogie angesetzten Gleitung $\gamma=w'_{\text{Q}}$. Der Abstand der Schwerachsen der Deckschichten wird in beiden Fällen mit dem Buchstaben a bezeichnet. Zusammenfassend werden die übrigen Kenngrößen nach [86] in die Terminologie der vorliegenden Arbeit übersetzt. Für die Schubfläche der Kernschicht mit der Schubsteifigkeit G_{xz} und der Dicke h gilt:

$$A_{xz} = G_{xz} \cdot \frac{a^2}{h} \equiv S_{xz} \quad \text{Gl. 5-38}$$

Die Summe der Biegesteifigkeiten der Deckschichten ($B_{xu}+B_{xo}$) entspricht dem Eigenanteil B_x^A . Der Steineranteil der Deckschichten wird in [86] „Sandwichbiegesteifigkeit“ B_{xS} genannt. Diese wird in Abhängigkeit der Schichtdicken t_u (unten) und t_o (oben) sowie der Abstände der Schwerachsen der Deckschichten zur Schwerachse des Gesamtquerschnitts (a_u, a_o) ermittelt:

$$B_{xS} = E_{xo} \cdot t_o \cdot a_o^2 + E_{xu} \cdot t_u \cdot a_u^2 \equiv B_x^B \quad \text{Gl. 5-39}$$

Die Zusammenhänge in y -Richtung erschließen sich analog. Für die „Eigentorsionssteifigkeiten“ (T_{xyo}, T_{xyu}) und die „Sandwichtorsionssteifigkeit“ (T_{xyS}) gilt:

$$\begin{aligned} T_{xyo} &= G_{xyo} \cdot \frac{t_o^3}{12} ; & T_{xyu} &= G_{xyu} \cdot \frac{t_u^3}{12} ; \\ T_{xyo} + T_{xyu} &\equiv \frac{B_{xy}^A}{2} ; \end{aligned} \quad \text{Gl. 5-40}$$

$$T_{xyS} = G_{xyo} \cdot t_o \cdot a_o^2 + G_{xyu} \cdot t_u \cdot a_u^2 \equiv \frac{B_{xy}^B}{2} ; \quad \text{Gl. 5-41}$$

Bezüglich der Verformungsbeziehungen lauten die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} (\gamma'_{xz} - w'')^2 &= (w'' - w''_{qx})^2 = w_{mx}''^2 ; \\ (\dot{\gamma}_{yz} - \ddot{w})^2 &= (\ddot{w} - \ddot{w}_{qy})^2 = \ddot{w}_{my}^2 ; \\ (\dot{\gamma}_{xz} + \gamma'_{yz} - 2\dot{w}')^2 &= (2\dot{w}' - 2\dot{w}'_{qxy})^2 = 4 \cdot \dot{w}_{mxy}'^2 ; \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. 5-35 führen die Umformungen auf die alternative Schreibweise für den Energieausdruck:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iint_F \left[B_x^B \cdot w_{mx}''^2 + B_y^B \cdot \ddot{w}_{my}^2 + 2 \cdot B_{xy}^B \cdot \dot{w}_{mxy}'^2 + \right. \\ \left. + B_x^A \cdot w''^2 + B_y^A \cdot \ddot{w}^2 + 2 \cdot B_{xy}^A \cdot \dot{w}'^2 + \right. \\ \left. + S_{xz} \cdot w_{qx}'^2 + S_{yz} \cdot \dot{w}_{qy}^2 \right] ; \quad \text{Gl. 5-42}$$

Daraus ergibt sich das elastische Potential pro Längeneinheit Π^* einer Sandwichplatte. Dieses entspricht dem elastischen Potential pro Längeneinheit zweier über die Verformung gekoppelten Platten gemäß der Schubanalogie.

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ B_x^A \cdot w''^2 + B_y^A \cdot \ddot{w}^2 + 2 \cdot B_{xy}^A \cdot \dot{w}'^2 + \right. \\ \left. + B_x^B \cdot w_{mx}''^2 + B_y^B \cdot \ddot{w}_{my}^2 + 2 \cdot B_{xy}^B \cdot \dot{w}_{mxy}'^2 + \right. \\ \left. + S_{xz} \cdot w_{qx}'^2 + S_{yz} \cdot \dot{w}_{qy}^2 \right\} \equiv \Pi_{ll,m,q,mt}^* ; \quad \text{Gl. 5-43}$$

Das bedeutet, die Theorie der Schubanalogie liefert für den zweiteiligen Verbundquerschnitt auch bezüglich Torsion (im Rahmen der vereinfachenden Annahmen) die exakte Lösung. Für andere Querschnittsaufbauten stellt sie eine Näherung dar. Zur Erfassung der Torsion werden im Ingenieurholzbau gewisse Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden (näheres siehe Kapitel 6.4). Deshalb kann die Methode der Schubanalogie im Rahmen der allgemein vorgenommenen Vereinfachungen durchaus auch für andere Querschnittsaufbauten als praktikabler Lösungsansatz betrachtet werden, solange sich die Steifigkeitsverhältnisse der Teilquerschnitte und Verbindungen nicht extrem unregelmäßig und unsymmetrisch verhalten. Generell bietet sich eine Abschätzung der vorhandenen Verhältnisse mittels passender Grenzwertbetrachtungen (z.B. $G_{it} \rightarrow 0$, $G_{it} \rightarrow G_{it, \text{Vollquerschnitt}}$) an. Allgemeingültige Aussagen über die Abweichungen in diesen Fällen sind nur schwer möglich. Der Aufwand für die dazu notwendigen Untersuchungen stünde in keinem Verhältnis zu der dadurch gewonnenen Genauigkeit. Sinngemäß sind jedoch die in Kapitel 5.5 bezüglich der Biegung abgeleiteten Aussagen übertragbar.

5.5 Anwendungsgrenzen bezüglich der Querschnittsgeometrie und der Steifigkeitsverhältnisse

5.5.1 Vorüberlegungen zum Einfluss der Fugensteifigkeiten auf das Tragverhalten von Verbundträgern

Für das Tragverhalten eines Verbundquerschnitts ist weniger der Absolutwert der Steifigkeiten, sondern die Relation zwischen Systemlänge, Biege- bzw. Dehnsteifigkeiten der Teilquerschnitte und den Steifigkeiten der Verbundfugen ausschlaggebend. Deshalb ist die Verknüpfung dieser Parameter auch für die Abweichungen der Schubanalogie entscheidend. Als Vorlauf zu den folgenden Studien wird dieser Sachverhalt anhand des im nächsten Kapitel näher beschriebenen Beispielquerschnitts erläutert. Bild 5.5-9 zeigt den Querschnitt des vierteiligen verdübelten Balkens. Unter Variation der Steifigkeit der zunächst identisch ausgebildeten Fugen werden die Ergebnisse gemäß der Schubanalogie mit Referenzwerten verglichen. Die einzelnen Teilquerschnitte selbst sind näherungsweise schubstarr. Für diese Voruntersuchung wird eine Belastung des Systems mit einer sinus-förmigen Streckenlast der Form $p(x)=p_0 \cdot \sin(\pi \cdot x/\ell)$ gewählt, da hierfür eine analytische, exakte Lösung vorliegt (siehe [73] und [74]). Sie ermöglicht die Erzeugung einer Vergleichsbasis mit hoher Genauigkeit. Darüber hinaus ist diese Laststellung günstig im Hinblick auf allgemeine Ableitungen. Die Schnittgrößen gemäß der Schubanalogie werden analytisch auf Basis der in Kapitel 4.5.3 genannten Beziehungen bestimmt, um generierungs- und programmtechnisch bedingte Abweichungen (Einfluss der Unterteilung, numerische bzw. programmspezifische Ungenauigkeiten etc.) von vornherein auszuschließen. Die Transformation zum ideellen System und die Spannungsermittlung erfolgen wie in Kapitel 4.2 und 4.3 beschrieben. Zur Berechnung der Referenzwerte kommt ein „erweitertes“ γ -Verfahren zum Einsatz. Nach [74] gilt für das „effektive“ statische Moment und das „effektive“ Trägheitsmoment eines aus vier identischen Teilen zusammengesetzten Querschnitts:

$$ef I = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n (\gamma_i \cdot A_i \cdot z_{si}^2); \quad \text{Gl. 5-44}$$

$$ef S_{i,i+1} = \sum_{j=1}^i (\gamma_j \cdot A_j \cdot z_{sj}); \quad \text{Gl. 5-45}$$

$$K = 1 + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{2 \cdot \ell^2 \cdot c}; \quad \text{Gl. 5-46}$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{2 \cdot K^2 - 1}; \quad \text{Gl. 5-47}$$

$$\gamma_1 = \gamma_4 = (2 \cdot K + 1) \cdot \frac{\gamma_2}{3}; \quad \text{Gl. 5-48}$$

Damit können der Schubfluss in den Verbundfugen, die Biegerandspannungen und die maximale Durchbiegung errechnet werden:

$$t_{i,i+1} = \frac{Q}{ef I} \cdot ef S_{i,i+1}; \quad \text{Gl. 5-49}$$

$$\sigma_{Ri} = -\frac{M}{ef I} \cdot \left(\gamma_i \cdot z_{si} \pm \frac{d_i}{2} \right); \quad \text{Gl. 5-50}$$

$$w_{\max} = -\frac{M_{\max} \cdot \ell^2}{\pi^2 \cdot E \cdot e f l};$$

Gl. 5-51

Die Parameterstudie wurde mit Hilfe einer Tabellenkalkulation durchgeführt. Allgemein zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse, was eine Bestätigung der Aussagen von Kapitel 5.2.3 darstellt. In Bild 5.5-1 sind die resultierenden Normalspannungsverläufe für ausgewählte Fugensteifigkeiten gezeigt.

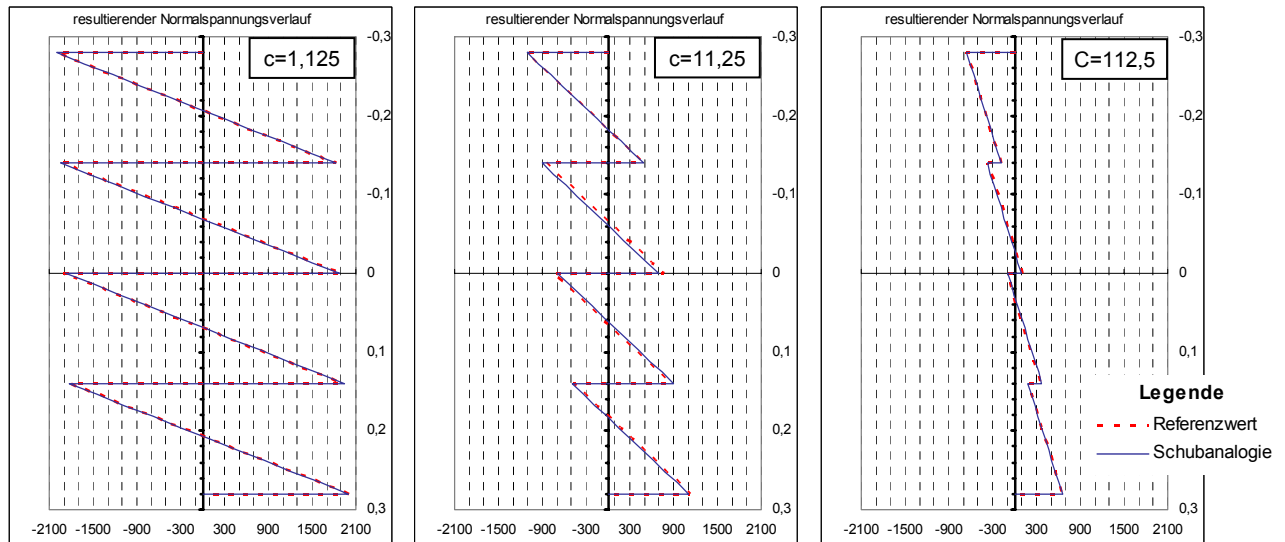


Bild 5.5-1: Normalspannungsverlauf am Verbundquerschnitt des Beispielträgers für verschiedene Fugensteifigkeiten [MPa·10³] (bei p₀=1kN). Vergleich der Lösung gemäß der Schubanalogie mit dem Referenzwert (γ-Verfahren, gestrichelt).

Die Verläufe sind nahezu identisch. Auch die Ergebnisse für die maximale Durchbiegung liegen nah beieinander. Zur Übersicht sind in Bild 5.5-2 die Maximalwerte der Biegerandspannungen und der Durchbiegung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit angetragen. In beiden Fällen ist die asymptotische Annäherung an die beiden Grenzfälle „starrer Verbund“ und „ohne Verbund“ gut zu erkennen.

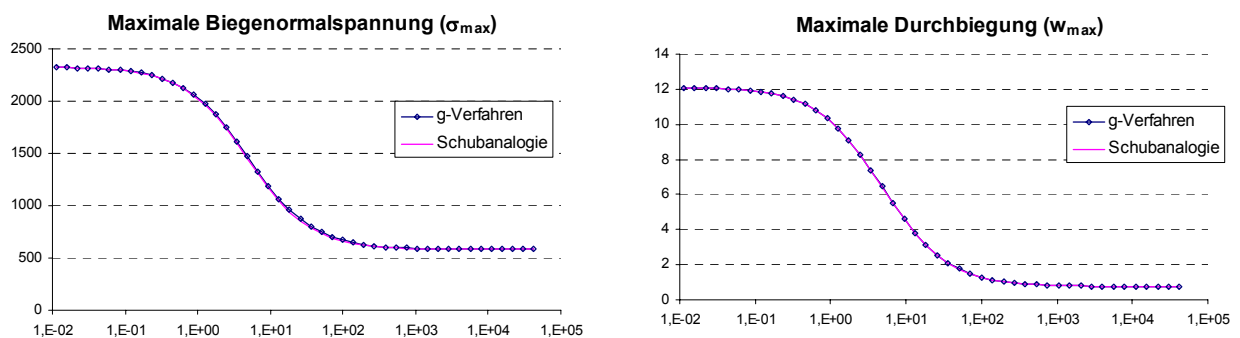


Bild 5.5-2: Vergleich der maximalen Biege­normalspannung [MPa·10³] und der maximalen Durchbiegung [mm] (bei p₀=1kN). Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert).

Die Verläufe für die Berechnungen nach der Schubanalogie sind nahezu deckungsgleich mit den Verläufen der Referenzwerte. In Bild 5.5-3 sind die auf den Referenzwert bezogenen Fehler in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit gezeigt. Wie man sieht, weicht die Biegespannung im untersuchten Beispiel höchstens rund 2% vom Referenzwert ab, während die Ergebnisse für die maximale Durchbiegung noch genauer sind.

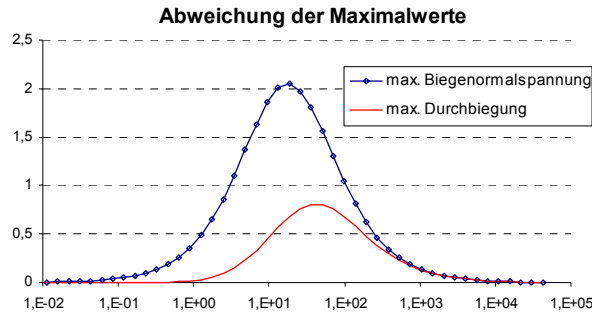


Bild 5.5-3: Abweichungen der Schubanalogie bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert)

Erwähnenswert sind allerdings die Abweichungen bezüglich des Schubflusses in der mittleren Verbundfuge. Diese erreichen mit abnehmender Fugensteifigkeit eine Größenordnung von bis zu 20% (bezogen auf den Referenzwert). Dieser Fehler erklärt sich aus dem in Kapitel 6.1 erörterten Einfluss der Schubdeformation auf die Schubspannungsverteilung. Je schubweicher ein Querschnitt ist, desto mehr nähert sich der Verlauf des Schubflusses im Grenzwert einer über die Querschnittshöhe in etwa konstanten Verteilung an. Üblicherweise wird zur Bestimmung des Schubflusses mit der Schubanalogie die Formel (4-22) eingesetzt, bei der der Steineranteil des Schubflusses (t^B) von einem Polygonzug, dessen Eckpunkte auf einer Parabel liegen, beschrieben wird. Die beobachteten Differenzen der Ergebnisse für den Fugenschub sind demnach weniger auf ein fehlerhaftes Ergebnis für die Querkraft Q^B , sondern mehr auf eine unpassende Verteilung der sich aus Q^B ergebenden, von den Verbundfugen zu übertragenden Schubkraft auf die einzelnen Fugen zurückzuführen. Ergänzend wurde aus der Querkraft Q^B ein zwischen den Schwerlinien der Randquerschnitte konstanter Schubfluss, wie er auch zur Ableitung der Schubsteifigkeit S angesetzt wurde (vgl. Kapitel 4), ermittelt. Diese Variante wird hier mit t_{const} bezeichnet und bestimmt sich wie folgt:

$$t_{\text{const}} = \frac{Q^B}{a} ; \quad \text{Gl. 5-52}$$

Der bezüglich des Fugenschubs beschriebene Effekt wird in Bild 5.5-6 verdeutlicht. Hier sind die Schubspannungsverläufe für ausgewählte Fugensteifigkeiten in ihre Anteile aufgegliedert dargestellt. Bild 5.5-4 zeigt den Verlauf des maximalen Fugenschubes (Schub in der mittleren Verbundfuge im Auflagerbereich) und die Abweichungen zur Referenzlösung in Abhängigkeit der Fugensteifigkeit (Abszisse). Gut zu erkennen ist, wie für sehr weiche Verbindungen ($c < 0,1$ MPa) die Variante mit konstantem Schubfluss und für sehr steife Verbindungen ($c > 1000$ MPa) die Lösung auf Grundlage der parabelförmigen Verteilung mit dem Referenzwert übereinstimmen. Dabei liefert letztere Methode die für eine Bemessung der Verbindung stets auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse.

Die gezeigten Kurven können auch dahingehend interpretiert werden, dass die entscheidenden Veränderungen und Abweichungen ungefähr in einem Bereich der Fugensteifigkeit von $1 \text{ MPa} \leq c \leq 100 \text{ MPa}$ anliegen. Angemerkt sei, dass die untere Grenze der Fugensteifigkeit für den untersuchten Träger aus Sicht der Praxis wenig relevant ist. Ein Wert von 1 MPa entspricht beispielsweise in etwa einer Fugenausbildung mit Nägeln des Durchmessers $d=2,5 \text{ mm}$, die einreihig in einem Abstand von $e \approx 50 \text{ cm}$ angeordnet sind. Dies ist für die Verbindung der vorliegenden Querschnittsteile unrealistisch schwach dimensioniert. Zudem ist anzuzweifeln, ob Nägel dieses Durchmessers überhaupt in der erforderlichen Länge ($L_{\text{eff}} > 170 \text{ mm}$) erhältlich und montagefähig sind. Eine glaubwürdige Variante „mittlerer“ Steifigkeit könnte beispielsweise durch Stabdübel mit einem Durchmesser von 16 mm realisiert werden. Bei einem Verbindungsmittelabstand von $e \approx 50 \text{ cm}$ liegt in etwa eine Steifigkeit von $c \approx 10 \text{ MPa}$ an. Von Schelling [73] wird für das Beispiel eine Verbindung mit Sonderdübeln („Geka $\varnothing 95$ “), die im Abstand von

$e=20$ cm angeordnet sind, gewählt. Er gibt einen Steifigkeitswert von $c=112,5$ MPa an, was für eine steife Verbindung spricht.

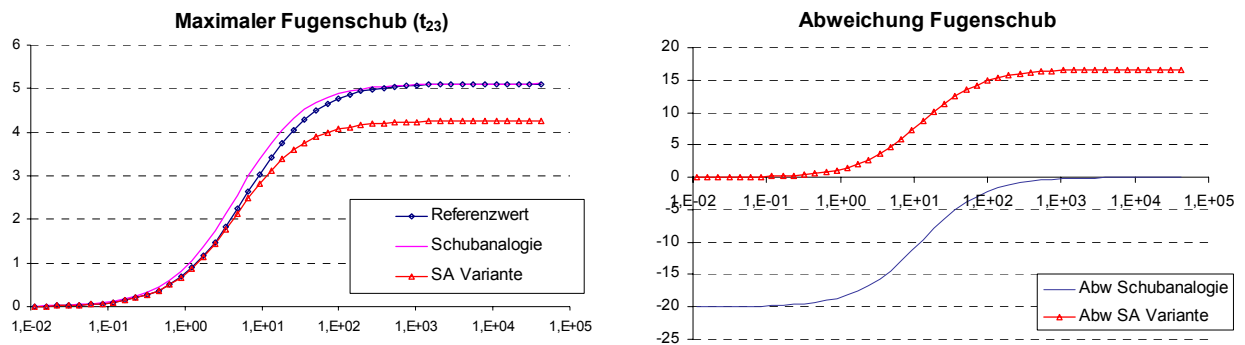


Bild 5.5-4: Vergleich der Ergebnisse für den maximalen Fugenschub [$\text{MN} \cdot 10^3/\text{m}$] (bei $p_0=1\text{kN}$) und Verlauf der auf die Referenzwerte bezogenen Abweichung [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert).

Aufgrund der Beobachtungen liegt ein Vorgehen nahe, bei dem zur Bestimmung der Schubverteilung aus der ideellen Querkraft Q^B in Abhängigkeit von den Steifigkeitsverhältnissen unterschiedliche Beziehungen angewendet werden. Für die Entscheidung, welche Formel die genauere Lösung liefert, ist ein möglichst allgemeines Kriterium von Interesse. Im vorliegenden Fall ist der Grenzwert bei einer Fugensteifigkeit von $c_{\text{grenz}}=14,6 \text{ MN}/\text{m}^2$ gegeben. Bei dieser Steifigkeit beträgt der absolute Fehler in beiden Fällen ca. 9 %. Die Absolutwerte der auf die Referenzlösung bezogenen Abweichungen sind in Bild 5.5-5 gezeigt. Hier sind die Aussagen von Bild 5.5-3 und Bild 5.5-4 im maßgebenden Bereich zusammengefasst.

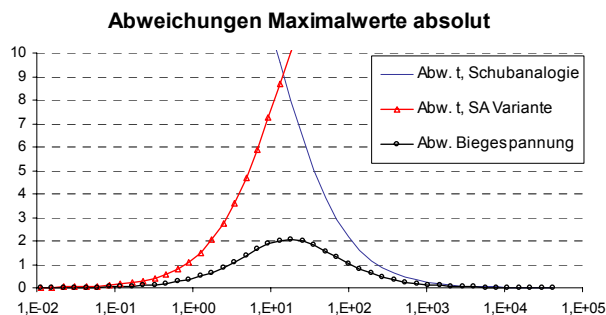
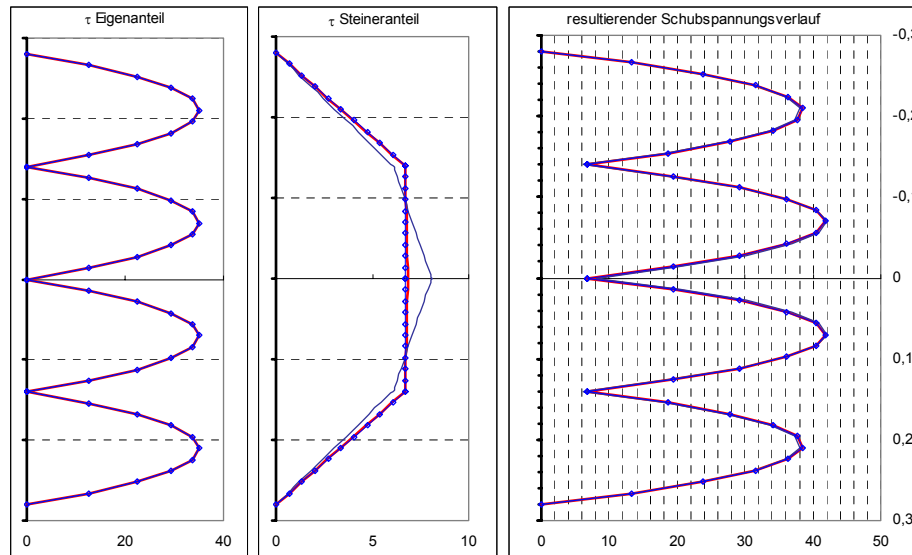
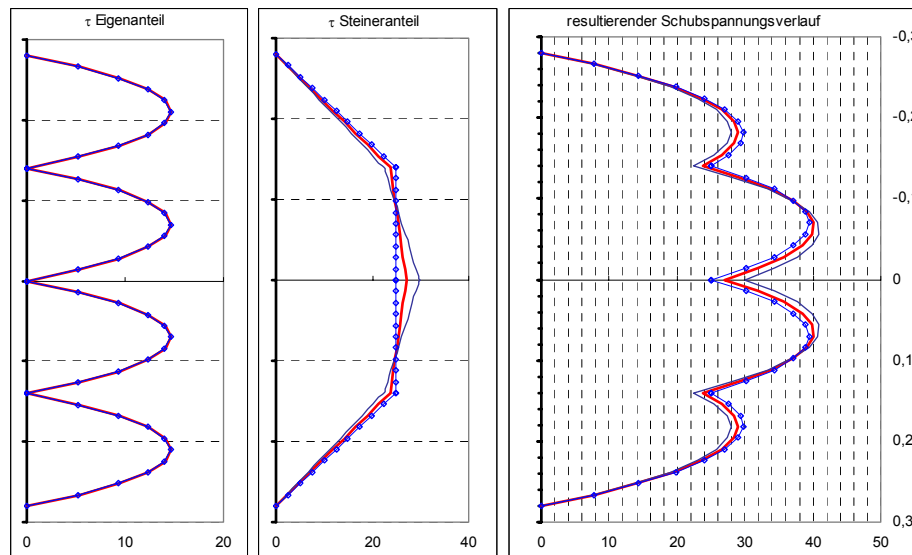


Bild 5.5-5: Absolutwerte für die Abweichungen [%] bezogen auf den maximalen Fugenschub und die maximale Biegespannung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse logarithmisch skaliert)

$c=1,125 \text{ [MN/m}^2\text{]}$



$c=11,25 \text{ [MN/m}^2\text{]}$



$c=112,5 \text{ [MN/m}^2\text{]}$

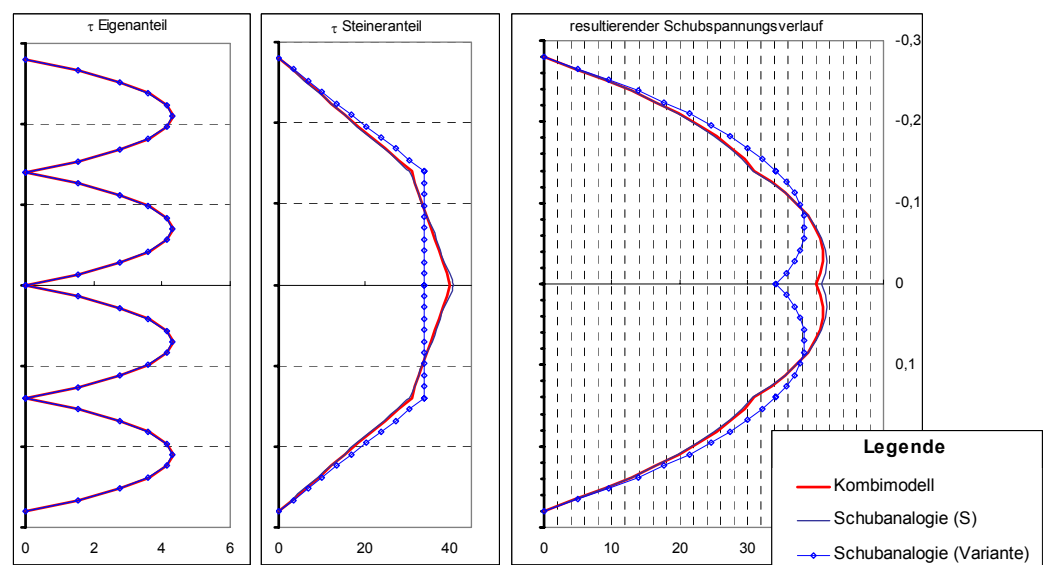


Bild 5.5-6: In ihre Anteile aufgegliederte Schubspannungsverläufe am Verbundquerschnitt des Beispielträgers für verschiedene Fugensteifigkeiten $[\text{MPa} \cdot 10^3]$ (bei $p_0=1\text{kN}$). Vergleich der Lösung gemäß der Schubanalogie mit dem Referenzwert (γ -Verfahren, gestrichelt).

Die mit Bild 5.5-5 gezeigte Grafik gilt für den Beispielträger; ihr prinzipieller Verlauf ist aber allgemeingültiger Natur. Durch entsprechende Umformungen kann eine Beziehung, die allgemein für Verbundquerschnitte aus vier gleichen Teilen ($d_i=d$, $E_i=E$, $b_i=b$, $c_i=c$) gültig ist, abgeleitet werden. Für diesen Sonderfall vereinfacht sich die in Kapitel 4 beschriebene Ermittlung der ideellen Steifigkeiten:

$$\begin{aligned} B^A &= E \cdot \frac{b \cdot d^3}{3} ; \\ B^B &= 5 \cdot E \cdot b \cdot d^3 ; \\ S &= 3 \cdot d^2 \cdot c ; \end{aligned} \quad \text{Gl. 5-53}$$

Für das gewichtete statische Moment und den Schubfluss t_{23} an der maßgebenden Schubfuge gilt damit:

$$SE_{23} = 2 \cdot d^2 \cdot b \cdot E ; \quad \text{Gl. 5-54}$$

$$t_{23} = \frac{2}{5} \cdot \frac{Q^B}{d} ; \quad \text{Gl. 5-55}$$

Im Falle der Variante mit konstanter Verteilung lautet die Beziehung für den Fugenschub:

$$t_{23,\text{const}} = \frac{Q^B}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q^B}{d} ; \quad \text{Gl. 5-56}$$

Die maximale Querkraft Q^B ist mit Gleichung (4-114) gegeben. Die Referenzlösung (5-49) kann für den betrachteten Sonderfall wie folgt ausformuliert werden:

$$t_{23}^{\text{Ref}} = 3 \cdot Q \cdot \frac{\ell^2 \cdot c \cdot (4 \cdot c \cdot \ell^2 + \pi^2 \cdot E \cdot A_i)}{d \cdot (32 \cdot c^2 \cdot \ell^4 + 13 \cdot c \cdot \ell^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i + \pi^4 \cdot E^2 \cdot A_i^2)} ; \quad \text{Gl. 5-57}$$

Aus den Verhältniswerten ergeben sich die Zusammenhänge für die Abweichungen A_1 und A_2 .

$$A_1 = \left| 1 - \frac{t_{23}}{t_{23}^{\text{Ref}}} \right| = \left| 1 - 6 \cdot \frac{32 \cdot c^2 \cdot \ell^4 + 13 \cdot c \cdot \ell^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i + \pi^4 \cdot E^2 \cdot A_i^2}{(48 \cdot c \cdot \ell^2 + 5 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i) \cdot (4 \cdot c \cdot \ell^2 + \pi^2 \cdot E \cdot A_i)} \right| ; \quad \text{Gl. 5-58}$$

$$A_2 = \left| 1 - \frac{t_{23,\text{const}}}{t_{23}^{\text{Ref}}} \right| = \left| 1 - 5 \cdot \frac{32 \cdot c^2 \cdot \ell^4 + 13 \cdot c \cdot \ell^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i + \pi^4 \cdot E^2 \cdot A_i^2}{(48 \cdot c \cdot \ell^2 + 5 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i) \cdot (4 \cdot c \cdot \ell^2 + \pi^2 \cdot E \cdot A_i)} \right| ; \quad \text{Gl. 5-59}$$

A_1 beschreibt die auf den Referenzwert bezogenen Abweichungen für den nach der Schubanalogie auf „klassische“ Weise ermittelten Fugenschub t_{23} ; die Funktion A_2 gilt für den Fall, dass ein konstanter Schubfluss angenommen wird. Durch Gleichsetzen erhält man die Fugensteifigkeit c_{grenz} , bei der beide Lösungen den gleichen Fehlerwert aufweisen:

$$c_{\text{grenz}} = \frac{(7 + \sqrt{177}) \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i}{64 \cdot \ell^2} ; \quad \text{Gl. 5-60}$$

Für eine allgemeine Formulierung bietet es sich an, die Zusammenhänge in Abhängigkeit vom Verhältnis einer mit der Schubanalogie bestimmten „effektiven“ Biegesteifigkeit zur Biegesteifigkeit bei starrem Verbund zu beschreiben.

$$V_{EI} = \frac{B_{ef}^{SA}}{B_{Starr}} = \left(B^A + \frac{1}{\frac{1}{B^B} + \frac{\pi^2}{S \cdot \ell^2}} \right) / (B^A + B^B); \quad \text{Gl. 5-61}$$

$$A_1 = \left| 1 - \frac{t_{23}(V_{EI})}{t_{23}^{Ref}(V_{EI})} \right| = \left| 1 - \frac{9824 \cdot V_{EI}^2 + 1427 \cdot V_{EI} - 1}{150 \cdot V_{EI} \cdot (68 \cdot V_{EI} + 7)} \right|; \quad \text{Gl. 5-62}$$

$$A_2 = \left| 1 - \frac{t_{23, const}(V_{EI})}{t_{23}^{Ref}(V_{EI})} \right| = \left| 1 - \frac{9824 \cdot V_{EI}^2 + 1427 \cdot V_{EI} - 1}{180 \cdot V_{EI} \cdot (68 \cdot V_{EI} + 7)} \right|; \quad \text{Gl. 5-63}$$

Der Grenzwert für einen nahezu unverbundenen Träger ($V_{EI} \rightarrow B^A / (B^A + B^B)$) führt auf eine maximale Abweichung von 20 %, was dem Ergebnis der Parameterstudie entspricht. Der Schnittpunkt der beiden Funktionen liefert das entscheidende Verhältnis $V_{EI, \text{Grenz}}$. An dieser Stelle nimmt die Abweichung in beiden Fällen den Wert 1/11 an.

$$V_{EI, \text{Grenz}} = \frac{3097 + 225 \cdot \sqrt{177}}{28672} \approx 0,227; \quad \text{Gl. 5-64}$$

Der Verlauf der beiden Funktionsgraphen ist mit Bild 5.5-7 im maßgebenden Ausschnitt dargestellt.

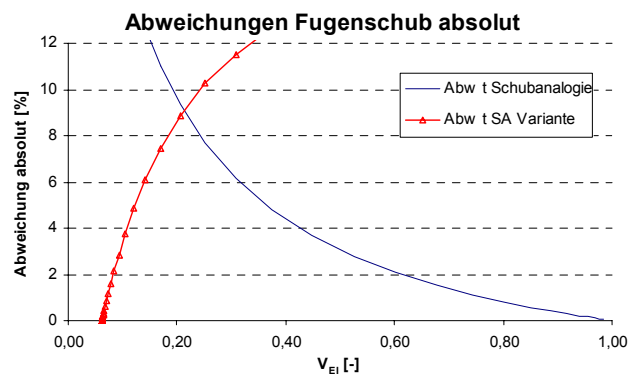


Bild 5.5-7: Absolutwerte der Abweichungen [%] für den maximalen Fugenschub in Abhängigkeit vom Verhältnis V_{EI} [-]

In Bild 5.5-8 sind die Verläufe für die Abweichungen der maximalen Biegespannung und der maximalen Durchbiegung in Abhängigkeit von dem Verhältnis V_{EI} gezeigt.

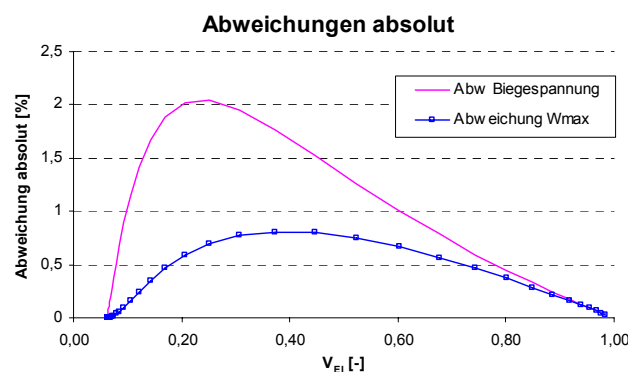


Bild 5.5-8: Absolutwerte der Abweichungen [%] für die maximale Biegespannung und die maximale Durchbiegung in Abhängigkeit vom Verhältnis V_{EI} [-]

Ergänzend seien noch die Beziehungen für fünfteilige Querschnitte angeführt. Für die mit der Schubanalogie bestimmten maximalen Schubflüsse gilt in diesem Fall:

$$t_{23} = \frac{3}{10} \cdot \frac{Q^B}{d}; \quad \text{Gl. 5-65}$$

$$t_{23, \text{const}} = \frac{Q^B}{a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q^B}{d}; \quad \text{Gl. 5-66}$$

Die genaue Lösung wird mit folgenden Nachgiebigkeitsfaktoren (vgl.: [74], Druckfehler für γ_2 korrigiert) bestimmt:

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \frac{K^2 + K/2 - 1/4}{4 \cdot K^4 - 3 \cdot K^2 + 1/4}; \quad \text{Gl. 5-67}$$

$$\gamma_1 = \gamma_5 = K \cdot \gamma_2; \quad \text{Gl. 5-68}$$

Für die auf das Verhältnis V_{EI} bezogenen Abweichungen gilt nun:

$$A_1 = \left| 1 - \frac{t_{23}(V_{EI})}{t_{23}^{\text{Ref}}(V_{EI})} \right| = \left| 1 - \frac{12575 \cdot V_{EI}^2 + 1826 \cdot V_{EI} - 1}{200 \cdot V_{EI} \cdot (65 \cdot V_{EI} + 7)} \right|; \quad \text{Gl. 5-69}$$

$$A_2 = \left| 1 - \frac{t_{23, \text{const}}(V_{EI})}{t_{23}^{\text{Ref}}(V_{EI})} \right| = \left| 1 - \frac{12575 \cdot V_{EI}^2 + 1826 \cdot V_{EI} - 1}{240 \cdot V_{EI} \cdot (65 \cdot V_{EI} + 7)} \right|; \quad \text{Gl. 5-70}$$

Die Funktionsgraphen sind den für den vierteiligen Träger gültigen Verläufen (Bild 5.5-7) sehr ähnlich. In beiden Fällen lautet der Grenzwert für einen nahezu unverbundenen Träger ($V_{EI} \rightarrow B^A/(B^A+B^B)$) $A_{1, \text{max}}=20\%$. Auch die Abweichung am Schnittpunkt der beiden Grafen ist mit $A_{1, \text{Schnitt}}=A_{2, \text{Schnitt}}=1/11 \approx 9\%$ identisch. Das zugehörige Verhältnis $V_{EI, \text{Grenz}}$ lautet beim fünfteiligen Querschnitt:

$$V_{EI, \text{grenz}} = \frac{1643 + 24 \cdot \sqrt{4349}}{17675} \approx 0,1825; \quad \text{Gl. 5-71}$$

Die erläuterten Zusammenhänge gelten für den Einfeldträger unter „Sinuslast“ mit Querschnitten, welche aus vier bzw. fünf identischen nachgiebig miteinander verbundenen Teilen zusammengesetzt sind. In einer ersten Näherung können die Beziehungen auch auf andere Lastkonstellationen und Querschnitte, die aus noch mehr Einzelteilen zusammensetzt sind, angewendet werden. Aus der Anschauung lässt sich ein Grenzwert für den maximal möglichen Fehler bezogen auf den maximalen Fugenschub festlegen. Im Grenzfall besteht der Verbundquerschnitt aus unendlich vielen, sehr weich verbundenen Teilen bzw. Lamellen. Dann beschreibt der mit der Schubanalogie errechnete Steineranteil des Schubflusses über die Querschnittshöhe gesehen eine Parabel. In Wirklichkeit ist in diesem Grenzfall die gegenseitige Verschiebung an allen Verbundfugen annähernd gleich groß, weshalb die wirkliche Verteilung des Schubflusses nahezu konstant ist. Aus den Formbeiwerten dieser beiden Verläufe ergibt sich die maximal mögliche Abweichung A_{max} .

$$A_{\text{max}} = \lim_{n \rightarrow \infty, c \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{t_{\text{max}}^{\text{SA}}}{t_{\text{max}}^{\text{Ref}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty, c \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{1,5 \cdot \frac{Q^B}{n \cdot d}}{\frac{Q^B}{(n-1) \cdot d}} \right| = 0,5 \equiv 50\%; \quad \text{Gl. 5-72}$$

Für eine Bemessung liegt das Ergebnis auf der sicheren Seite. Im Regelfall werden bei identischen Fugensteifigkeiten auch alle Fugen identisch ausgeführt werden. Dann ist für die Bemessung stets

die mittlere Fuge maßgebend. Die Tatsache, dass in den Randbereichen zu geringe Werte ermittelt werden, fällt somit nicht ins Gewicht.

5.5.2 Vergleichsrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“

Der bereits für die Voruntersuchungen eingesetzte Verbundträger sei im Weiteren mit einer mittigen Einzellast beaufschlagt. In dieser Form findet sich das Beispiel auch in der Literatur wieder ([73], [69]). Die dort genannten Ergebnisse werden den Ergebniswerten einer Berechnung mit der Schubanalogie gegenüber gestellt. Zusätzlich wird eine Gegenrechnung auf Basis eines Fachwerkmodells vorgenommen. Dazu wird das von Hartmann in [29] vorgestellte „kombinierte“ Modell verwendet. Es dient im Weiteren zur Bestimmung von Referenzwerten bei den Untersuchungen der folgenden Abschnitte. Bei diesen werden die Trägerabmessungen bzw. Dehnsteifigkeiten sowie die Fugensteifigkeiten variiert, um eine Grundlage für weitergehende Aussagen bezüglich der Anwendungsgrenzen der Schubanalogie zu erhalten.

Bei dem Beispielsystem handelt es sich um einen Einfeldträger mit einer Spannweite von 6 m, der durch eine zentrische Einzellast P beaufschlagt ist. Der Querschnitt besteht aus vier Teilquerschnitten mit Abmessungen von jeweils $b \times h = 12 \times 14 \text{ cm}^2$. Der Elastizitätsmodul der Teilquerschnitte ist in [73] mit $E = 10^5 \text{ kp/cm}^2 (\equiv 10^4 \text{ MN/m}^2)$ und die Schubsteifigkeit der Verbundfugen ist mit $c_{i,i+1} = 1125 \text{ kp/cm}^2 (\equiv 112,5 \text{ MN/m}^2)$ angegeben. System und Querschnitt des „vierteiligen verdübelten Balkens“ sind in Bild 5.5-9 gezeigt. Dieses Beispiel wurde von Schelling auf Basis der Verformungsbeziehungen und der Differentialgleichungen der Biegelinie berechnet [73], während Roik und Sedlacek in [69] eine auf der Analogie zur Wölbkrafttorsion basierende Lösung vorgestellt haben (vgl.: Kapitel 4.1). Bezüglich der Schubdeformation wurden in beiden Fällen ausschließlich die Verschiebungen in der Verbundfuge berücksichtigt.

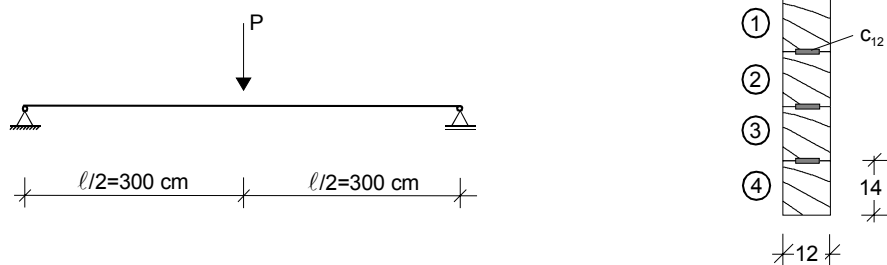


Bild 5.5-9: Statisches System und Querschnitt des Beispiels „vierteiliger verdübelter Balken“

Für eine Berechnung gemäß der Schubanalogie, bei der die Schubdeformationen der Teilquerschnitte selbst vernachlässigt werden, ergeben sich folgende Eingangsgrößen:

$$B^A = 1,098 \text{ MNm}^2 ; \quad B^B = 16,464 \text{ MNm}^2 ; \quad S = 6,615 \text{ MN};$$

Mit (5-61) bestimmt sich zum Vergleich ein Verhältniswert von $V_{EI} \approx 0,62$, was auf eine relativ steife Verbindung hinweist. Wie aus Bild 5.5-7 und Bild 5.5-8 ersichtlich ist, sind die zu erwarteten Abweichungen gering.

Anhand der in 4.5.5 abgeleiteten Beziehungen werden die ideellen Schnittgrößen analytisch bestimmt. Für das konkrete Beispiel ergeben sich damit am ideellen System die in Bild 5.5-10 abgebildeten Schnittgrößenverläufe. Es wurde wieder die aus Kapitel 4.5 bekannte Darstellungsweise gewählt. Die Biegemomente in Feldmitte nehmen die Werte $M^A(3 \text{ m}) = 0,279 \cdot m \cdot P$ und $M^B(3 \text{ m}) = 1,221 \cdot m \cdot P$ an. Die Querkraftaufteilung am Auflager lautet $Q^A(0) = 0,032 \cdot P$ und $Q^B(0) = 0,468 \cdot P$.

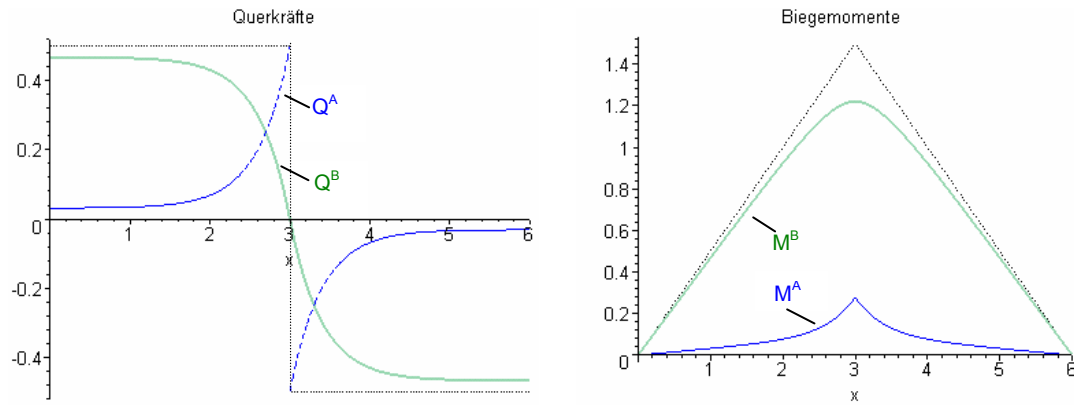


Bild 5.5-10: Schnittgrößen am ideellen System für das Beispiel „verdübelter Balken“

Bei einer numerischen Berechnung mit dem „kombinierten Modell“ werden die Teilquerschnitte eines Verbundquerschnitts als Stabelemente generiert. Um die nachgiebige Verbindung zu erfassen, sind diese über Fachwerkstäbe und Federelemente verbunden, wie in Bild 5.5-11 gezeigt ist.

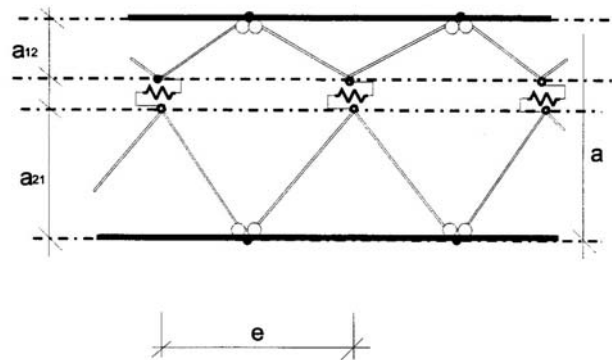


Bild 5.5-11: Ausschnitt, Erfassung eines zweiteiligen Verbundträgers mit dem kombinierten Fachwerkmodell (Quelle [29])

Die maßgebenden Ergebnisse einer Berechnung nach diesem Modell sind Biegemomente (M_i), Normalkräfte (N_i) und Querkkräfte (Q_i) der Teilquerschnitte sowie Federkräfte ($F_{c,i,i+1}$) an den Federverbindungen der Fachwerkelemente. Bild 5.5-14 zeigt den Verlauf dieser Größen für das Beispiel des verdübten Balkens bei einer Last von $P=1000$ kN (gewählte Unterteilung: 90 Teilstäbe je Teilquerschnitt). Daraus lässt sich die Spannungsverteilung am Verbundquerschnitt bestimmen. Im Zusammenhang mit den Untersuchungen dieser Arbeit liegt es nahe, dabei nach Eigen- und Steineranteilen zu unterscheiden. Die Summe beider Anteile liefert die resultierende Spannungsverteilung.

$$\sigma_i^A(z_i) = \frac{M_i}{I_i} \cdot z_i; \quad \text{mit } -\frac{d_i}{2} \leq z_i \leq \frac{d_i}{2} \quad \text{Gl. 5-73}$$

$$\sigma_i^B = \frac{N_i}{A_i}; \quad \text{Gl. 5-74}$$

$$\tau_i^A(z_i) = \frac{Q_i}{I_i} \cdot \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{d_i^2}{8} \right); \quad \text{Gl. 5-75}$$

$$\tau_i^B(z_i) = \frac{F_{c,i,i+1} - F_{c,i,i-1}}{e \cdot b_i} \cdot \frac{z_i}{d_i} + \tau_i^0; \quad \text{Gl. 5-76}$$

In Bild 5.5-12 und Bild 5.5-13 sind die Spannungsverteilungen für das Beispiel an den jeweils bemessungsrelevanten Stellen gezeigt. Die Werte aus der Berechnung nach dem kombinierten Modell sind gestrichelt, die Spannungen gemäß der Schubanalogie mit durchgehenden Linien angetragen. Die Ermittlung der Spannungen erfolgte mit Hilfe einer Tabellenkalkulation unter Verwendung der in Kapitel 4 genannten Formeln.

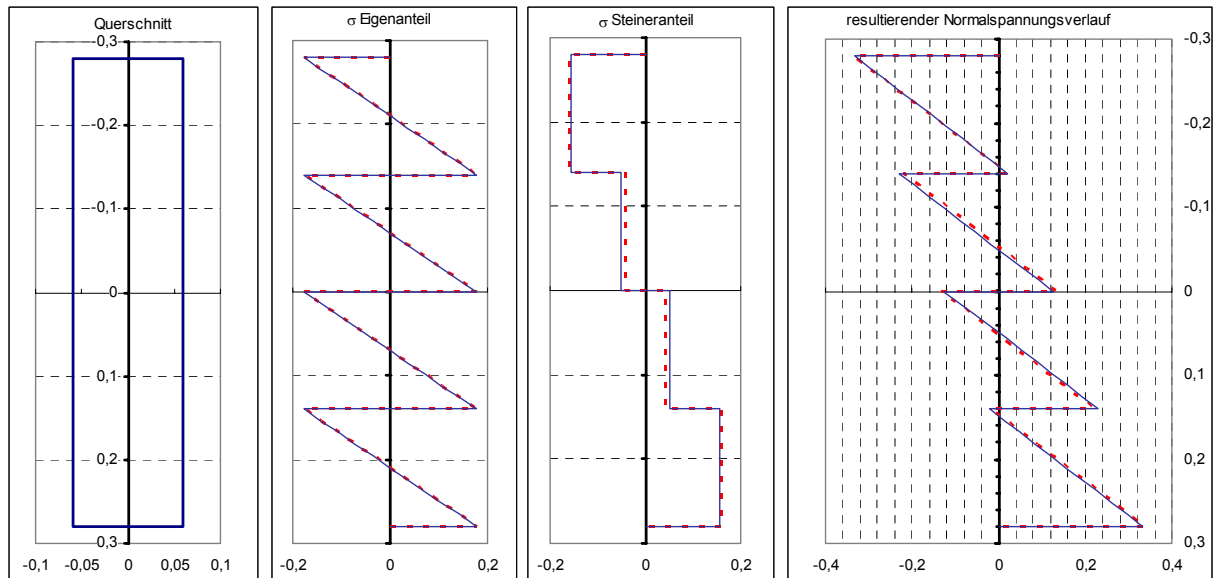


Bild 5.5-12: Vergleich der Ergebnisse für die Normalspannungsverteilung am verdübelten Balken in Feldmitte. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.

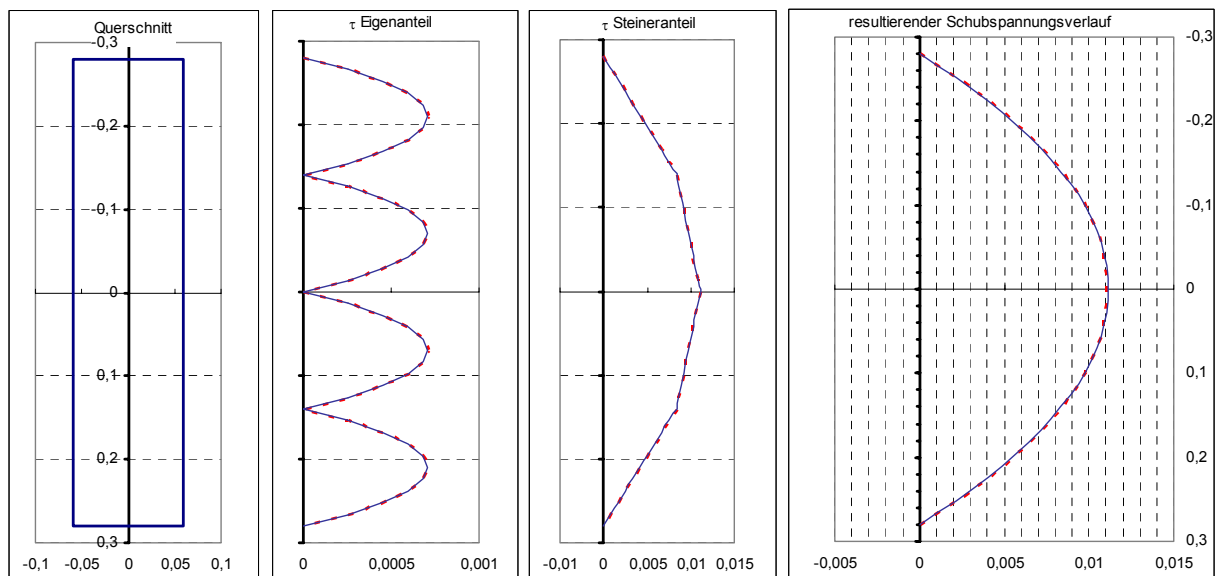


Bild 5.5-13: Vergleich der Ergebnisse für die Schubspannungsverteilung am verdübelten Balken im Auflagerbereich. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.

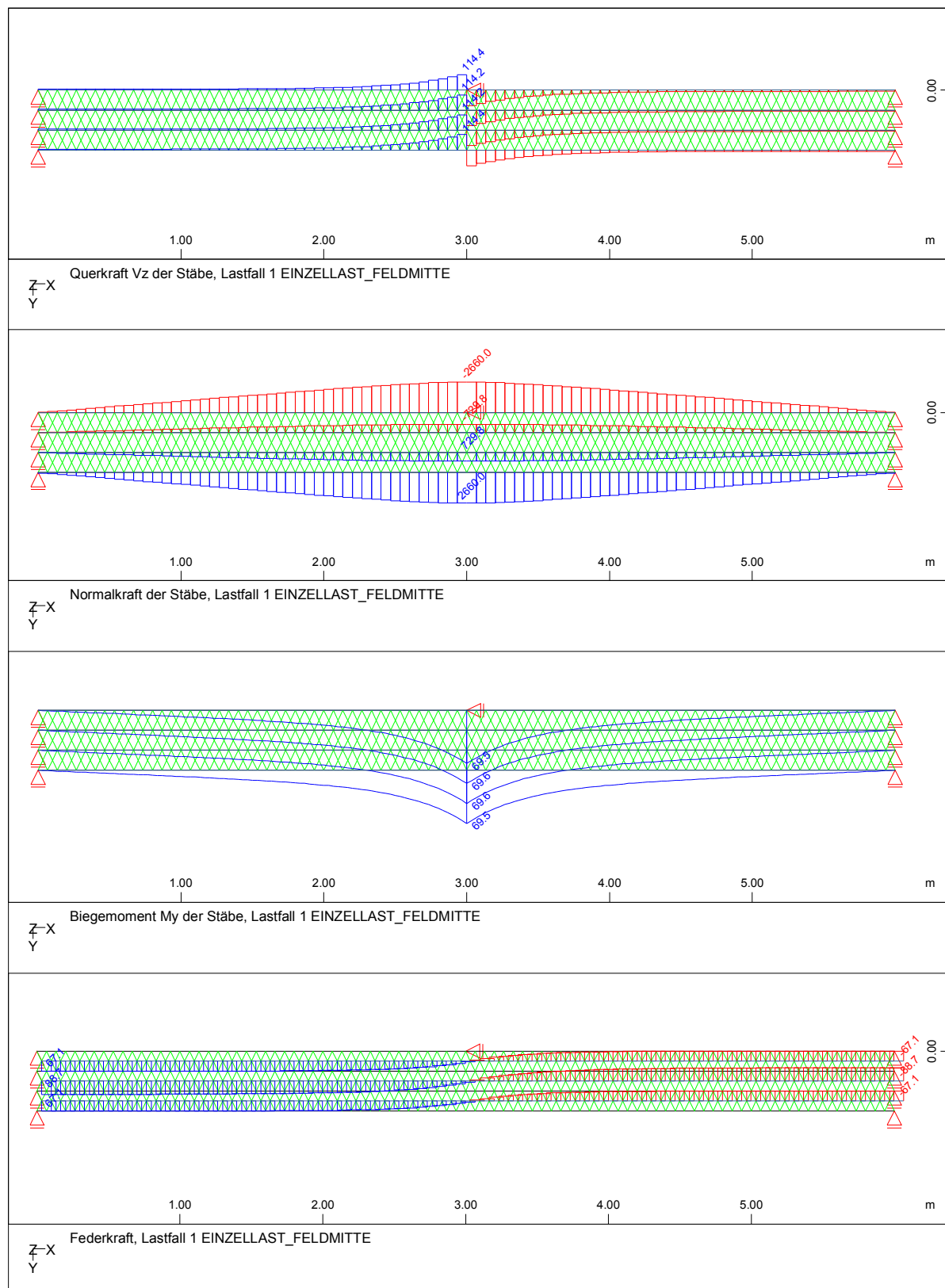


Bild 5.5-14: Programmausdruck der Ergebnisse gemäß dem kombinierten Modell für den vierteiligen verdübelten Balken bei einer Last von $P=1000 \text{ kN}$

Die Ergebnisse der beiden Methoden weichen kaum voneinander ab und stimmen gut mit den in der Literatur genannten Werten ([73], [69]) überein, was auch eine Bestätigung der in Kapitel 5.2.3 erschlossenen Aussagen darstellt. Zur Übersicht sind die maßgebenden Werte in Tabelle 1 zusammengestellt.

Vergleichsgröße	„Schelling exakt“ [73]	„Schelling Näherung“ [73]	„Roik-Sedlacek“ [69]	Kombiniertes Modell	Schubanalogie
$\sigma_{\max}$ [MPa]	0,340 · P[kN]	0,270 · P[kN]	0,3375 · P[kN]	0,33571 · P[kN]	0,33348 · P[kN]
$\tau_{\max}$ [MPa]	0,01108 · P[kN]	0,01042 · P[kN]	%	0,01109 · P[kN]	0,01115 · P[kN]
$w_{\max}$ [mm]	0,431 · P[kN]	0,415 · P[kN]	%	0,43244 · P[kN]	0,42933 · P[kN]

Tabelle 1: Ergebnisvergleich Beispielrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“. Werte pro kN der Last P in Feldmitte.

5.5.3 Vergleichsrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“ - Variation der Fugensteifigkeiten

5.5.3.1 Theoretisch „exakte“ Lösung

Es werden die Steifigkeitsverhältnisse am soeben vorgestellten Beispielträger variiert, um die Ursachen und die Größenordnung der Abweichungen der Schubanalogie zu verdeutlichen und Anwendungsgrenzen abzustecken. Bei ungleichmäßiger Verteilung der Steifigkeiten liefert die Schubanalogie nicht die exakte Lösung (vgl.: Kapitel 5.2.2) - es sei denn, die Fugensteifigkeiten gehorchen Gleichung (5-26) und es wird die aus der Energieäquivalenz abgeleitete Schubsteifigkeit S_k (5-27) angesetzt. Unter Vorgabe der Schubsteifigkeit des vorangegangenen Beispiels ($S_k=6,615$ MN) müssen die Fugensteifigkeiten folgende Werte annehmen, um diesen Forderungen zu genügen:

$$c_{12} = c_{34} = 115,0 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}; \quad c_{23} = 135,0 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}; \quad \text{Gl. 5-77}$$

Eine Berechnung des Beispielträgers mit dieser Steifigkeitsverteilung bietet sich als zusätzliche Kalibrierung bzw. Überprüfung des kombinierten Modells an. Der Träger wurde mit dem kombinierten Modell und mit der Schubanalogie berechnet. Dabei wurden für die Schubsteifigkeit die energieäquivalente Schubsteifigkeit S_k („exakte Lösung“) und zum Vergleich die „konventionelle“ Schubsteifigkeit S (4-7) (Näherungslösung) angesetzt. In Tabelle 2 sind die wichtigsten Ergebnisgrößen bei einer Last von $P=1$ MN zusammengestellt. Wie man sieht, stimmen die Werte gemäß dem kombinierten Modell sehr gut mit der exakten Lösung überein (Abweichung < 0,4%). Das bestätigt die Eignung dieses Modells zur Erzeugung von Referenzwerten mit ausreichender Genauigkeit im Hinblick auf die noch folgenden Untersuchungen. Auch die Ergebnisse unter Ansatz der „konventionellen“ Schubsteifigkeit S liegen sehr nahe an der exakten Lösung. Die größte Abweichung beträgt ca. 0,6% und bezieht sich auf die Biegespannung. Sie erklärt sich auch daraus, dass aufgrund der Elemententeilung (Teilstablänge $e=6,667$ cm) beim Fachwerkmodell nicht genau das Biegemoment unter der Einzellast, sondern ein gemittelter Wert ausgegeben wird.

Vergleichsgröße	Kombiniertes Modell	Schubanalogie, „exakt“ (Ansatz S_k)	Schubanalogie („konventionell“)
$\sigma_{\max}$ [MPa]	332,299	333,483	334,353
$\tau_{\max}$ [MPa]	11,150	11,149	11,149
$t_{\text{Fuge, max}}$ [MN/m]	1,338	1,338	1,338
$w_{\max}$ [mm]	429,600	429,337	432,297

Tabelle 2: Ergebnisvergleich Beispielrechnung „vierteiliger verdübelter Balken“ mit „exakter“ Schubsteifigkeitsverteilung.

In Bild 5.5-15 sind die Spannungsverteilungen des Rechenlaufes an den bemessungsrelevanten Bereichen gezeigt. Bei der gewählten Auflösung sind die Graphen allerdings nahezu deckungsgleich.

Anmerkung: Die Last wurde vergleichsweise groß gewählt ($P=1\text{ MN}$) um „handliche“ Ergebniswerte zu erhalten. Die zum Teil deutlichen Überschreitungen von Festigkeiten werden bewusst in Kauf genommen, da es sich nicht um ein Bemessungsbeispiel handeln soll.

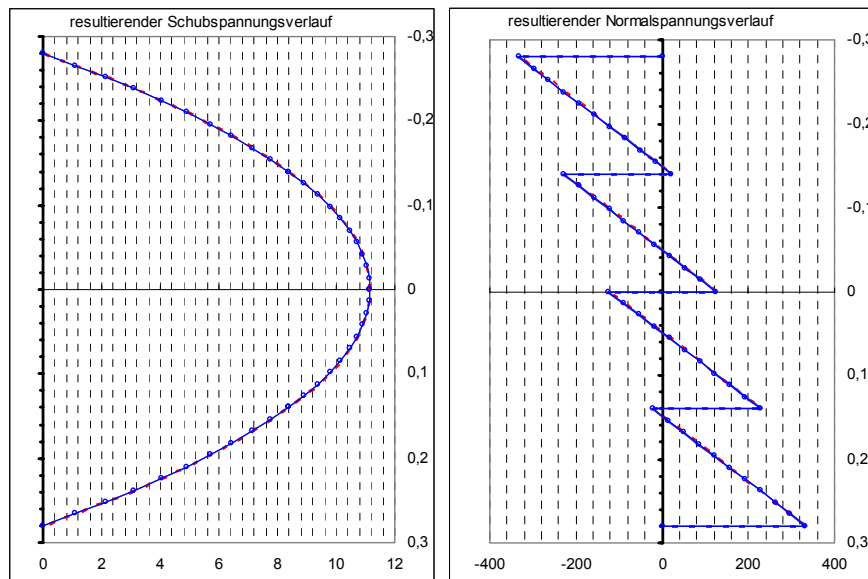


Bild 5.5-15: Vergleich der Spannungsverteilungen an den bemessungsrelevanten Stellen. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.

5.5.3.2 Variation der Steifigkeiten in den Verbundfugen bei identischen Fugensteifigkeiten

Als Ergänzung zu den für die Vorüberlegung (Kapitel 5.5.1) durchgeführten Berechnungen wird auch für den Lastfall „Einzellast“ der Einfluss der Variation der Fugensteifigkeiten bei identischen Fugen analysiert. Die Referenzwerte werden mit dem kombinierten Modell erzeugt. Bild 5.5-16 zeigt den Verlauf und die Abweichung für die Normal- und Schubspannungen in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit, wobei die berechneten Einzelwerte linear verbunden sind. Die zur Schubspannung und zum Schubfluss gehörenden Verläufe sind in Bild 5.5-17 abgebildet. Tendenziell ist dasselbe Verhalten wie unter der sinusförmigen Last zu beobachten. Auffällig sind die Differenzen bezüglich der maximalen Normalspannung im Bereich großer Fugensteifigkeiten. Eigentlich müssten die Ergebnisse beider Methoden für unendlich große Fugensteifigkeiten übereinstimmen. Diese Unstimmigkeit erklärt sich wieder aus dem bereits beschriebenen Einfluss der Elemententeilung des „kombinierten Trägers“ (vgl.: Kapitel 5.5.3.1). Je steifer die Verbindung, desto kürzer ist die zur Lastübertragung zwischen den einzelnen Teilträgern benötigte Länge und desto größer wird der Fehler eines Mittelwertes der Biegespannung im Bereich der Last.

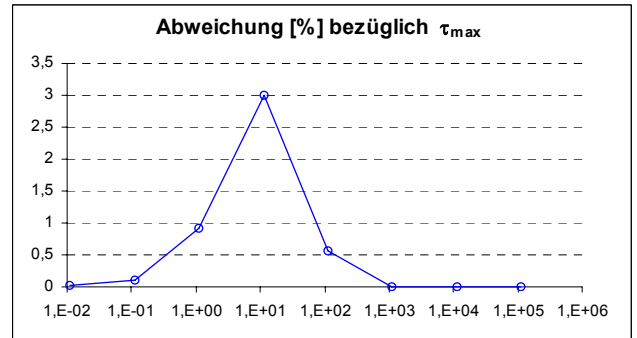
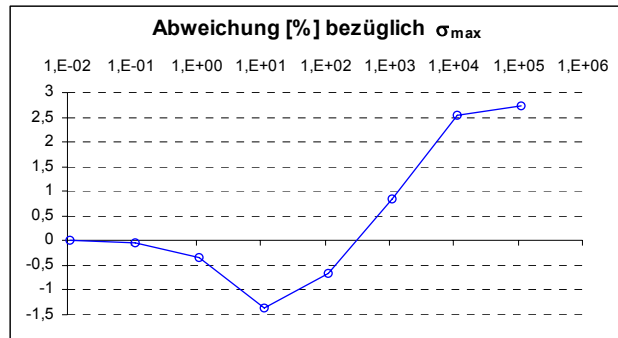
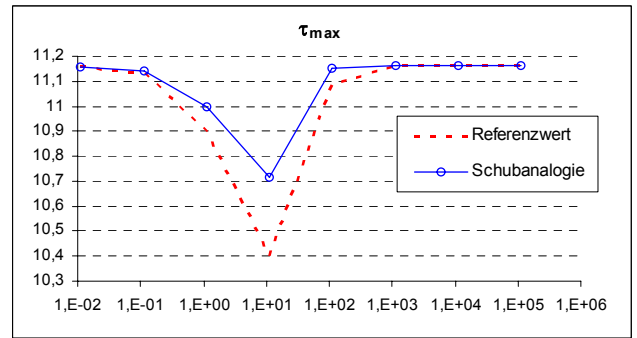
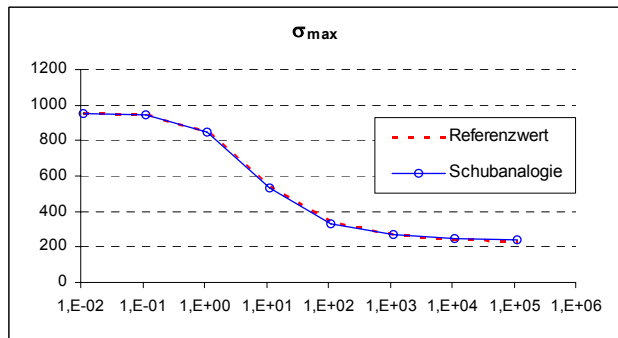


Bild 5.5-16: Vergleich der Maximalwerte für die Normal- und Schubspannungen [MPa] (oben); darunter: Abweichungen bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit (Abszisse, logarithmisch skaliert)

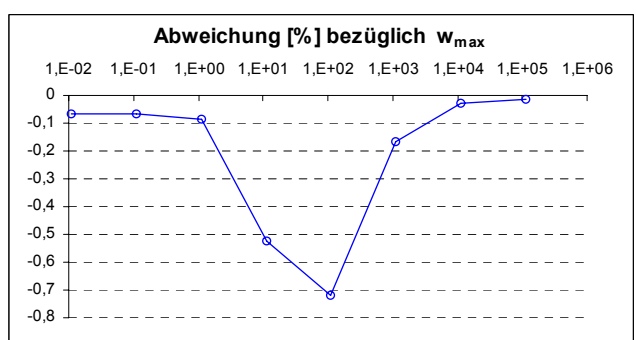
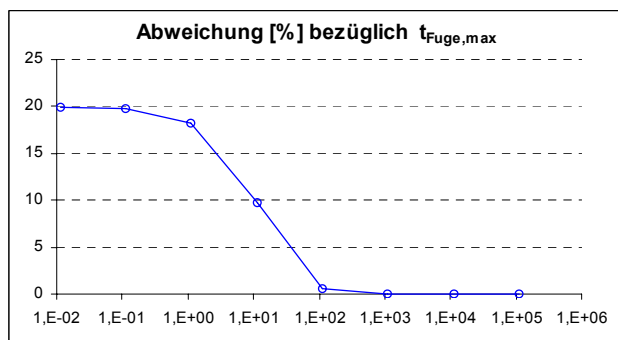
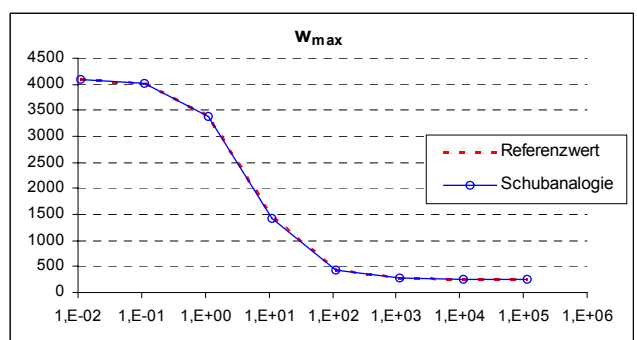
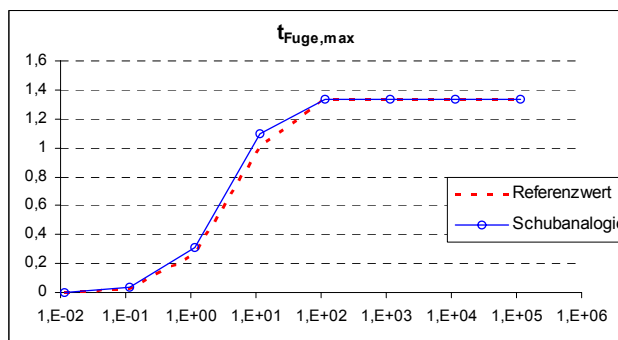


Bild 5.5-17: Vergleich der Maximalwerte für den Schubfluss in den Verbundfugen [MPa] und die Durchbiegung w [m] (oben); darunter: Abweichungen bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit (Abszisse, logarithmisch skaliert)

5.5.3.3 Variation der Steifigkeiten in der mittleren Verbundfuge bei $c_{12}=c_{34}=112,5 \text{ MN/m}^2$

Im nächsten Schritt wird die Schubsteifigkeit der mittleren Verbundfuge ($c_{2,3}$) variiert, während die beiden äußeren Verbundfugen stets mit dem vom Beispielträger übernommenen Wert ($c_{1,2}=c_{2,3}=112,5 \text{ MN/m}^2$) belegt sind. Untersucht wird der Bereich $1,125 \leq c_{12} \leq 11250 \text{ [MN/m}^2]$, was einem Verhältnisspektrum von $1:100 \leq V \leq 100:1$ ($V=c_{12}/c_{23}$) entspricht. Die Berechnungen mit der Schubanalogie wurden wieder sowohl unter Ansatz von S als auch unter Ansatz von S_k durchgeführt.

Anhand der Spannungsverläufe lassen sich die Auswirkungen der ungleichförmigen Aufteilung der Fugensteifigkeiten gut verdeutlichen. In Bild 5.5-18 und Bild 5.5-19 sind die Normal- und Schubspannungen an den ausgewählten Bereichen für die Varianten $V=1:100$, $V=1:10$ und $V=10:1$ dargestellt. Wie zu sehen ist, wird bei Ansatz von S_k zwar die Tendenz des Normalspannungsverlaufes etwas besser erfasst, doch sind die Ergebnisse abnehmender Steifigkeit in der mittleren Fuge immer unzutreffender. Ähnliches gilt für den Schubspannungsverlauf, wobei hier das „klassische“ Vorgehen tendenziell das etwas bessere Ergebnis liefert. Hier macht es sich bemerkbar, dass bei der Bestimmung von S_k bereits ein geradliniger Dehnungsverlauf vorausgesetzt ist, während der Formel für S nur die äquivalente Gesamtverschiebung zugrunde liegt.

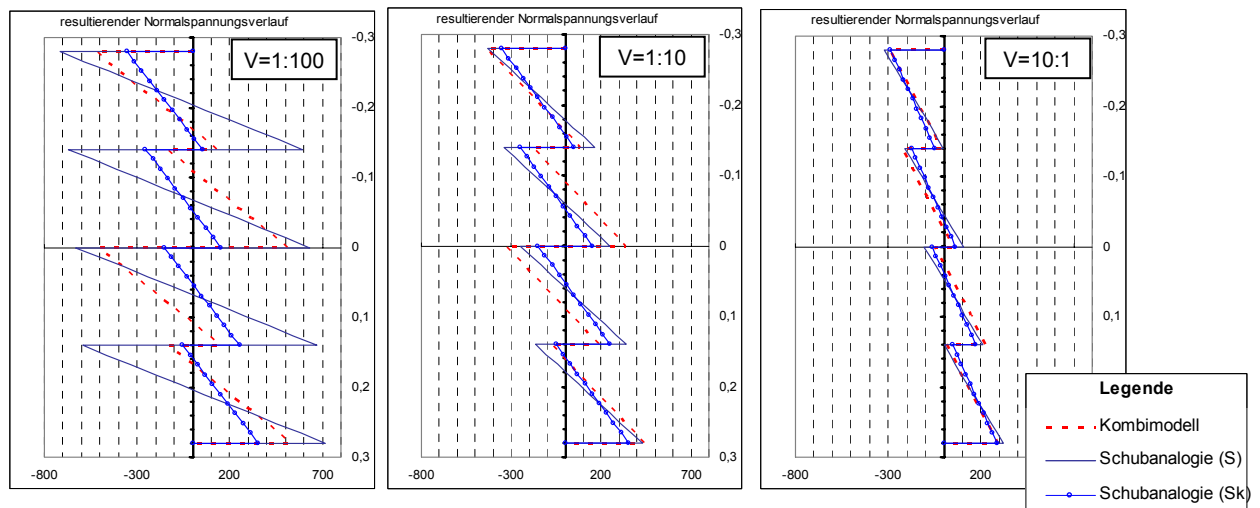


Bild 5.5-18: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 1:10; 10:1\}$ (bei einer Last von $P=1000 \text{ kN}$)

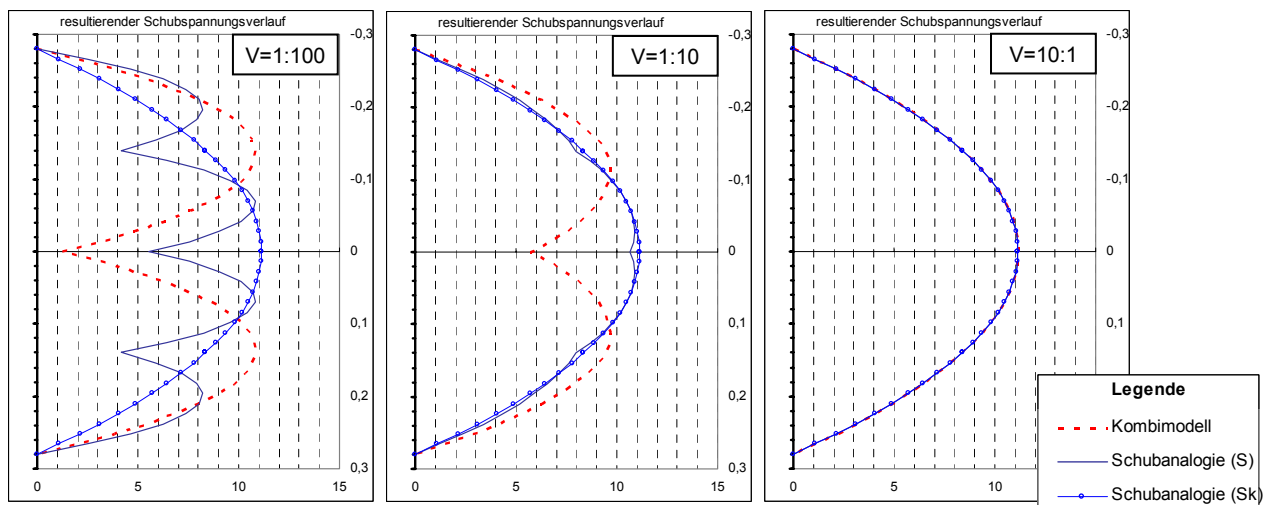


Bild 5.5-19: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 1:10; 10:1\}$ (bei einer Last von $P=1000 \text{ kN}$)

In Bild 5.5-20 und Bild 5.5-21 ist die Abweichung der wichtigsten Ergebniswerte nach der Schubanalogie von der Referenzlösung („Kombimodell“) in Abhängigkeit vom Verhältnis V dargestellt. Wie man sieht, ist das Verhalten, je nachdem ob für die Schubsteifigkeit S oder S_k angesetzt wird, unterschiedlich. Dabei ist keine einheitliche Tendenz erkennbar. Eine absolute Bewertung der Lösungen für den Schubfluss und die Spannungen ist anhand dieser Kurven ohnehin nicht möglich, da in die Diagramme nur die Abweichung der absoluten Maximalwerte, nicht aber ihre Lage am Querschnitt eingeht. Das bedeutet, dass die miteinander verglichenen Spannungen nicht zwingend dieselbe Position am Querschnitt aufweisen. Trotz dieser Vermischung von Effekten kann mit der Zusammenstellung ein Überblick gewonnen werden. Grundsätzlich kann festgestellt werden, dass die Ergebnisse für die Bemessungsgrößen im vorliegenden Beispiel vor allem im Bereich von $V < 0,1$ deutlich von der Referenzlösung abweichen.

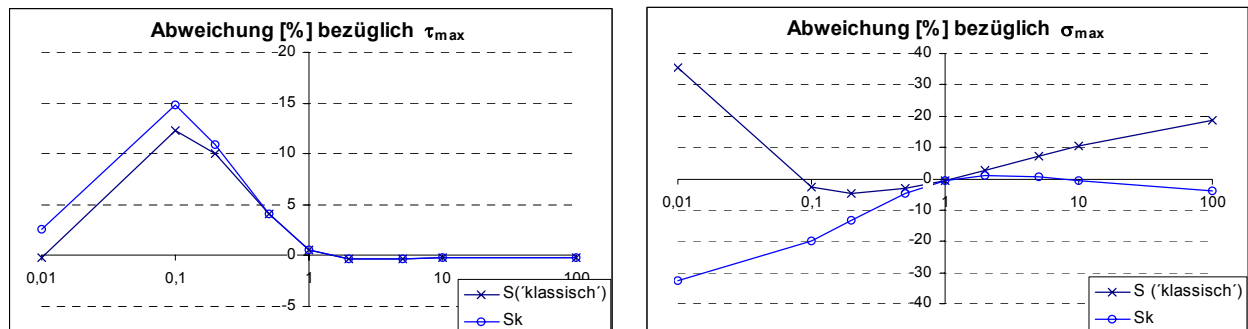


Bild 5.5-20: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis V der Fugensteifigkeiten (Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen

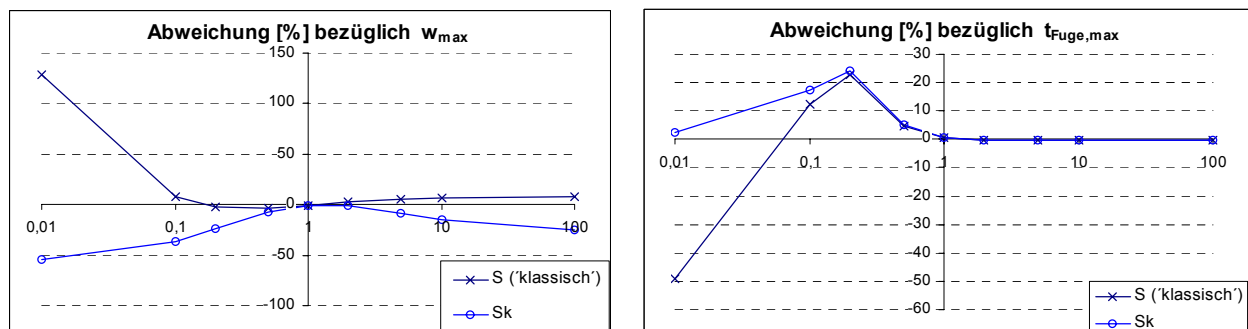


Bild 5.5-21: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge

5.5.3.4 Variation der Steifigkeiten in der mittleren Verbundfuge bei $c_{12}=c_{34}=1,125 \text{ MN/m}^2$

Bei einer Reduktion der Schubsteifigkeiten der Verbundfugen auf $c=1,125 \text{ MPa}$ ergibt sich mit (5-61) ein Verhältniswert von $V_{EI}=0,076$. Gemäß der Überlegungen aus Kapitel 5.5.1 liegen die Steifigkeitsverhältnisse des Trägers damit bereits in dem Bereich, bei dem die Schubanalogie die größte Abweichung bezogen auf den maximalen Schubfluss liefert. Ergänzend wurde die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Parameterstudie auch für eine Steifigkeit in den Randfugen vom Betrag $c_{12}=c_{34}=1,125 \text{ MN/m}^2$ durchgeführt. Die Spannungsverläufe sind für eine Auswahl an Verhältniswerten in Bild 5.5-22 und in Bild 5.5-23 gezeigt.

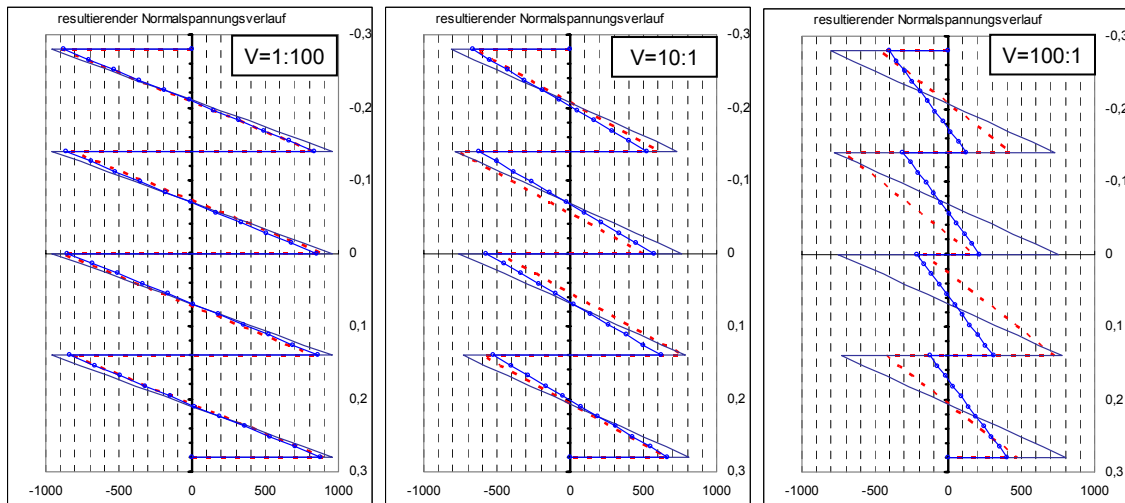


Bild 5.5-22: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 10:1; 100:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)

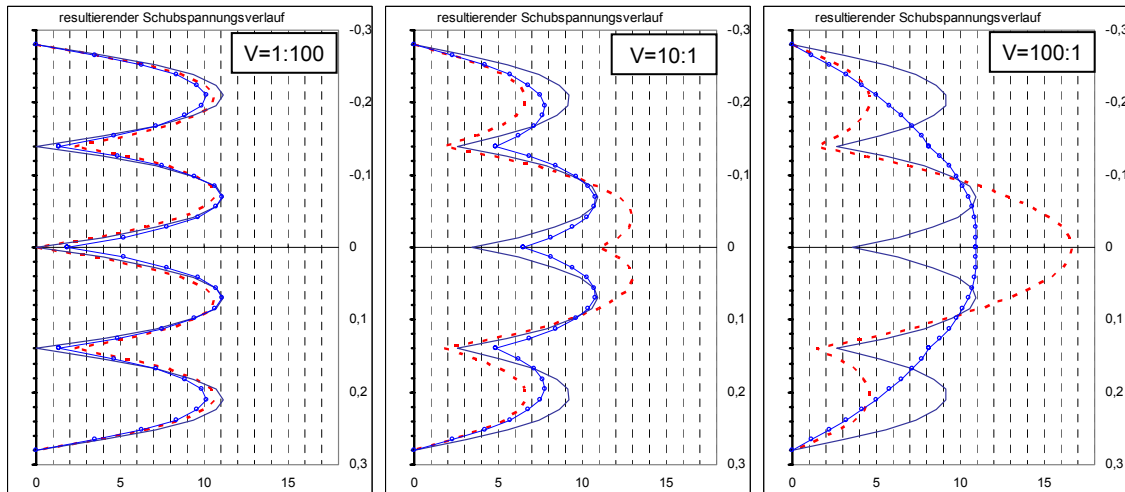


Bild 5.5-23: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 10:1; 100:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)

Prinzipiell ist ein ähnliches Verhalten wie bei der steiferen Variante zu beobachten, wobei der Einfluss des nachgiebigen Verbundes aufgrund der weicheren Fugen noch deutlicher wird. Bild 5.5-24 und Bild 5.5-25 zeigen den Verlauf der betragsmäßigen Abweichung in der bereits im vorangegangenen Abschnitt gewählten Weise. Auch hier ist keine eindeutige Tendenz auszumachen. Auffällig ist, dass die Bemessungswerte, vor allem für den maximalen Schubfluss in den Verbundfugen, nun bereits ab einem Verhältnis von $V < 0,5$ und $V > 2$ deutliche Abweichungen zur Referenzlösung zeigen.

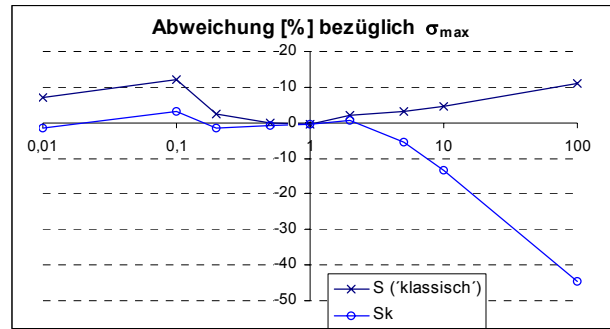
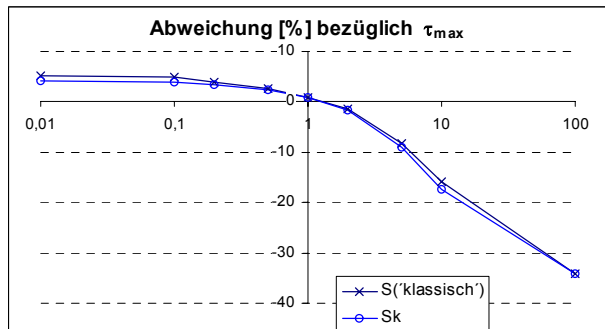


Bild 5.5-24: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.

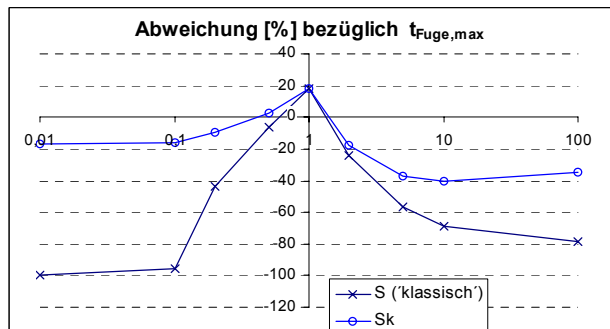
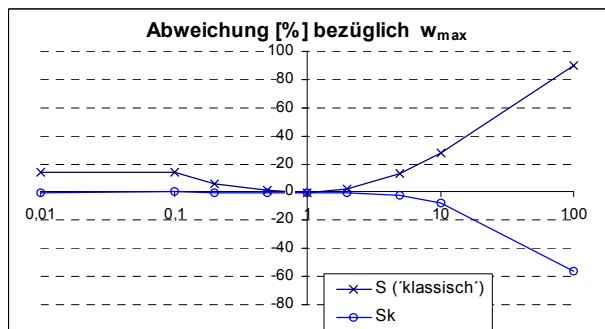


Bild 5.5-25: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge

5.5.3.5 Variation der Steifigkeiten in den äußeren Verbundfugen, antisymmetrischer Fall bei $c_{23}=112,5 \text{ MN/m}^2$

Stellvertretend für unsymmetrische Querschnittsaufbauten werden die Auswirkungen einer antisymmetrischen Verteilung der Fugensteifigkeiten untersucht. Der mittleren Fuge sei dabei der Wert $c_{23}=112,5 \text{ MPa}$ zugewiesen, während die Randsteifigkeiten die vom Verhältniswert V abhängigen Werte $c_{12}=c_{23}/V$ bzw. $c_{34}=c_{23} \cdot V$ annehmen. Wie anhand der Spannungsverläufe (Bild 5.5-26 und Bild 5.5-27) ersichtlich ist, ist die Schubanalogie mit zunehmendem Verhältniswert V nicht in der Lage, die anliegende Spannungssituation zu erfassen. Absolut gesehen steigen die Fehlerwerte bereits bei geringen Verhältniswerten V deutlich an, um sich dann auf einem vergleichsweise hohen Niveau asymptotisch auszulaufen (Bild 5.5-28 und Bild 5.5-29). Im Großen und Ganzen stellen hier die auf Basis der energieäquivalent bestimmten Schubsteifigkeit S_k ermittelten Ergebnisse die bessere Lösung dar.

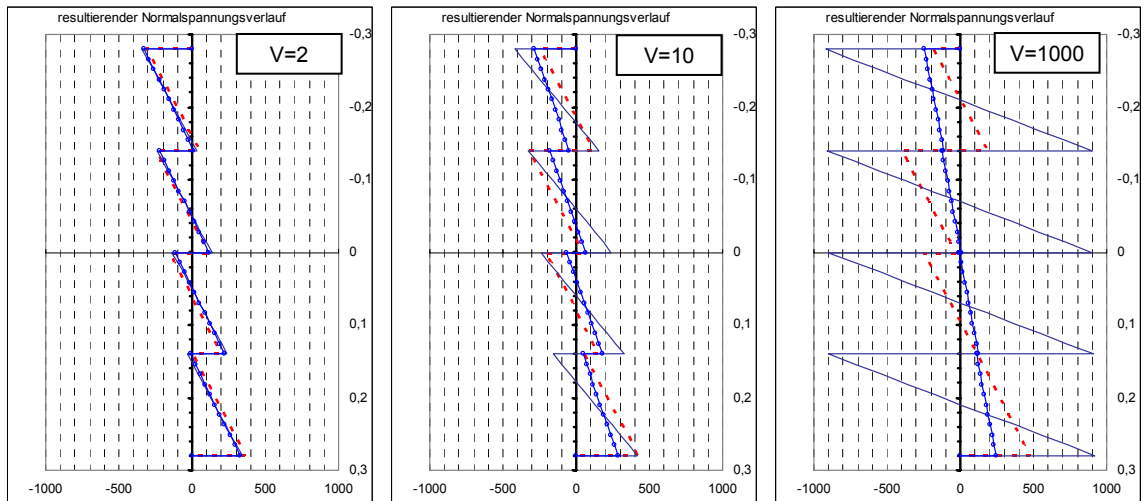


Bild 5.5-26: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=\{2,10,1000\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)

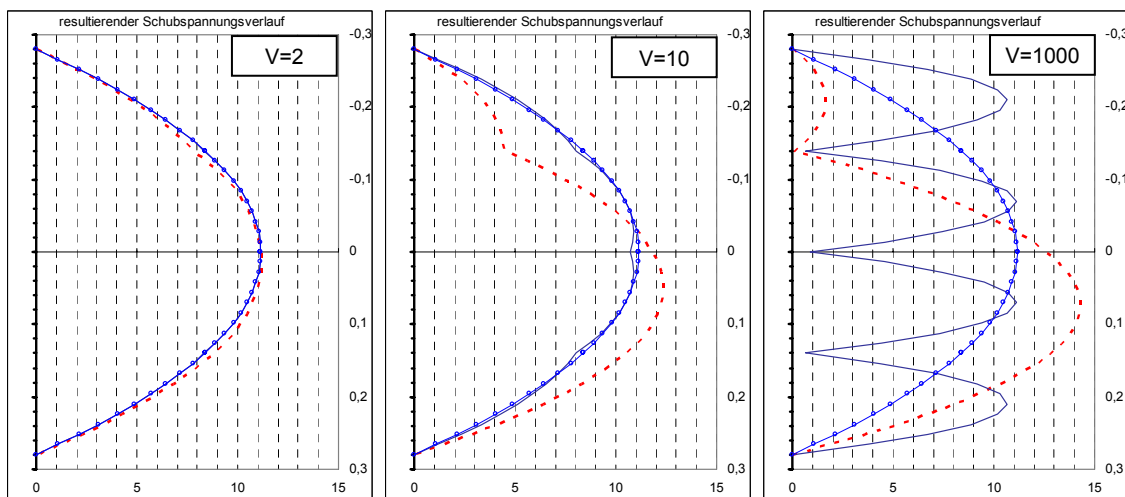


Bild 5.5-27: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=\{2; 10; 100\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)

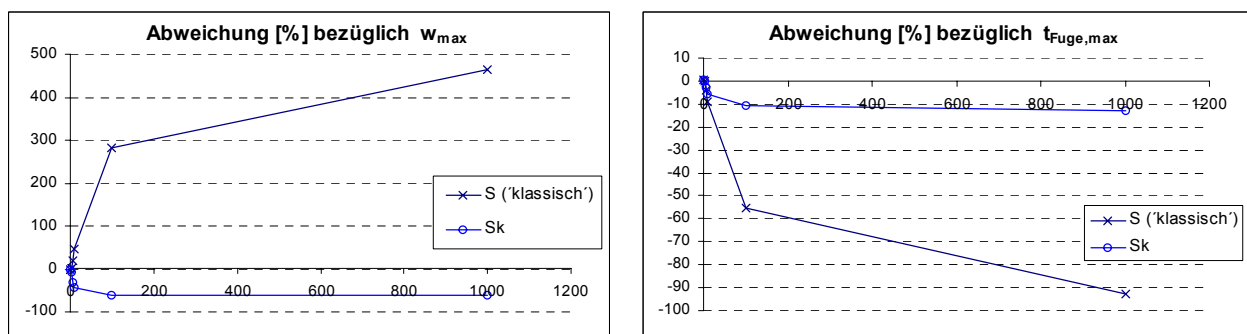


Bild 5.5-28: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.

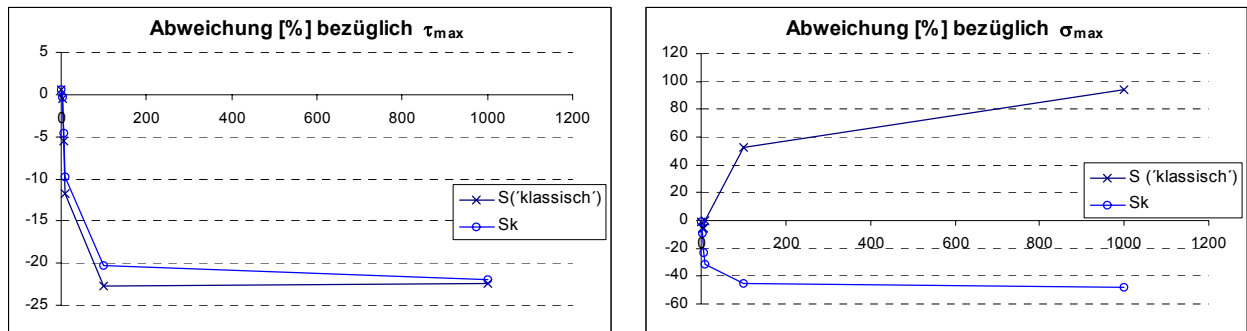


Bild 5.5-29: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge

5.5.3.6 Variation der Steifigkeiten in den äußeren Verbundfugen, antisymmetrischer Fall bei $c_{23}=1,125 \text{ MN/m}^2$

Abschließend werden die Studien zur antisymmetrischen Steifigkeitsverteilung mit Berechnungen bei einer Steifigkeit der mittleren Fuge von $c_{23}=1,125 \text{ MPa}$ vervollständigt. Die in Bezug auf die Spannungsverläufe zu beobachtenden Effekte (Bild 5.5-30 und Bild 5.5-31) sind ähnlich wie im zuvor beschriebenen Fall einer insgesamt höheren Steifigkeit. Die absoluten Fehlerwerte reagieren allerdings nicht so empfindlich auf Veränderungen des Verhältniswertes V .

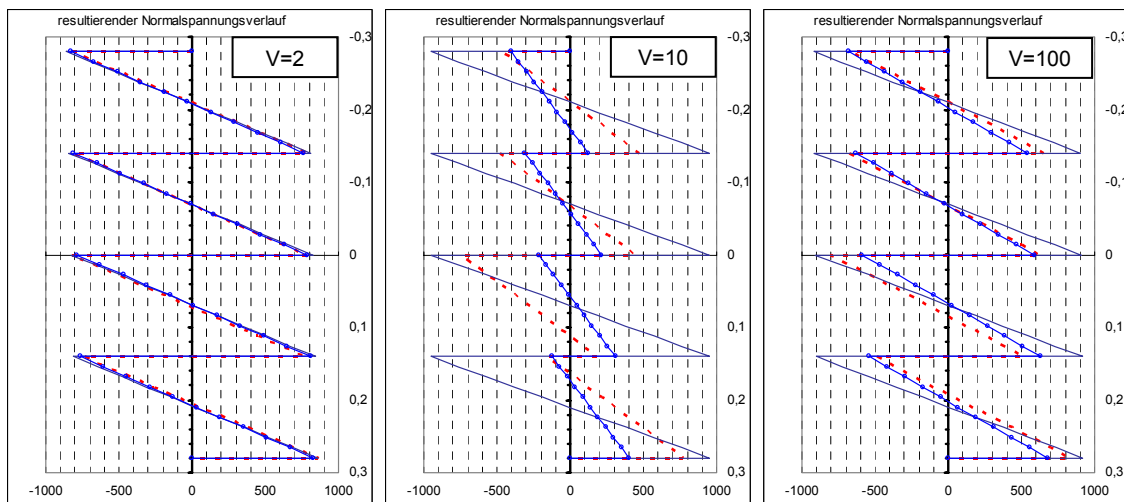


Bild 5.5-30: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=\{2, 10, 100\}$ (bei einer Last von $P=1000 \text{ kN}$)

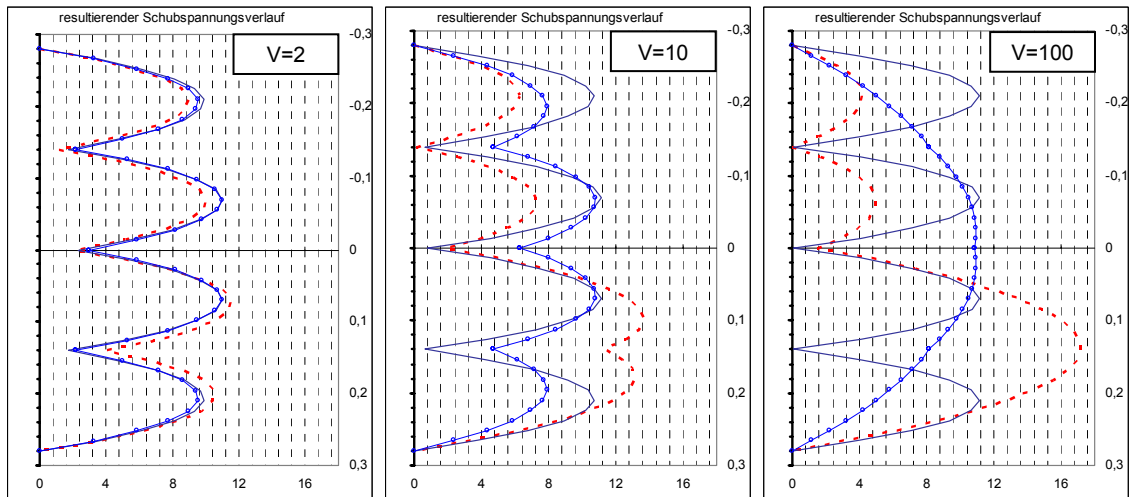


Bild 5.5-31: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=\{2; 10; 100\}$ (bei einer Last von $P=1000 \text{ kN}$)

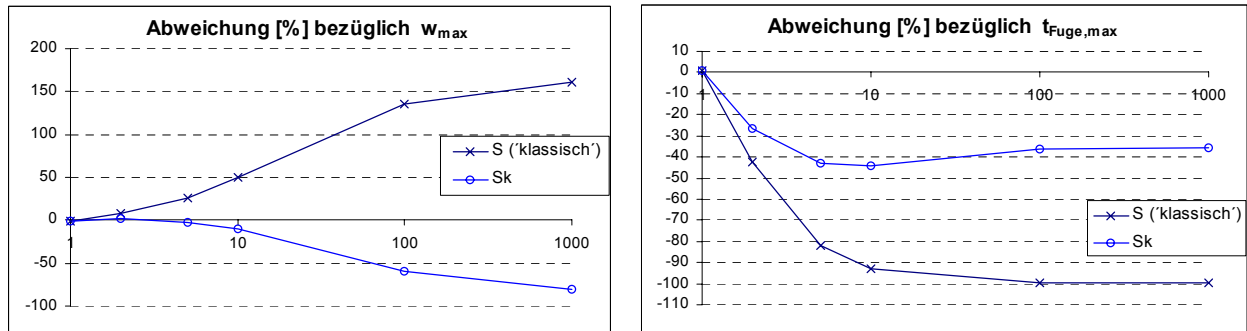


Bild 5.5-32: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.

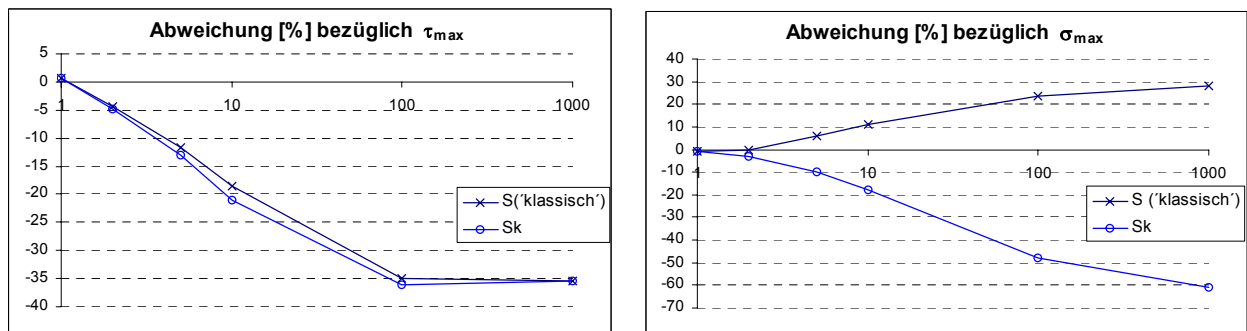


Bild 5.5-33: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge

5.5.4 Schlussfolgerung aus den Vergleichsrechnungen

Die Abweichungen der Schubanalogie von der exakten Lösung sind von vielen Parametern abhängig. Mit den Vergleichsrechnungen wurde eine Tendenz abgesteckt. Bei Querschnitten aus identischen Teilquerschnitten mit jeweils gleicher Verbindung wird eine Genauigkeit erzielt, die für die wichtigsten Bemessungssituationen ausreichend ist. Lediglich bezogen auf den maximalen Schubfluss in den Verbundfugen liefert die Schubanalogie bei diesen Querschnitten Ergebnisse, deren Fehler eine beachtenswerte Größenordnung annehmen kann. Im Hinblick auf eine Bemessung liegt diese Abweichung stets auf der „sicheren Seite“. Sie ist vornehmlich auf die Rücktransformation zurückzuführen und kann maximal 50% betragen. Dieser Grenzwert gilt für Träger mit sehr vielen, sehr weich verbundenen Schichten. In den meisten Fällen dürften Querschnitte mit derart geringen Fugensteifigkeiten nicht praxisrelevant sein. Für den vier- bzw. fünfteiligen Querschnitt mit identischen Teilquerschnitten wurde, bezogen auf den Fugenschub eine maximal mögliche Abweichung von 20% abgeleitet. Bei vergleichsweise geringer Fugensteifigkeit lassen sich mit einer Rücktransformation, bei der der Steineranteil des Schubflusses konstant aufgeteilt wird, genauere Ergebnisse erzielen. Diese liegen allerdings auf der „unsicheren Seite“. Ein Entscheidungskriterium, welche Lösung den genaueren Wert liefert, ist das Verhältnis der effektiven Biegesteifigkeit zur Biegesteifigkeit bei starrem Verbund (V_{EI}). Ist dieses größer als der in Kapitel 5.5.1 abgeleitete Grenzwert $V_{EI, \text{Grenz}}$, so ist die „klassische“ Methode zur Bestimmung des Schubflusses besser geeignet. Beim vierteiligen Verbundquerschnitt beträgt das Grenzverhältnis $V_{EI, \text{Grenz}} \approx 0,22$ [-], beim fünfteiligen $V_{EI, \text{Grenz}} \approx 0,18$ [-]. Die Abweichung beträgt bei diesem Verhältnis in beiden Fällen ca. 9%.

Sind die Fugensteifigkeiten nach (5-26) im Sinne einer „statisch günstigen Lösung“ aufeinander abgestimmt, liefert die Theorie der Schubanalogie die theoretisch exakte Lösung. Dies wurde auch von einer entsprechenden Beispielrechnung bestätigt. Mit zunehmender Abweichung von dieser vorgegebenen Verteilung der Fugensteifigkeiten nimmt die Qualität der Näherung der Schubanalogie ab. Besonders bei unsymmetrischen Querschnittsaufbauten ist sie nur bedingt geeignet, die realen Spannungs-Dehnungs-Verhältnisse am Verbundquerschnitt zu erfassen. Eine pauschale, allgemeingültige Aussage über die Anwendungsgrenzen ist kaum möglich, da sie von vielen Parametern abhängig sind. Anhand der Testrechnungen ist dieser Sachverhalt in Kapitel 5.5.3 verdeutlicht. Die hierbei angewandte Vorgehensweise bietet sich generell für die Beurteilung an, ob eine Berechnung mit der Schubanalogie für den jeweils anliegenden, speziellen Querschnittsaufbau zweckmäßig ist.

6 Ergänzende Anmerkung für die Berechnung und Bemessung

6.1 Zum Einfluss der Schubsteifigkeit auf den Spannungszustand

Die „klassische“ technische Biegetheorie vernachlässigt den Einfluss der Schubdeformationen auf das Tragverhalten. Diese Näherung ist für die meisten Anwendungen des Bauingenieurwesens gerechtfertigt. Der Schubmodul der Baustoffe ist normalerweise so groß, dass die Schubdeformation im Regelfall ohne größere Bedeutung für die Bemessung ist. Falls notwendig, wird für „genauere“ Berechnungen gewöhnlich auf eine „erweiterte“ technische Biegetheorie, die auf dem so genannten „Timoshenkobalken“ basiert, zurückgegriffen (vgl. z.B. [79], [93]). Hier sind die Auswirkungen der Schubverformungen mit einer näherungsweise als konstant angesetzten Gleitung des Querschnitts berücksichtigt. Diese steht jedoch im Widerspruch zu der mit einer linear verlaufenden Biegespannung korrespondierenden, parabelförmigen Schubspannungsverteilung. Diese hätte eigentlich eine S-förmige Verwölbung des Querschnitts zur Folge. Deshalb wird bei dieser Theorie die Schubfläche mit dem energieäquivalent ermittelten Korrekturfaktor κ berichtigt (vgl. auch Kapitel 5). Für die meisten Berechnungen liefert diese Lösung Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit, solange nicht Störbereiche in der Nähe von Krafteinleitungen betrachtet werden (vgl. z.B. [93], [78]). In der Praxis der Bemessung ist diese Problematik für gewöhnlich durch baustoffspezifische Einzelnachweise abgedeckt. Die Bestimmung des exakten Spannungszustandes ist indes schwierig. Es existieren verschiedene Ansätze, die sich vornehmlich der Scheibentheorie bedienen. Erwähnt seien hierzu die Ausführungen von Schleeh, der die „Beziehungen zwischen Technischer Biegelehre und Scheibentheorie“ [78] erläutert. Weitere Aspekte zu dieser Thematik werden beispielsweise auch von Hofmann im Zusammenhang mit der Entwicklung einer „verfeinerten Balkentheorie“ [40] erörtert. Durch Überlagerung des Zustandes gemäß der technischen Biegetheorie (primärer Zustand) mit Zuständen höherer Ordnung, die aus der Behinderung der Schubdeformation resultieren, wird bei dieser Theorie der wirkliche Spannungsverlauf angenähert. Den Untersuchungen liegt allerdings die „übliche“ Beziehung zwischen Elastizitäts- und Schubmodul (5-36) zugrunde. Im Rahmen der Theorie ist der Maximalwert der Querdehnzahl auf $\nu_{\max}=0,5$ begrenzt. Damit ist auch das mögliche Spektrum des Verhältnisses von Elastizitäts- zu Schubmodul $V_{E:G}$ limitiert.

$$1 \leq V_{E:G} \leq \frac{E}{E \cdot (1+0,5)} = \frac{3}{2}; \quad \text{Gl. 6-1}$$

Für Aussagen über das Verhalten von Verbundquerschnitten ist auch das Verhalten von vergleichsweise schubnachgiebigen Vollquerschnitten mit einem Steifigkeitsverhältnis von $V_{E:G} > 1,5$ von Interesse. Mit Grenzwertbetrachtungen können zum Beispiel die Schranken für die Verteilung der Schubspannung abgeschätzt werden. Mit zunehmenden Verhältniswert $V_{E:G}$ nimmt auch die Verwölbung in Relation zur Querschnittsverdrehung zu. Abhängig von dem Verhältnis steigen auch die Abweichungen der ermittelten Spannungsverläufe im Vergleich zur wirklichen Verteilung an, wenn die aufgrund der Annahme einer linearen Dehnungsverteilung inkonsistente Theorie verwendet wird. Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge zwischen Dehnungszustand und Normal- bzw. Schubspannungen sind in [52] für verschiedene, angenommene Dehnungsverläufe die Beziehungen für passende Spannungsverteilungen, sowie der dazu gehörende Korrekturwert κ angegeben. Diese Zusammenstellung wurde, um die Grenzfälle „plastisches Verhalten“ (Grenzfall 1) und „Konzentration der Normalspannungen an den Querschnittsrändern“ (Grenzfall 2) erweitert. Der Grenzfall 2 beschreibt einen extremen Zustand, bei dem sich die Normalspannungen nur über infinitesimal kleine Randbereiche erstrecken. Somit müssen diese gegen unendlich streben. Diesem Normalspannungszustand ist ein konstanter Schubspannungsverlauf zugeordnet. Mit Tabelle 6.1-1 ist eine Übersicht der Zusammenhänge gegeben.

	Grenzfall 1, "plastisch"	Variante 1: Normalspannung parabelförmig	technische Biegetheorie	Variante 2	Grenzfall 2
Dehnungs- und Normalspannungsverlauf					
Beziehungen zur Bestimmung der Normalspannung	$\sigma(z) = \pm \frac{4 \cdot M}{h^2}$	$\sigma(z) = \frac{5\sqrt{2} \cdot M}{b \cdot h^{5/2}} \cdot \sqrt{z} = \frac{M}{\tilde{I}_{ers1}} \cdot \sqrt{z}$ mit $\tilde{I}_{ers1} = \frac{b \cdot h^{5/2}}{5\sqrt{2}}$	$\sigma(z) = E \cdot \epsilon(z) = \frac{12}{bh^3} \cdot M \cdot z = \frac{M}{I} \cdot z$ mit $I = \frac{bh^3}{12}$	$\sigma(z) = \frac{32M}{bh^4} \cdot z^2 = \frac{M}{\tilde{I}_{ers2}} \cdot z^2$ mit $\tilde{I}_{ers2} = \frac{bh^4}{32}$	$\sigma_{RU} \rightarrow \infty$
Schubspannungsverlauf					
Korrekturfaktor kappa	$\kappa_3 = 1,33$	$\kappa_1 = 1,25$	$\kappa = 1,2$	$\kappa_2 = 1,143$	$\kappa_0 \rightarrow 1,0$
Beziehungen zur Bestimmung der Schubspannung	$\tau_{xz}(z) = \begin{cases} -\frac{Q}{A} \left(2 - 4 \cdot \frac{z}{h} \right) & \text{für } z > 0 \\ -\frac{Q}{A} \left(2 + 4 \cdot \frac{z}{h} \right) & \text{für } z \leq 0 \end{cases}$	$\tau_{xz}(z) = -\frac{Q}{b \cdot \tilde{I}_{ers1}} \cdot \tilde{S}_{ers1}(z)$ $\tilde{S}_{ers1}(z) = -\frac{2}{3} b \cdot \sqrt{\frac{h^3}{8}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{8z^3}{h^3}} \right)$	$\tau(z) = -\frac{Q}{bI} S(z);$ $S(z) = b \cdot \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$	$\tau_{xz}(z) = \frac{Q}{\tilde{I}_{ers2} \cdot b} \cdot \tilde{S}_{ers2}(z)$ $\tilde{S}_{ers2}(z) = -\frac{bh^3}{24} \cdot \left(1 - \frac{8z^3}{h^3} \right)$	$\tau_{xz}(z) \rightarrow \tau_{const.} = \frac{Q}{A}$

Tabelle 6.1-1: Zusammenstellung verschiedener Annahmen bezüglich des Dehnungsverlaufes und der dazu gehörenden Spannungsverläufe.

Um die in der Tabelle 6.1-1 aufgeführten Annahmen bewerten zu können, wurden Vergleichsrechnungen durchgeführt. Dazu wurde ein Einfeldträger unter zentrischer Einzellast mittels Scheibenelementen („Quad-Elemente“) modelliert und die Spannungszustände wurden mit einer Finite-Element-Berechnung („SOFISTIK“, Modul „ASE“) bestimmt. Hierbei wurde eine Elemententeilung mit quadratischen Elementen gewählt, die die Trägerlänge 200-mal und die Trägerhöhe 20-mal unterteilen. In Form einer Parameterstudie wurden mehrere Rechenläufe unter Variation des Verhältnisses $V_{E:G}=E/G$ durchgeführt. Bild 6.1-1 zeigt schematisch das untersuchte System, während in Bild 6.1-2 Ergebnisgrößen für einen Ausschnitt im quasi ungestörten Bereich (Mitte zwischen Auflager und Kraftangriff der Einzellast) in Form von Programmausdrucken wiedergegeben sind. Für ausgewählte Verhältnisse $V_{E:G}$ sind hier die Verläufe der Normal- und Scheibenschubspannungen am Schnitt bei $x=\ell/4$, sowie die verformte Struktur des betrachteten Ausschnitts dargestellt.

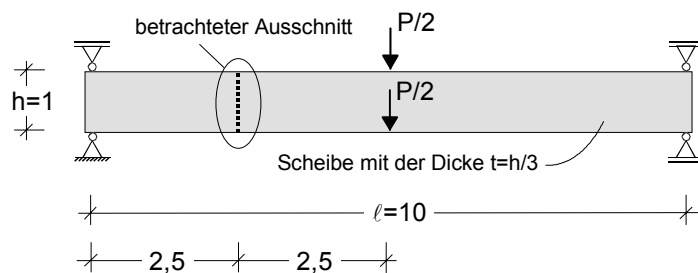


Bild 6.1-1: Träger für die Beispielrechnung, Schnitt für die Spannungsanalyse gestrichelt

An dem betrachteten Schnitt liegen ein Biegemoment von $M_y = P \cdot \ell / 8$ und eine Querkraft vom Betrag $Q = P/2$ an. Unter der Vorgabe von $\ell = 10$ m, $P = 1$ MN bestimmen sich Vergleichswerte gemäß der Technischen Biegetheorie (Balken mit der Breite $b = h/3$):

$$\sigma_{\text{Rand}} = \pm \frac{M}{W} = \frac{9 \cdot \ell \cdot P}{4 \cdot h^3} = 22,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Q,\text{max}} = 1,5 \cdot \frac{Q}{A} = \frac{9}{2} \cdot \frac{Q}{h^2} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ MPa}$$

Diese Ergebnisse stimmen gut mit den Scheibenspannungen, die für die schubstarre Scheibe ($V_{E:G}=1$) ausgegeben werden, überein (vgl.: Bild 6.1-2). Die geringfügigen Abweichungen, insbesondere das Verhalten der Schubspannung am Trägerrand, werden auf numerische Probleme bzw. die Mittelwertbildung im programminternen Nachlauf zurückgeführt.

Der Baustoff Holz ist durch ein Verhältnis

$$V_{E:G,\text{Holz}} \approx \frac{10000}{500} = 20$$

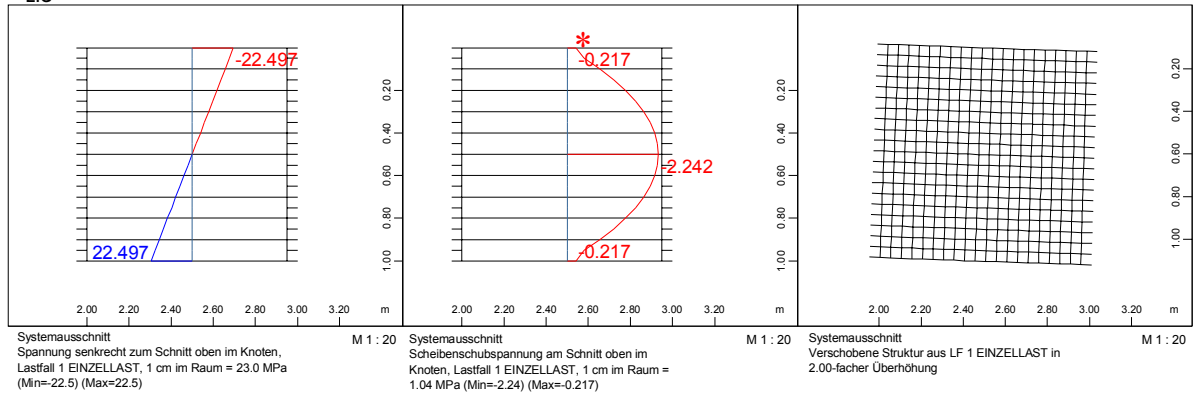
gekennzeichnet. Wie zu sehen ist, sind die Unterschiede zur schubstarken Scheibe gering. Interessant sind die Zustände bei einem Verhältniswert $V_{E:G}=540$, da sie näherungsweise mit den Annahmen der „Variante 2“ (vgl.: Tabelle 6.1-1) beschrieben werden können:

$$\sigma_{\text{Rand}} = \sigma\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \pm \frac{32 \cdot M}{b \cdot h^4} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \pm \frac{P \cdot \ell}{3 \cdot h^3} = 30,0 \text{ MPa}$$

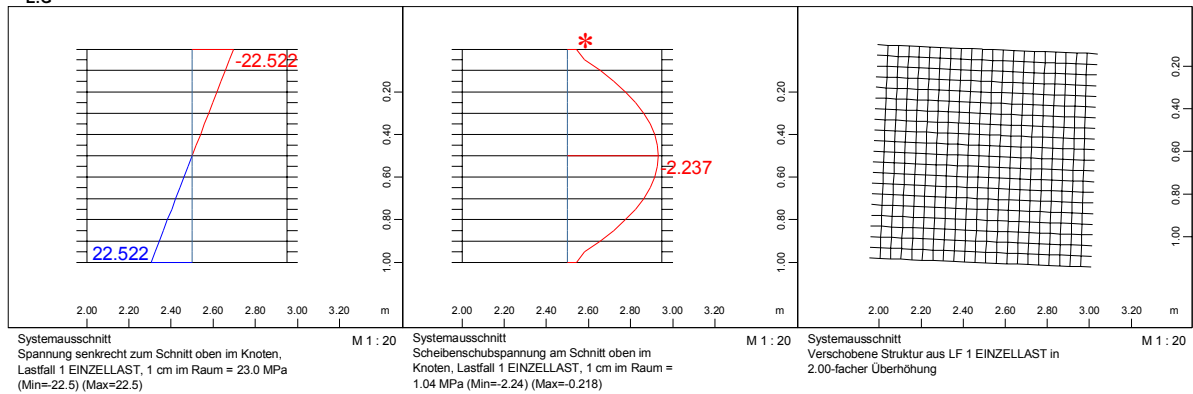
$$\tau_{Q,\text{max}} = \tau_Q(0) = Q \cdot \frac{32}{b \cdot h^4} \cdot \frac{b \cdot h^3}{b \cdot 24} \text{ MPa} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} = 2 \cdot \frac{P}{h^2} = 2,0 \text{ MPa}$$

Die Ergebnisse für $V_{E:G}=2000$ zeigen eine Tendenz in Richtung des „Grenzwertes 2“. Es sei darauf hingewiesen, dass solche Steifigkeitsverhältnisse für übliche Baustoffe unrealistisch sind.

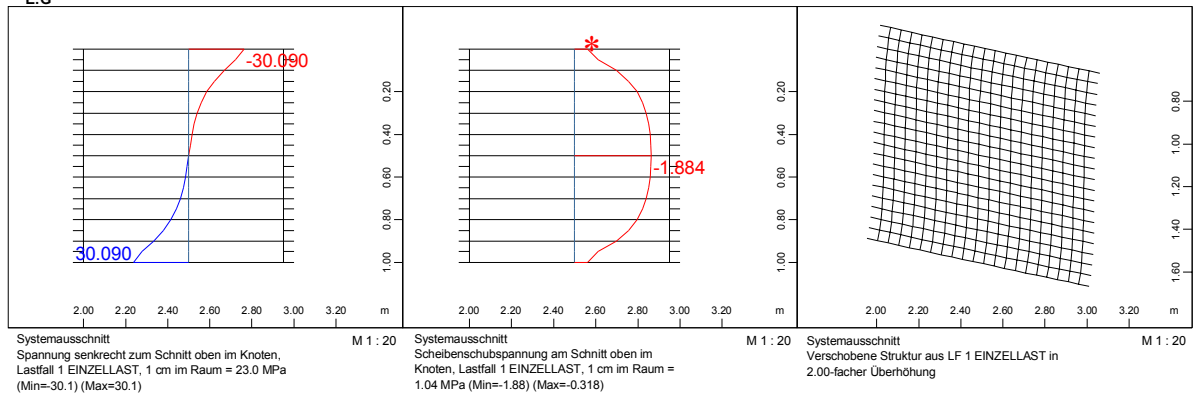
$V_{E:G}=1$



$V_{E:G}=20$



$V_{E:G}=540$



$V_{E:G}=2000$

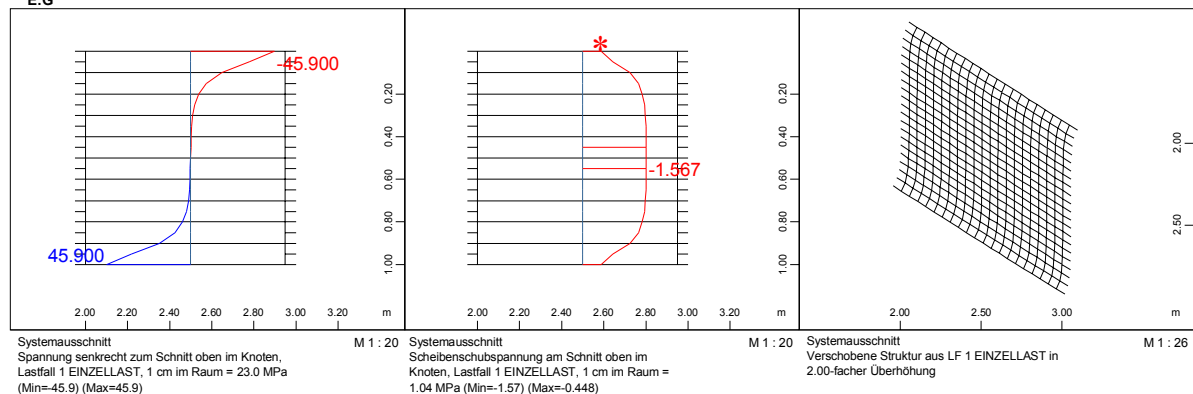


Bild 6.1-2: Ergebnisse einer Scheibenrechnung des Beispielbalkens für ausgewählte Verhältnisse $V_{E:G}$:
Normalspannung (links), Schubspannung (rechts), verschobene Struktur im betrachteten Ausschnitt.

* An den Querschnittsrändern muss die Schubspannung den Wert Null annehmen. Die davon abweichende Ausgabe rührt von den Eigenheiten des programminternen Nachlaufes zur Spannungsermittlung her.

6.2 Zum Rollschub

Bei Stabtragwerken wird der Werkstoff Holz, bezogen auf die Stoffachsen, vornehmlich in der ℓ -t- bzw. in der ℓ -r-Ebene beansprucht. Durch den lagenweise versetzten Aufbau von Brettspertholz und vergleichbaren Bauweisen werden hier auch Holzbeanspruchungen quer zur Faser hervorgerufen. Vor allem die Materialeigenschaften bezüglich Schub quer zur Faser (Schub in der r-t Ebene, vgl. Bild 6.2-1) - eine Beanspruchung, wie sie bei den „klassischen“ Stab-Konstruktionen kaum auftritt - sind für diese Konstruktionsweisen von besonderer Bedeutung. Gewöhnlich wird sie mit dem Begriff Rollschub bezeichnet, welcher sich aus der angelsächsischen Bezeichnung „rolling shear“ ableitet.

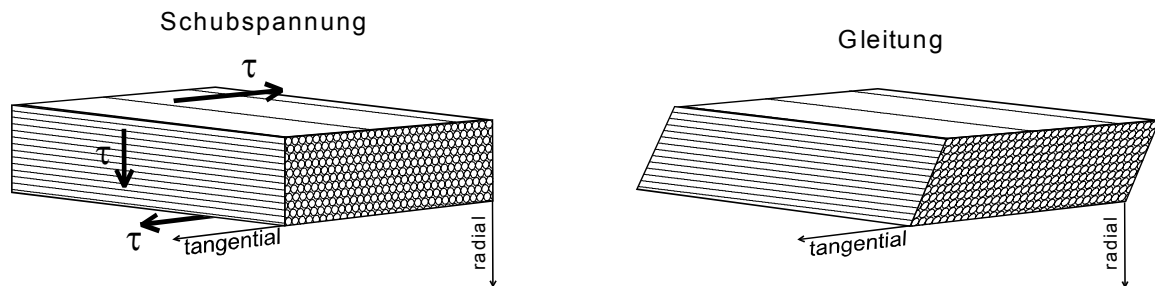


Bild 6.2-1: Holzstück unter Rollschubbelastung; links Schubspannung, rechts zugehörige Verzerrung des Elementes

Hilfreich zur Veranschaulichung der Beanspruchung der Struktur ist die Überführung der Schubbeanspruchung τ in die zueinander senkrecht stehenden Hauptspannungen σ_I und σ_{II} durch Drehung des Bezugskoordinatensystems, wie es z.B. in [70] für den ebenen Spannungszustand beschrieben ist. Bild 6.2-2 zeigt die Anwendung auf ein entsprechendes Holzelement in der r-t-Ebene. Die dieser Umformung näherungsweise zugrunde gelegte Annahme eines isotropen Werkstoffverhaltens ist für die maßgebende Ebene akzeptabel, da die Materialeigenschaften von Holz in radialer und tangentialer Richtung relativ ähnlich sind. Zudem ist beim Brettspertholz aufgrund des variierenden Brettschnittes und des bogenförmigen Jahrringverlaufes eine eindeutige bzw. einheitliche Zuordnung der Stoffachsen in der r-t-Ebene nicht möglich.

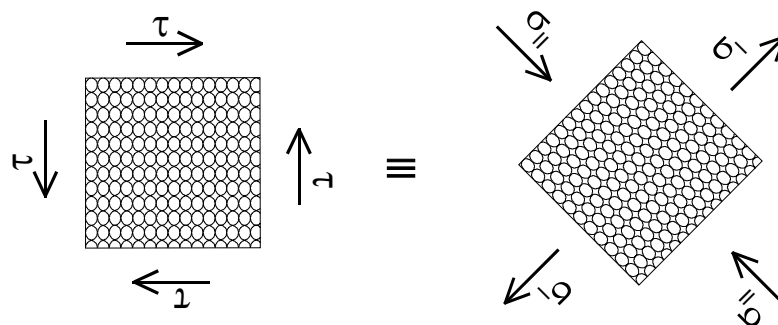


Bild 6.2-2: Holzelement (Darstellung in der r-t-Ebene) unter Rollschub; Rückführung der Schubspannung auf Hauptspannungen durch Drehung des Bezugssystems

Damit lässt sich das Versagen unter der eben geschilderten Beanspruchung bildlich, stark vereinfacht, als ein Dehnen und Quetschen der Holzfasern bzw. als ein Versagen eines Strohhalmbündels durch Zerstörung der Röhren, aber nicht der Längsfasern, beschreiben (vgl. z.B. [80]). Auch wenn diese Deutung dem genauen Versagensmechanismus nicht gerecht wird, soll sie hier genügen, um eine Vorstellung zu vermitteln. Weiterführende Anmerkungen und ein ähnliches Versagensmodell sind z.B. in [77] genannt, während in [85] das zugehörige Verhalten der Nadelholz-Feinstruktur beschrieben ist.

Mit der soeben erläuterten Überführung der Schubspannung in Hauptnormalspannungen wird die Schubspannung (im ebenen Zustand) als Richtungszeiger der Hauptspannungen (σ_I und σ_{II}) gedeutet. Unter „reiner“ Schubbelastung muss das Koordinatensystem um $\alpha_0=45^\circ$ gedreht werden, damit im betrachteten Ausschnitt ausschließlich Normalspannungen in Richtung der Hauptachsen anliegen. Für die Größe dieser Spannungen gilt (vgl. z.B. [79]):

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy} \cdot \sin(2\varphi); \text{ mit } \varphi = 45^\circ \text{ und } \sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_I = \tau_{xy} = \tau = |\sigma_{II}|$$
Gl. 6-2

Eine „reine“ Rollschubbelastung lässt sich demnach unter den genannten Voraussetzungen durch eine Spannungscombination aus betragsmäßig gleich großem Querdruck und Querzug ersetzen. Das bedeutet, die Rollschubfestigkeit muss in etwa auf dem Niveau der Querzugfestigkeit liegen. Diese These wird durch die Angaben in [N4] gestützt. Hier werden für Nadelholz der Festigkeitsklassen CD 16 bis CD 40, bezogen auf die Querzugfestigkeit der charakteristische Wert $f_{t,90,k}=0,4$ [MPa] und bezogen auf die Rollschubfestigkeit der charakteristische Wert $f_{R,k}=1,0$ [MPa] angegeben.

Zu beachten ist, dass im Sprachgebrauch der Norm [N4] unter Rollschub nicht die „reine“ Schubfestigkeit in der r-t-Ebene verstanden wird, sondern die Summe der Effekte, die aufgrund der Übertragung von Schubkräften in den Querlagen von Brettsperrholzkonstruktionen auftreten. Dabei kommt den fertigungstechnisch bedingten, durch die Entlastungsnuten und die unverklebten Brettanten gegebenen Fehlstellen, eine besondere Bedeutung zu. Die hiermit gegebene Unterbrechung der Querlagen hat zur Folge, dass die Spannungen an diesen Unstetigkeitsstellen über die angrenzenden Längslagen umgeleitet werden müssen. Bild 6.2-3 verdeutlicht dies anhand eines Ausschnittes aus einer Brettsperrholzplatte unter Belastung. Die „fehlenden“ Schubspannungen sind durch gestrichelt eingezeichnete Pfeile angedeutet.

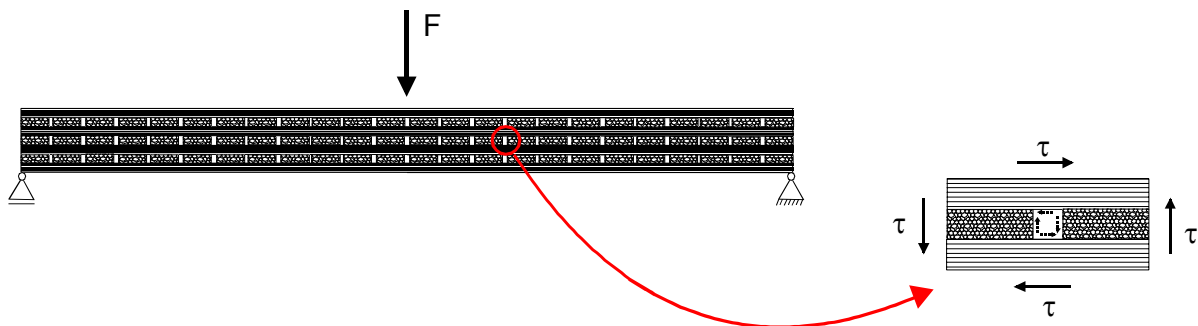


Bild 6.2-3: Brettsperrholzplatte unter Last mit Darstellung der Schubbelastung im Ausschnitt. Die an der freien Kante fehlende Schubspannung ist gestrichelt eingezeichnet.

Durch diese Spannungsumleitung wird an den Querlagen im Übergangsbereich ein kombinierter Spannungszustand hervorgerufen. Eine Vorstellung vom Wirkungsmechanismus vermittelt das in Bild 6.2-4 gezeigte Gedankenmodell, wobei die Querlagen als mit den Längslagen horizontal verbundene Klötze aufgefasst werden können. Wie dargestellt, würden sich diese beim Verschieben der Längslagen aufstellen, falls sie nicht durch entsprechende Rückstellkräfte - welche zusätzliche Querzug- und Querdruckspannungen hervorrufen - daran gehindert würden. Eine Vorstellung vom Tragmechanismus vermittelt auch Bild 6.2-6. Hier lassen sich die beschriebenen Effekte an einem Ausschnitt einer Versuchsanordnung im Versagenszustand beobachten.

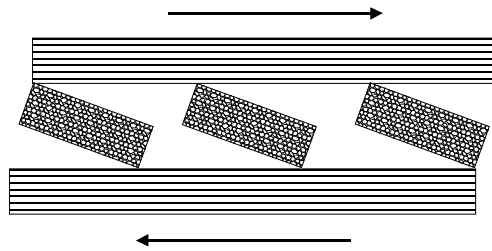


Bild 6.2-4: Gedankenmodell zur Veranschaulichung des Entstehens von Normalspannungen in den Querlagen infolge einer Schubbelastung

Spezielle Bedeutung kommt der Singularität in den Eckbereichen der Fehlstellen zu. Analog, wie es bei Durchbrüchen und Ausklinkungen von Trägern der Fall ist, treten an den Ecken dieser Aussparungen auf Grund des sprunghaften Wechsels von Materialeigenschaften und Geometrie Spannungsspitzen auf, welche rein rechnerisch gegen unendlich streben. Von Natur aus ist die Materialfestigkeit begrenzt, weshalb solche Zustände für das reale Element nicht möglich sind. Stellvertretend seien in diesem Zusammenhang hier die Untersuchungen von Gustafsson [27] bezüglich der Tragfähigkeit im Bereich von Durchbrüchen und Ausklinkungen genannt. In [54] wird der Einfluss der beschriebenen Tragwirkung auf die „Rollschubfestigkeit“ der Querlagen rechnerisch abgeschätzt. Unter Vorgabe der Parameter Schubfestigkeit f_{rt} , E-Modul E und Schubmodul G_{rt} von Holz bezüglich der Schubbeanspruchungen in den faserparallelen Radial- bis Tangential-Ebenen, werden hier mit Hilfe von Finiten-Element-Berechnungen Ersatzkenngrößen für die Materialeigenschaften „Rollschubmodul“ und „Rollschubfestigkeit“ ermittelt. Auf Basis vereinfachender Annahmen wird das Verhalten der Querlagen näherungsweise mit Hilfe des in Bild 6.2-5 gezeigten Schubblocks simuliert. Dieser erfasst ein einzelnes Brett einer Querlage mit freien Schmalseiten näherungsweise als isotrope Scheibe unter äußerer Schubbeanspruchung. An den auf der rechten Seite von Bild 6.2-5 gezeigten Hauptspannungsvektoren lässt sich der Kraftfluss gut ablesen. Deutlich zeichnet sich der spannungsfreie Bereich an der freien Kante ab. Dieser hat zur Folge, dass die Schubkraft im Bereich der halben Höhe der Querlagen über eine reduzierte Breite übertragen wird. Das hat eine, im Vergleich zur „reinen“ Schubfestigkeit in der r-t-Ebene verringerte „Rollschubfestigkeit“ zur Folge. Die Abminderung ist geometrieabhängig und beträgt nach [54] für praxisrelevante Verhältnisse in etwa 15%.

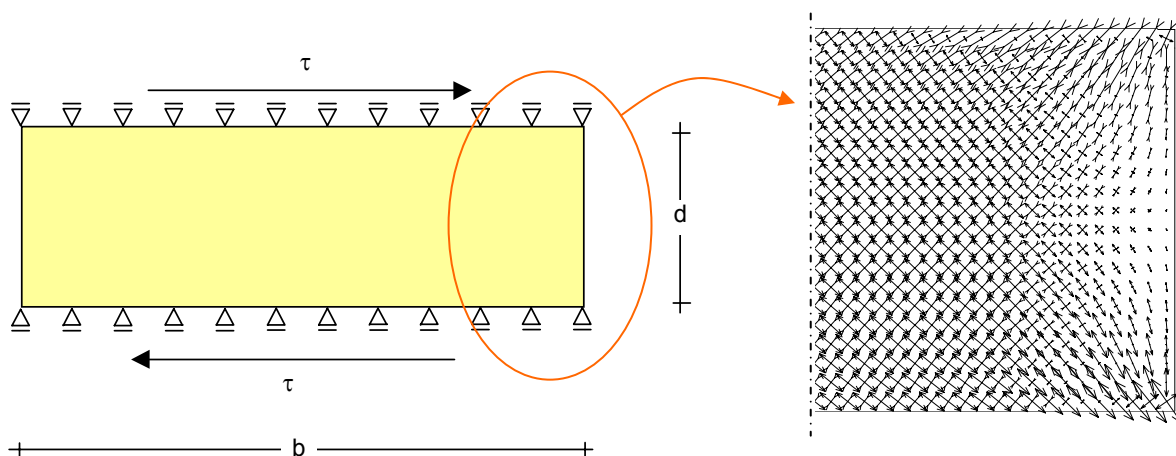


Bild 6.2-5: Rechnerische Untersuchung am „Schubblockmodell“; links System mit Belastung, rechts vektorielle Darstellung der Hauptspannungen am rechten Rand; $\leftrightarrow$ Zug, $\rightarrow$ Druck.

Versuche am MPA Bauwesen der Technischen Universität München an aus Dickholzplatten herausgeschnittenen Trägern lieferten rechnerische Rollschubfestigkeiten von etwa $f_{v,rt}=1,1$ MPa [48]. Szalai gibt für Fichtenholz in [91] je nach Bestimmungsmethode Scherfestigkeiten von

$f_{rt}=1,58..1,72$ MPa an. In EC 5 Teil 2 [N5] (vgl. auch [N3]) wird für die Rollschubfestigkeit von Nadelholz "der 0,15-fache Wert des Schubwiderstandes parallel zur Faser" ($f_{rt}=0,15 \cdot f_{rl} = 0,15 \cdot f_{lt}$) angenommen. Diese Angabe bezieht sich allerdings auf "Holzbauteile, die durch andere Baustoffe verstärkt werden".

In [9] und [8] sind Zulassungsversuche von „Lignotrend-Holzblockelementen“ beschrieben. Auch diese Flächenelemente aus Holz sind durch einen lagenweise orthogonal versetzten Aufbau gekennzeichnet, wobei die Fugen zwischen den einzelnen Brettern in der Regel deutlich größer als beim „klassischen“ Brettsperrholz ausfallen. Bei den Versuchen wurde sowohl ein Versagen der Klebefugen als auch ein Schubversagen der Querhölzer in der r-t-Ebene beobachtet. Als Versuchsergebnisse sind für die mittlere Rollschubfestigkeit $\tau_{R,k}=1,43$ MPa und ein Rollschubmodul von $G_R \approx 50$ MPa angegeben.

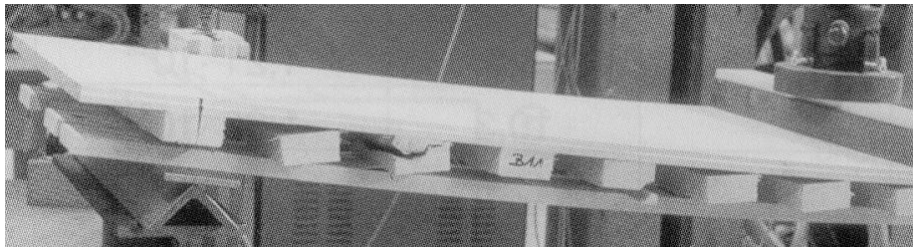


Bild 6.2-6: Rollschubversagen, Ausschnitt aus einer Versuchsanordnung im Bruchzustand. Quelle [8]
(Ausschnittvergrößerung)

6.3 Zum Nachweis in Grenzzuständen der Tragfähigkeit

Den äußeren Belastungen eines Körpers stehen im Körperinneren korrespondierende Kräfte entgegen. Je nach Orientierung der dabei erzeugten Spannungen wird zwischen dem linearen (einachsigen), dem zweidimensionalen bzw. ebenen und dem räumlichen Spannungszustand unterschieden. Während beim ebenen Spannungszustand alle Spannungen in einer Ebene liegen, (Beispiel: „Rollschub“) ist beim räumlichen Spannungszustand keine der Flächen des betrachteten Elements frei von Spannungen. Letzterer wird durch 6 unabhängige Spannungsvektoren definiert. Bild 6.3-1 zeigt ein Holzelement im dreiachsigen Spannungszustand, wobei der Faserverlauf zur Verdeutlichung der Stoffachsen schematisch angedeutet ist.

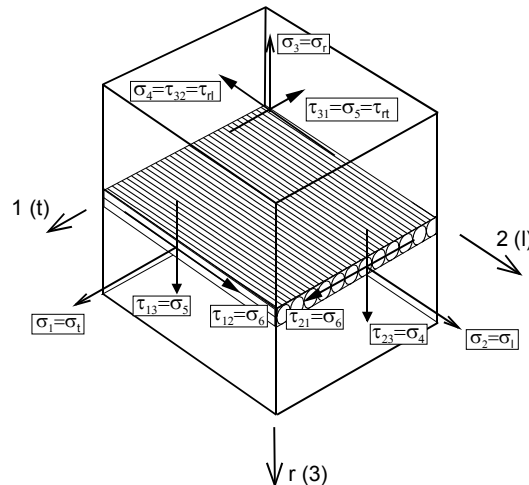


Bild 6.3-1: Dreiachsiger Spannungszustand am Holzelement, Bezeichnungen

Wie bereits aus den Ausführungen des vorangegangenen Abschnittes ersichtlich ist, sind bei der Bemessung von Holzflächen oft Spannungskombinationen zu beachten. Zur Verdeutlichung der Problematik sind in Bild 6.3-2 eine Kragplatte (Dreischichtplatte) unter unsymmetrischer Last und die zugehörigen Spannungsverläufe schematisch dargestellt.

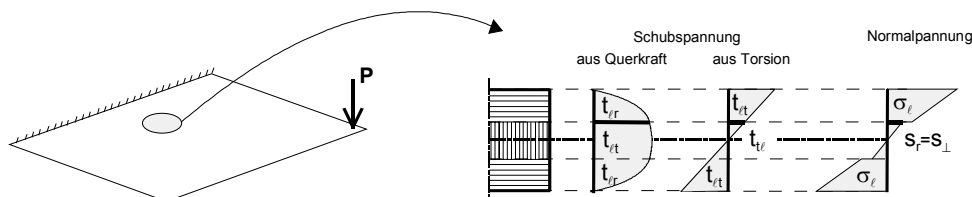


Bild 6.3-2: Schematische Darstellung der auftretenden Spannungen an einer Kragplatte (Dreischichtplatte) bei unsymmetrischer Belastung.

Für die Berechnung und Bemessung sind Kenngrößen für Steifigkeiten und Festigkeiten mit passenden Versagenskriterien notwendig. Aufgrund der stark ausgeprägten Anisotropie des Werkstoffes Holz sind diese relativ schwierig zu bestimmen. Vor allem im Falle kombinierter Spannungszustände sind zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens mehrere Parameter notwendig. Die früher vornehmlich versuchstechnische Erfassung der Problematik wird in jüngerer Zeit vermehrt theoretisch gestützt. Vor allem bezüglich der Festigkeiten wurden viele verschiedene Modelle entwickelt und überprüft. Dabei wird Holz in der Regel als ein orthogonal anisotroper (orthotroper) Werkstoff beschrieben, wobei vermehrt auch Erkenntnisse aus den Untersuchungen von Faserverbund-Werkstoffen integriert werden. In [76] wird z.B. auf die Analogie zwischen Holz und „Faser-Kunststoff-Verbunden“ eingegangen. Im Folgenden werden in Anlehnung an [53] ausgewählte Bruchhypothesen vorgestellt, um einen Überblick über die zugehörigen Sachverhalte

zu geben. Ergänzend sind weitere Ausführungen und Literaturquellen beispielsweise auch mit [21] und [20] gegeben.

Ein bekanntes Beispiel ist die Bestimmung der Zug- bzw. Druckfestigkeit von Holz in Abhängigkeit des Kraft-Faser-Winkels. Zu dieser Problematik liegen mittlerweile mannigfaltige Lösungsansätze vor, die meist auf empirischer Basis beruhen. Beispielsweise schlug Hankinson bereits 1921 für die Druckbeanspruchung unter dem Winkel α folgende Gleichung vor [22]:

$$f_{c,\alpha} = \frac{f_{c,0} \cdot f_{c,90}}{f_{c,0} \cdot \sin^2 \alpha + f_{c,90} \cdot \cos^2 \alpha} \quad \text{Gl. 6-3}$$

Laut [21] zeigt diese Beziehung im Vergleich zu anderen empirischen Formeln eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen. Sie wurde in den Eurocode 5 aufgenommen. Allerdings ist auffallend, dass die Schubfestigkeit bei dieser Formel keinen direkten Einfluss auf den Bauteilwiderstand hat, obwohl bei der Beanspruchung (je nach Winkel) Schubspannungen auftreten. Von Norris und McKinnon wurde eine Interaktionsformel („quadratische Interaktion“) (6-4) erarbeitet, bei der die Schubfestigkeit direkt mit eingeht (vgl.: [21]). Diese liefert nach [21] für Sperrholz gute Werte, ist aber für Vollholz weniger zutreffend. 1962 wurde eine um ein „Koppelglied“ erweiterte Variante (6-5) dieses Bruchkriteriums vorgestellt.

$$\frac{\sigma_1^2}{f_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{f_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{f_{12}^2} = 1; \quad \text{Gl. 6-4}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{f_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{f_2^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_1 \cdot f_2} + \frac{\tau_{12}^2}{f_{12}^2} = 1; \quad \text{Gl. 6-5}$$

Die lineare Näherung von (6-4) führt zu einer einfachen Abschätzung des Versagenszustandes („lineare Interaktion“, vgl.: [53]) im ebenen Spannungszustand:

$$\frac{\sigma_1}{f_{c/t,1}} + \frac{\sigma_2}{f_{c/t,2}} + \frac{\tau_{12}}{f_{12}} = 1; \quad \text{Gl. 6-6}$$

Ein allgemeiner Ansatz, der auch die Erfassung räumlicher Spannungszustände ermöglicht, ist das Bruchkriterium nach Tsai und Wu (vgl. z.B. [36]). Die allgemeine Formulierung in Tensorschreibweise lautet:

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = 1; \quad \text{mit} \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{Gl. 6-7}$$

Unter Einsatz eines Tensors vierter bzw. zweiter Stufe ergibt sich nach [36], bezogen auf die ℓ -t-Ebene von Holz, eine „Beschreibung der Bruchfunktion einfachster Art“:

$$F_1 \cdot \sigma_t + F_2 \cdot \sigma_\ell + F_{11} \cdot \sigma_t^2 + F_{22} \cdot \sigma_\ell^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_t \cdot \sigma_\ell + F_{66} \cdot \tau_{t\ell}^2 = 1; \quad \text{Gl. 6-8}$$

Die Komponenten F_1 , F_{11} , F_2 und F_{22} des Festigkeitstensors können mit Hilfe von einachsigen Zug- und Druckversuchen, F_{66} durch einen Schubversuch bestimmt werden. Zur Ermittlung von F_{12} ist ein zweiachsiger Versuch notwendig.

Ergänzend sei auch die Versagenshypothese von Ashkenasi erwähnt, welche nach [92] die für Holz und Holzwerkstoffe „am meisten geeignete Hypothese“ ist. Allerdings benötigt man zur Anwendung „auch bei Berücksichtigung von zusätzlichen, realistischen Annahmen 24 Materialparameter“ [20]. Aufgrund seiner Komplexität und aus Mangel an praxistauglich aufbereiteten Werten bezüglich der erforderlichen Materialparameter scheint das Kriterium wenig geeignet für eine Anwendung in der Bemessungspraxis des Ingenieurholzbaues.

Anmerkung: Aus zahlreichen Forschungsarbeiten liegen zwar Ergebnisse für biaxiale Festigkeiten vor, wie z.B. mit [20] gegeben, jedoch sind diese nur schwer verwertbar, da eine entsprechende Aufbereitung in der Regel fehlt.

Zur Visualisierung der verschiedenen Thesen sind in Bild 6.3-3 bis Bild 6.3-5 die Festigkeitsfunktionen gemäß der linearen und der quadratischen Interaktion, sowie der erweiterten Interaktion nach (6-5) für eine Druckbeanspruchung in der ℓ -t-Ebene auf Basis der charakteristischen Werte für Nadelholz der Sortierklasse CD 24 aus [N4] gezeigt.

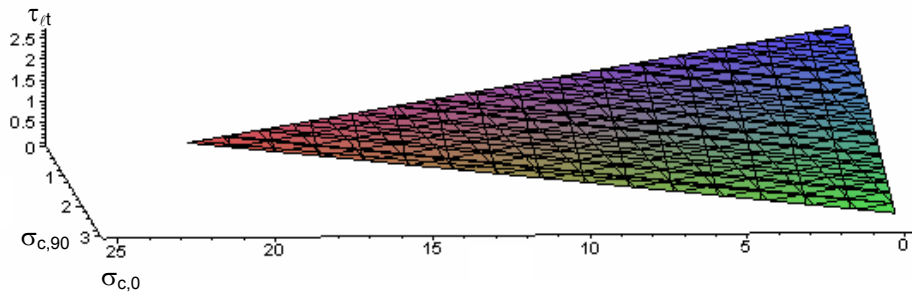


Bild 6.3-3: Darstellung der Festigkeitsfunktion auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] gemäß der linearen Interaktion für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa].

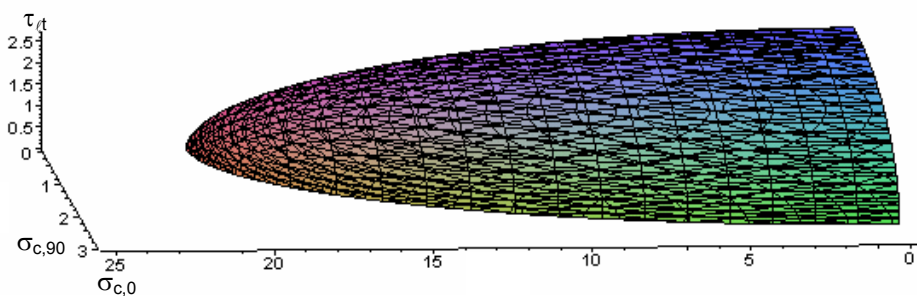


Bild 6.3-4: Darstellung der Festigkeitsfunktion auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] gemäß der quadratischen Interaktion für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa].

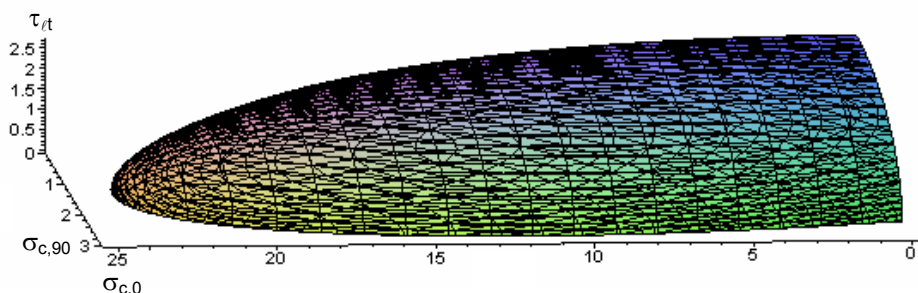


Bild 6.3-5: Darstellung der Festigkeitsfunktion gemäß (6-5) auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa].

Interessant ist ein Vergleich der vorgestellten Ansätze mit normativ geregelten Nachweisen. Anschaulich lässt sich dieser am Beispiel „Druck unter einem Winkel α zur Faser“ durchführen. In Bild 6.3-6 ist der Verlauf der Druckfestigkeit $f_{c,\alpha,k}$ in Abhängigkeit vom Winkel α angetragen. Um der Gegenüberstellung eine einheitliche Basis zu geben, wurden für alle Ansätze als Eingangswerte die in [N4] angeführten charakteristischen Festigkeiten von Nadelholz C24 zugrunde gelegt. Wie bereits bei den Festigkeitsfunktionen in der ℓ -t-Ebene zu erkennen war, wird auch hier deutlich, dass die lineare Interaktion stets einen konservativen Festigkeitswert liefert.

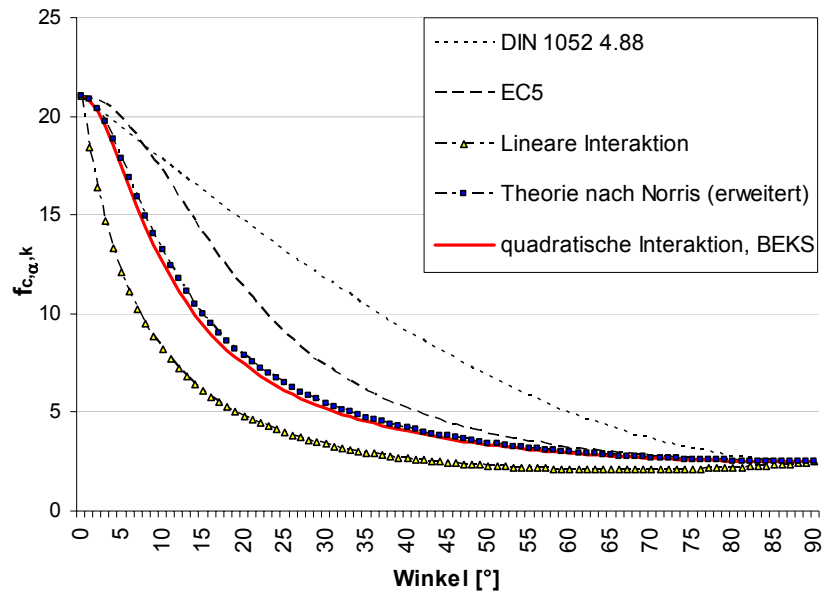


Bild 6.3-6: Vergleich der Ansätze für den Anwendungsfall „Druck unter einem Winkel zur Faser“. Bestimmung der charakteristischen Festigkeit $f_{c,\alpha,k}$ auf Basis der charakteristischen Festigkeiten für NH CD24 nach [N4] ($f_{c,0,k}=21$ MPa, $f_{c,90,k}=2,2$ MPa, $f_{v,k}=2,7$ MPa).

Angaben über Bemessungskonzepte für den räumlichen Spannungszustand, der bei Tragfähigkeitsnachweisen von Flächen aus Holz maßgebend werden kann, sind rar. Die Anwendung der „genaueren“ Theorien, wie sie z.B. von Tsai und Wu oder von Ashkenasi entwickelt wurden, ist in der Praxis des Ingenieurholzbaues letztendlich auch aufgrund des Fehlens der notwendigen Materialparameter zur Zeit kaum denkbar. In [N4] sind Nachweise für „Flächen aus Schichten“ genannt. Das Konzept beruht auf der Kombination verschiedener Einzelnachweise im ebenen Spannungszustand. Je nach betrachteter Ebene und Beanspruchung werden dazu die lineare oder die quadratische Interaktion angewendet. Neben den üblichen Nachweisen für Biegung und Druck werden insbesondere folgende Forderungen gestellt:

$$\left(\frac{\tau_d}{f_{v,d}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{drill,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad \text{Gl. 6-9}$$

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{f_{t,90,d}} + \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} \leq 1 \quad \text{Gl. 6-10}$$

$$\frac{\sigma_{c,90,d}}{f_{c,90,d}} + \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} \leq 1 \quad \text{Gl. 6-11}$$

Anmerkung: Mit $\tau_{drill,d}$ wird der Bemessungswert der Torsionsschubspannung und mit $\tau_{R,d}$ der Bemessungswert der Rollschubspannung bezeichnet.

6.4 Zur Torsion von Flächen aus Holz

Viele bemessungsrelevante Belastungssituationen rufen an flächenhaften Tragstrukturen Verwindungen hervor, die Drill- bzw. Torsionsmomente zur Folge haben. Aussagen über entsprechende Steifigkeiten sind im Falle von Holzflächen schwierig, da das Verhalten nachgiebig verbundener Querschnitte mit Teilquerschnitten aus Holz unter Torsionsbeanspruchung noch kaum erforscht ist. Für eine erste Näherung können die Überlegungen von Stamm und Witte [86], die sich auf dreischichtige Sandwichelemente beziehen, auf Verbundquerschnitte aus Holz übertragen werden. Veranschaulichen lässt sich das Tragverhalten bei Torsionsbeanspruchung anhand des Schubflusses, wie er in Bild 6.4-1 schematisch am Schnitt durch einen Sandwichbalken dargestellt ist. Gut zu erkennen sind der Anteil aus Eigentragwirkung der Deckschichten und der Anteil aus Verbundtragwirkung infolge Schubübertragung der Schubschicht (Schubschicht hier ohne Eigentragwirkung).

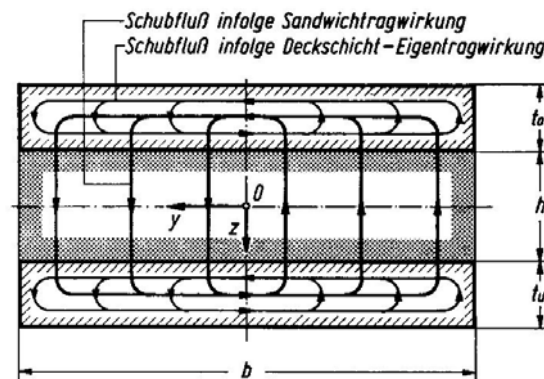


Bild 6.4-1: Schubfluss infolge Torsionsbeanspruchung am Sandwichelement (Schubschicht ohne Eigentragwirkung)
(Quelle: [86])

Um weitere Einblicke in die für das Torsionstragverhalten mehrschichtig aufgebauter Verbundquerschnitte maßgebenden Zusammenhänge zu erhalten, wurden Berechnungen von nachgiebig verbundenen Schichtbalken mit der Methode der Finiten-Elemente unter Einsatz von Volumenelementen durchgeführt ([55], [56]). Von besonderem Interesse war dabei, Aussagen über den Einfluss der Anordnung der Verbindungsmittel auf die Torsionssteifigkeit des Verbundquerschnitts zu erhalten. Diese Problematik ist z.B. für Brettrippenschalen und die Ausbildung genagelter Brettsperrholzelemente von Bedeutung. Üblicherweise wird bei den meisten Berechnungen stets davon ausgegangen, dass die Verbindungsmittelsteifigkeit gleichmäßig über die Fläche verteilt ist. Bei Brettsperrholz mit verleimten Lagen ist dies gegeben. Sind die Lagen jedoch z.B. vernagelt oder verschraubt, ist die Torsionssteifigkeit auch vom Abstand der Verbindungsmittel zu den Brettaussenkanten abhängig. Das später genauer erläuterte Bild 6.4-6 verdeutlicht die Abhängigkeit der Torsionssteifigkeit von der Lage der Verbindung. So hat z. B. eine zentrisch angeordnete, quasi starre Nagelreihe, kaum einen Einfluss auf die Torsionsschubspannungen und die Torsionssteifigkeit (Bild 6.4-6, unten). Das erklärt sich daraus, dass sich die Aussenkanten der Teilquerschnitte in diesem Fall frei gegeneinander verschieben können, weshalb die zugeordneten Schubspannungen zu null werden.

In Bild 6.4-2 ist eines der für die Parameterstudie verwendeten Modelle, ein vierteiliger Balken mit Schubfugen unter Torsionsbeanspruchung, in der durch Tordierung verformten Struktur gezeigt. Der Balken wird an einem Ende von einem Köcherfundament gehalten. Am freien Ende wird die Torsion mittels einer an den Brettaussenkanten entlanglaufenden, konstanten Schubspannung aufgebracht.

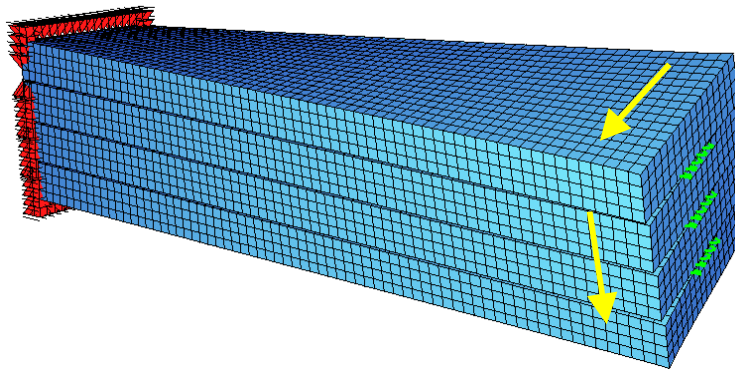


Bild 6.4-2: FE-Modell mit Volumenelementen zur Erfassung der Torsion eines nachgiebig verbundenen Schichtbalkens, perspektivische Darstellung der verformten Struktur.

Das Ergebnis der Untersuchungen ist in Bild 6.4-3 mit Bild 6.4-5 gezeigt: Aus der Verdrillung des Gesamtquerschnittes wurde die von der Verbundsituation abhängige Torsionssteifigkeit GI_t' (im Weiteren mit „effektive Torsionssteifigkeit“ bezeichnet) bestimmt. Diese wurde zu der Torsionssteifigkeit GI_t , die bei starrem Verbund vorhanden ist, ins Verhältnis gesetzt und in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen angetragen. Die parallel zu den Trägerlängskanten verlaufenden Verbindungsmittelreihen wurden schrittweise von außen nach innen entfernt, bis nur noch eine zentrische Reihe übrig war. Interessant ist, dass der untere Grenzwert für das Verhältnis der Steifigkeiten stets größer ist als es sich bei Ansatz der Summe der Einzelsteifigkeiten ergibt. Dieser Grenzwert lautet im Falle von n gleich dicken Schichten:

$$\frac{GI_{t,lose}}{GI_t} = \frac{\eta \cdot n \cdot b \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^3}{\eta \cdot b \cdot h^3} = \frac{1}{n^2}; \quad \text{Gl. 6-12}$$

Dieser Sachverhalt erklärt sich aus der Krafteinleitung am Rechenmodell und dem Einfluss der Lage der einzelnen Schichten: Da die Torsion mittels einer Schubspannung, die nur am äußeren Rand des Verbundquerschnitts verläuft, eingeleitet wird, tragen die äußeren Lagen die Last stets zu einem Teil über Querbiegung ab. Einen Eindruck über die jeweils vorliegenden Spannungsverhältnisse gibt Bild 6.4-6. Hier sind Haupt- und Schubspannungen für repräsentative Verbindungssituationen an einem Schnitt durch den Verbundbalken im ungestörten Bereich dargestellt. Anhand der Orientierung der Hauptspannungen lässt sich gut erkennen, wie der Schubfluss von der Verbindungssituation beeinflusst wird: Im Grenzfall „quasi starrer Verbund“ (Bild 6.4-6, oben) läuft der Schubfluss parallel zu den Außenkanten des gesamten Verbundquerschnitts. Erfolgt die Verbindung der Teilquerschnitte mit nur wenigen, mittig angeordneten Verbindungsmittelreihen, sind Spannungskonzentrationen an den jeweils äußeren Verbindungen zu beobachten (Bild 6.4-6, Mitte). Im Grenzfall nur einer zentrischen Reihe findet keine Übertragung des Längsschubes, und somit des Torsionsschubes, statt. Der Schubfluss orientiert sich entlang der Brettanten der einzelnen Teilquerschnitte (Bild 6.4-6, unten).

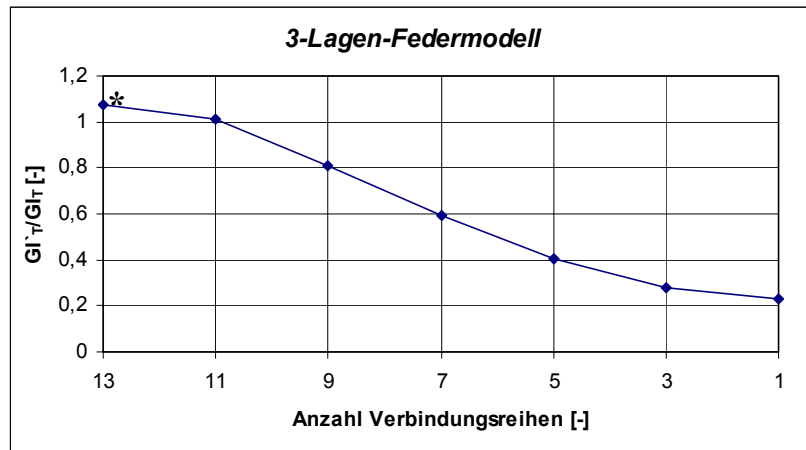


Bild 6.4-3: Dreiteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GI_T' zur Torsionssteifigkeit GI_T bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von aussen zur Querschnittsmitte).

* Die geringfügige Überschreitung des maximal möglichen Verhältnswertes 1 wird auf numerische Probleme wie z.B. Rundungsungenauigkeiten zurückgeführt

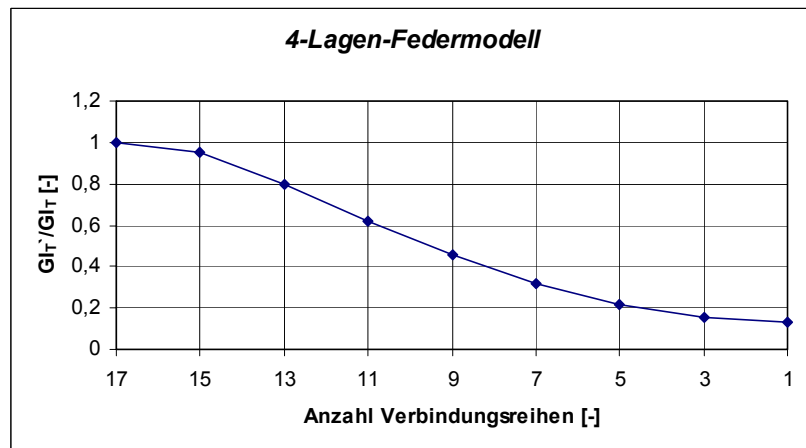


Bild 6.4-4: Vierteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GI_T' zur Torsionssteifigkeit GI_T bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von aussen zur Querschnittsmitte).

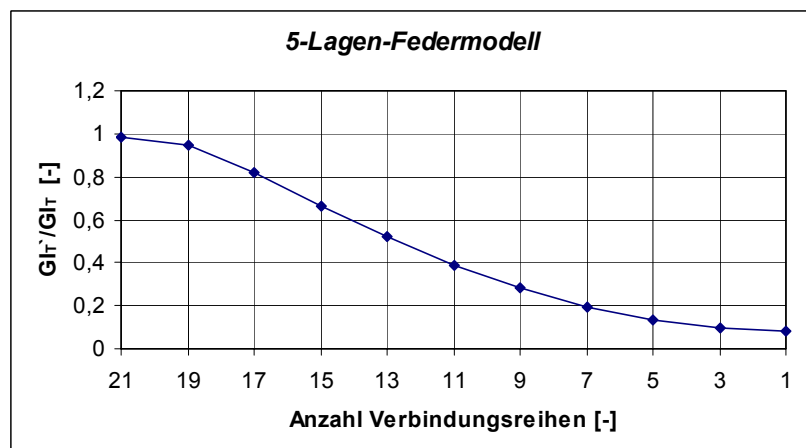


Bild 6.4-5: Fünfteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GI_T' zur Torsionssteifigkeit GI_T bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von außen zur Querschnittsmitte).

Ergänzende Untersuchungen an geschichteten Balkenquerschnitten, bei denen die Schubverbindung mittels schubweicher Schichten realisiert wurde, lieferten tendenziell ähnliche Ergebnisse.

Anmerkung: Die Anisotropie des Werkstoffes Holz hat auch auf das Verhalten von Querschnitten aus Holz bezüglich Torsionsbeanspruchungen Einfluss, so dass die übliche Berechnung auf Grundlage isotroper Werkstoffeigenschaften nur eine Näherung sein kann. Heimeshoff berichtet in [31] anhand eines rhombisch – anisotropen Modells über den Einfluss der Anisotropie auf den Spannungs- und Dehnungszustand von Holzstäben mit Rechteckquerschnitt bei St. Vénant'scher Torsion. Demnach können die Abweichungen im Vergleich zu einem homogenen Werkstoff im Falle von Fichtenholz beispielsweise bis zu 40% betragen. Die exakte Erfassung der Verhältnisse ist allerdings aufwändig. Bezüglich der genauen Berechnung auf Grundlage der rhombischen Kristalltheorie gelangen Möhler und Hemmer im Rahmen einer versuchstechnischen Untersuchung der Problematik zu folgender Schlussfolgerung: „Die sehr umfangreiche Berechnung ist für praktische Fälle kaum anwendbar, ihre Ergebnisse würden bei Bauholz mit Wuchsfehlern und größeren Querschnitten mit Zonen verschiedenen Jahrringverlaufes auch gar nicht mehr zutreffen.“ [60]. Bei der Auswertung der Versuchsergebnisse stellen sie fest, dass fehlerhafte Bereiche, wie z.B. Äste etc. einen großen Einfluss auf die Tragwirkung von tordierten Holzquerschnitten haben können, wodurch andere Einflussgrößen überdeckt werden können.

Den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit ist bezüglich Torsion in üblicher Weise ein isotropes Elastizitätsgesetz zugrunde gelegt, was im Rahmen der getroffenen vereinfachenden Annahmen gerechtfertigt ist.

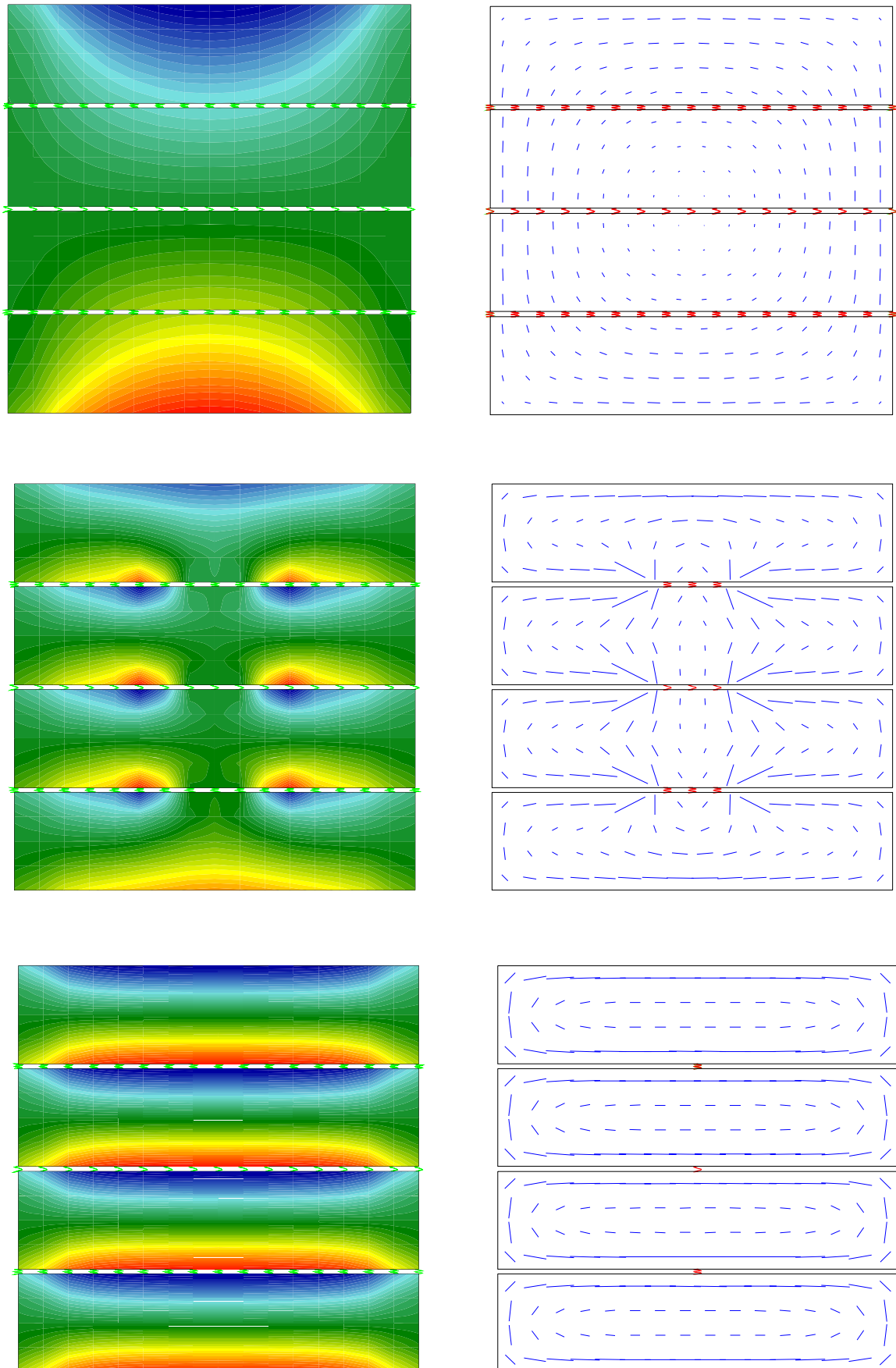


Bild 6.4-6: Torsion am Schichtbalken, für den starren Verbund, drei mittige Verbindungsmittelreihen und eine Verbindungsmittelreihe (von oben nach unten); jeweils links: Betrag der Schubspannung in Querrichtung als Füllfläche, rechts: Orientierung der Hauptspannung.

6.5 Zur Abbildung von Flächen aus Holz im ideellen System

Die Tragwirkung von Flächentragwerken aus Holz ist in vielen Fällen durch eine ausgeprägte Anisotropie gekennzeichnet. Die Ursachen dafür sind sowohl im Verhalten des Werkstoffes Holz als auch im Querschnittsaufbau dieser Flächen zu sehen. Bedingt durch das natürliche Wachstum sind die mechanischen Eigenschaften von Holz stark gerichtet und orientieren sich an der Faserstruktur (vgl. z.B.: [39]). Deshalb weist der Elastizitätsmodul von Nadelholz senkrecht zur Faser in etwa nur 1/30 des in Faserrichtung vorhandenen Wertes auf. Für den Schubmodul ist ein Verhältnis von ungefähr 1/10, bezogen auf Schubbeanspruchungen in longitudinal-tangentialen (bzw. longitudinal-radialen) Ebenen, im Vergleich zu Beanspruchungen in radial-tangentialen Ebenen gegeben (näheres hierzu z.B. auch in Kapitel 6.2). Holzflächen entstehen durch Zusammenfügen einzelner Holzteile. Die Möglichkeiten sind mannigfaltig, ein Überblick ist mit Kapitel 3 gegeben. Je nach Ausführung wird bei diesen Elementen die Anisotropie des Rohstoffes Holz betont oder nahezu neutralisiert.

Grundsätzlich stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, eine Fläche bei numerischen Berechnungen abzubilden. Ein mittlerweile gängiges Verfahren ist die Finite-Element-Berechnung auf Basis von so genannten Scheiben- bzw. Plattenelementen. Die andere Möglichkeit besteht darin, die Flächenstruktur mit so genannten „Gitter-“ oder „Trägerrosten“ abzubilden.

Die Eignung von praxisüblichen Finiten Elementen für die Erfassung anisotroper Verhältnisse ist unterschiedlich. In vielen Fällen besteht die Möglichkeit, gerichtete Eigenschaften über richtungsweise unterschiedliche Dicken oder mittels gerichteter Materialparameter zuzuweisen. Dabei sind allerdings je nach verwendeter Software Grenzen bezüglich der maximal möglichen Unterschiede gesetzt. Es ist auch zu beachten, dass eine zu deutlich ausgeprägte Anisotropie numerische Probleme hervorrufen kann. Die Umsetzung des ideellen Systems der Schubanalogie ist grundsätzlich in Form von Finite-Element-Berechnungen möglich. Für gewöhnlich gestatten entsprechende Programme aber keine direkte Eingabe von Biege- und Schubsteifigkeiten. Dadurch wird ein relativ aufwändiger Vorlauf notwendig, bei dem diese Steifigkeiten über ideelle Dicken in Kombination mit passenden Materialkenngrößen den ideellen Ebenen zugewiesen werden. In [52] ist dieses Procedere näher beschrieben und an Beispielen getestet. Mitunter gestaltet sich die Kontrolle der vom Programm tatsächlich angesetzten Parameter aufwändig.

Eine Alternative zu dieser Systemmodellierung sind Trägerrostberechnungen. Einige Softwarelösungen bieten die Möglichkeit einer direkten Zuweisung von Querschnittswerten. Dadurch und auf Grund der klaren Struktur eines Rostes ist die Kontrolle der beim Rechenlauf verwendeten Kenngrößen vergleichsweise einfacher. Auch die Generierung und Berechnung stark anisotroper Elemente ist auf diese Weise möglich. Das Tragverhalten in Bezug auf den Scheibenschub kann über Auskreuzungen oder über eine Vierendeeltragwirkung der Roststäbe etc. abgebildet werden. Zwar stellen solche Rostberechnungen eine Näherung dar, doch können die Abweichungen durch ein ausreichend fein gewähltes Raster stark begrenzt werden. Dirr [17] und Waller [97] haben sich in Ihren Dissertationen ausführlich mit der Thematik der näherungsweisen Berechnung von Scheiben und Platten in Form von Rostberechnungen beschäftigt. In [18] sind die Ergebnisse zusammengefasst. Ergänzend wird in [13] die Verwendung gekrümmter Gitterrostelemente zur Berechnung von Schalentragwerken untersucht.

7 Erweiterte Test- und Beispielrechnungen

7.1 Berechnungsbeispiel „Eigenspannungszustände Brettstapelbogen“

7.1.1 Angaben zum System

Mit Hilfe von entsprechend eingeleiteten Kraftgrößen kann die Schubanalogie auch zur Ermittlung von Eigenspannungszuständen eingesetzt werden. In dem folgenden Beispiel werden die Spannungszustände eines Holzbogens, der aus nach dem Biegen verschraubten Einzelbrettern besteht, jeweils für die einzelnen Fertigungsschritte ermittelt. Das gezeigte Vorgehen ist auch für die Berechnung von Brettrippenschalen von Interesse, da bei dieser Bauweise mehrere so geartete Bögen zusammenwirken. Ergänzend wird der Zustand auch für nach dem Biegen verleimte Bretter ermittelt.

Der in diesem Beispiel untersuchte Bogen wird aus fünf gleichen Einzelbrettern mit Abmessungen von jeweils $b \times h_i = 777,5 \times 8 \times 2,7 \text{ cm}^3$ hergestellt. Dazu werden die Bretter mit Hilfe einer Lehre in einem mittleren Radius von $R=495 \text{ cm}$ gebogen und anschließend mit Holzschrauben ($\varnothing 5 \text{ mm}$) mit einem Abstand von $s=18 \text{ cm}$ einreihig verschraubt (vgl. Bild 7.1-1). Der E-Modul der Bretter wird mit 11000 MPa , der Verschiebungsmodul einer Schraube mit $k_{\text{ser}}=1,85 \text{ MN/m}$ angesetzt.

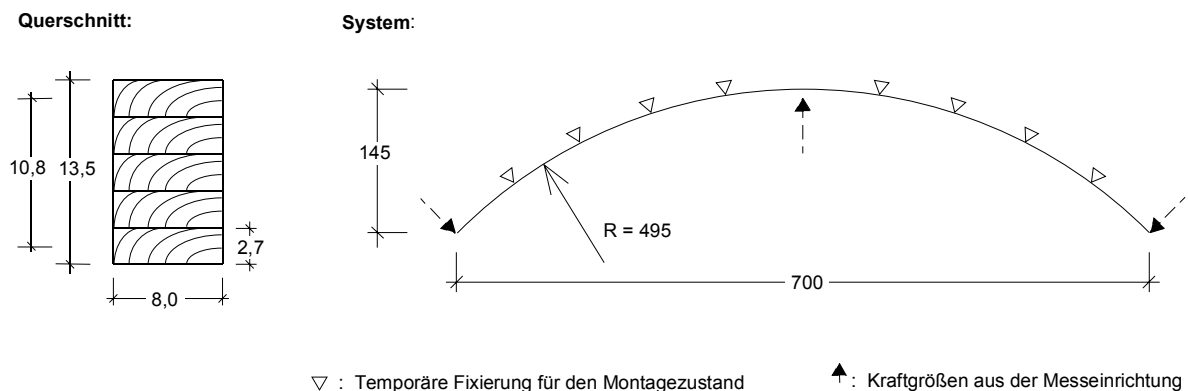


Bild 7.1-1: Querschnitt und System des Brettstapelbogens [cm]

An Bogenträgern mit dem hier beschriebenen Aufbau wurden an der EPFL-IBOIS (Lausanne) Versuche bezüglich des Relaxationsverhaltens durchgeführt (vgl. z.B. [96]). Die folgenden Berechnungen haben rein exemplarischen Charakter und sind nicht als Bemessungsbeispiel gedacht, sondern eher als Ergänzung zu den Relaxationsversuchen anzusehen. Daraus erklärt sich auch die Wahl des geringen Biegeradiuses, der zwar hohe Normalspannungen infolge des Biegevorgangs hervorruft, aber eine deutliche Darstellung der Effekte ermöglicht. Auf die Auswirkungen von Kriecherscheinungen wird in den folgenden Berechnungen allerdings nicht näher eingegangen.

Vernachlässigt man die Schubnachgiebigkeit der Bretter selbst, so bestimmen sich folgende Eingangsgrößen für die Berechnungen gemäß der Schubanalogie:

$$B^A = 5 \cdot \frac{0,027^3 \cdot 0,08}{12} \cdot 11000 = 7,217 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}^2$$

$$B^B = 2 \cdot 0,027 \cdot 0,08 \cdot 11000 \cdot (0,027^2 + 0,054^2) = 1,732 \cdot 10^{-1} \text{ MNm}^2$$

$$c = \frac{1,85}{0,18} = 10,27 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}; \quad S_{\text{Verb}} = 0,108^2 \cdot \frac{10,27}{4} = 2,997 \cdot 10^{-2} \text{ MN}$$

Dabei wird die Verschraubung durch einen über die Trägerlänge verschmierten Wert wiedergegeben. Die lokale Kräfteinleitung der einzelnen Schrauben wird hier nicht näher untersucht.

7.1.2 Spannungen aus Vorkrümmung

Im ersten Fertigungsschritt werden die lose aufeinander liegenden Bretter mit einer konstanten Krümmung gebogen. In den folgenden Betrachtungen wird näherungsweise davon ausgegangen, dass dabei alle Bretter die selbe „mittlere“ Krümmung $\kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{4,95\text{m}} = 0,202\text{m}^{-1}$ erhalten. Bei

kleinen Neigungen ($w'^2 \ll 1$) lässt sich die Krümmung sehr gut mit der zweiten Ableitung der Biegelinie annähern ($\kappa \approx w''$; vgl. z.B.: [79]). Das Segment des hier behandelten Brettstapelbogens weist einen Öffnungswinkel von 90° auf. An den Enden des Bogens hat die Tangente eine Neigung von $|\varphi|=45^\circ$, was streng genommen eine Verletzung der eben genannten Bedingung darstellt. Für das Ende des Bogens gilt:

$$w'^2 = \left(\frac{45^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \right)^2 = 0,617 < 1$$

Akzeptiert man jedoch geringfügige Abweichungen, was im Rahmen einer Näherung gerechtfertigt ist, lässt sich der beschriebene Verformungszustand auch durch ein über die Trägerlänge konstantes Biegemoment erzeugen. Für das Moment eines im Radius R gebogenen Brettes gilt dann folgende Beziehung:

$$M_i = -w'' \cdot (EI)_i = -\frac{B_i}{R} = -E_i \cdot \frac{b_i \cdot h_i^3}{12 \cdot R}; \quad \text{Gl. 7-1}$$

Die Randspannung einer im Radius R gebogenen Lamelle mit der Dicke h_i und der Breite b_i beträgt damit:

$$\sigma_{R,i} = \pm \frac{E_i \cdot h_i}{2 \cdot R} \quad \text{Gl. 7-2}$$

Dieser Zustand lässt sich mit der Schubanalogie abbilden, indem die Schubsteifigkeit nahe Null gesetzt (lose Lammellen, kein Verbund $\Rightarrow S \rightarrow 0$) und an den beiden Trägerenden auf den Träger A ein Randmoment der Größe

$$M_{y,0}^A = \sum_n M_{y,i}^A = -\frac{B^A}{R} = -\frac{7,217 \cdot 10^{-3}}{4,95} \text{ MNm} = -1,458 \text{ kNm}$$

aufgebracht wird, wie in Bild 7.1-2 angedeutet ist.

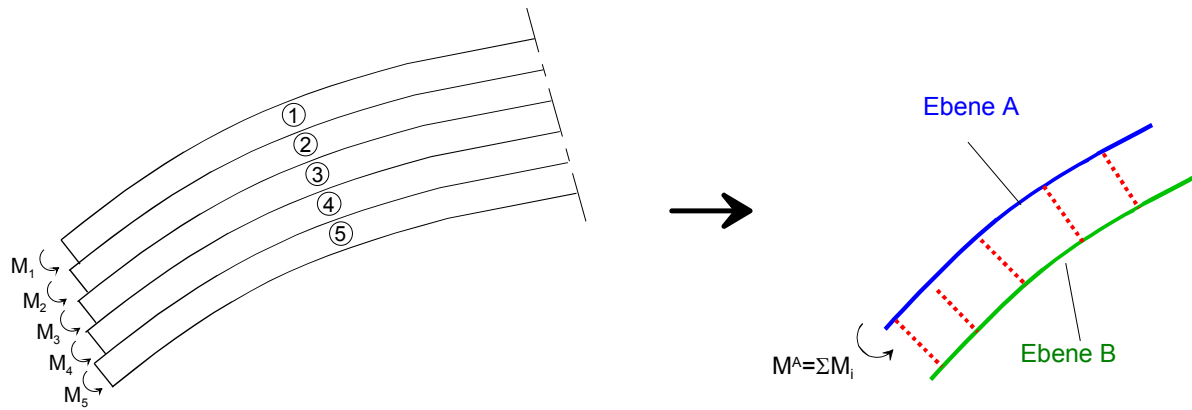


Bild 7.1-2: Ausschnitt, Biegung des Brettstapelbogens durch ein Randmoment, Erfassung mit der Schubanalogie

Durch den Biegevorgang wird die Randspannung σ_{R0} in den Brettern erzeugt:

$$\sigma_{R0} = \pm \frac{11000 \cdot 0,027}{2 \cdot 4,95} = \pm 30 \text{ Mpa}$$

Bei den hier gegebenen Verhältnissen sind sowohl die Einflüsse der Krümmung auf die Spannungsverteilung als auch die auftretenden Radialspannungen vernachlässigbar (vgl. auch: [96]).

Durch das Verbinden der gebogenen Einzelbretter zu einem Verbundquerschnitt wird dieser Spannungszustand festgehalten. Rechentechnisch wird bei Verwendung der Schubanalogie der Verbundvorgang mittels der Änderung der Schubsteifigkeit S erfasst. Eine lastfallabhängige Variation der Schubsteifigkeit ist aus programmtechnischer Sicht nur schwer realisierbar. Somit empfiehlt es sich, die Krümmung des Bogens nicht durch Randmomente, sondern durch eine explizite Koordinateneingabe zu generieren. Der soeben ermittelte Eigenspannungszustand ist dann zu den am eigenspannungsfreien System ermittelten Spannungen der jeweiligen Lastfälle zu addieren.

7.1.3 Der Zustand „Elastische Rückverformung des nicht gehaltenen Brettstapelbogens“

Nach dem Verschrauben der Bretter wird die Fixierung des Bogens auf der Montagelehre gelöst. Der Verbundquerschnitt kann sich frei verformen. Dem Lösen der Fixierung entspricht im Rechenmodell das Entfernen des Randmomentes M_{y0} , das zum Erzeugen der Krümmung auf die Lamellen aufgebracht wurde. Durch Kräfte in den Schubfugen wird der Bogen in Form gehalten. Der Fugenschlupf und die Elastizität des Werkstoffes bedingen eine Rückverformung des Bogens, welche anschaulich auch mit dem Begriff „Aufatmen“ bezeichnet wird. Im Falle eines starren Verbundes (Verleimung der Bretter) tritt die minimale Rückverformung auf.

Rechnerisch lässt sich dieser Vorgang erfassen, indem ein Randmoment der Größe $M_{yR} = -M_{y0}$ als rückstellende Kraftgröße auf die Einzelbretter des gebogenen Verbundquerschnitts aufgebracht wird. In diesem Lastfall werden Kräfte in der Schubverbindung der Brett-fugen hervorgerufen, die sich je nach Fugensteifigkeit über die Bogenlänge verteilen. Im Grenzfall „starrer Verbund“ liegt ein homogener Querschnitt unter reiner Biegebeanspruchung vor, bei dem die Schubspannung gleich Null ist – ausgenommen sind davon lokal sehr stark begrenzte Krafteinleitungsbereiche an den Trägerenden. In diesen so genannten Störbereichen kann die Schubspannung in Abhängigkeit von der Steifigkeit in den Fugen theoretisch unendlich groß werden. Bei einer Berechnung dieses Zustandes mit der Schubanalogie ist der Betrag der Querkräfte in diesem Bereich auch von der gewählten Elemententeilung abhängig. Der Normalspannungsverlust durch das Aufatmen kann

durch Aufbringen des rückstellenden Randmoments $M_{y,R}$ auf den Gesamtquerschnitt bestimmt werden:

$$\sigma_{R,Rück} = \pm \frac{M_i \cdot 6}{b \cdot n \cdot h_i^2} = \pm \frac{E \cdot h_i}{2 \cdot R \cdot n} = \pm \frac{11000 \cdot 0,027}{2 \cdot 4,95 \cdot 5} \text{ MPa} = \pm 6 \text{ MPa}$$

Durch Überlagerung mit dem Eigenspannungszustand erhält man die resultierende Normalspannungsverteilung an dem Brettstapelbogen nach dem Verkleben. Bild 7.1-3 zeigt den Verlauf der Normalspannungen am Bogenquerschnitt für die Lastfälle „Biegen der Einzelbretter“ (1), „Rückstellmoment am starr verbundenen Gesamtquerschnitt“ (2) und „verleimter Bogen nach dem Lösen der Fixierung“ (1+2).

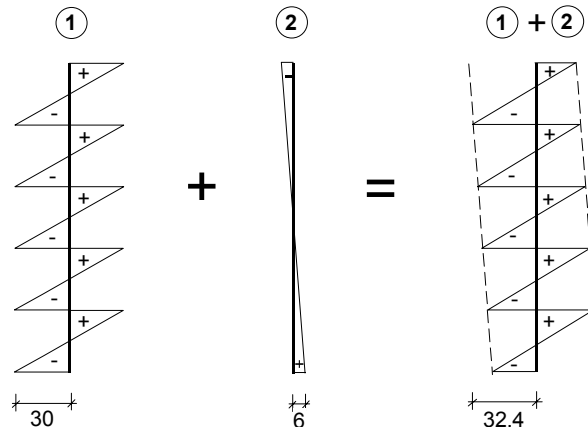


Bild 7.1-3: Ermittlung des Spannungszustandes „verleimter Bogen nach dem Lösen der Fixierung“ (1+2)

Für den starr verbundenen Querschnitt ist der Verlauf der elastischen Rückverformung kreisbogenförmig. Durch Aufbringen des Rückstellmomentes kann in diesem Fall die Verschiebung der Trägerenden senkrecht zur Trägerachse wie folgt bestimmt werden:

$$-w'' = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow \quad |w_{Rück}| = \int_0^{\ell/2} \frac{M_{y,R}}{EI} dx = M_{y,R} \cdot \frac{\ell^2}{8 \cdot EI_{Starr}} = 6,1 \text{ cm}$$

Weitere Angaben zur Ermittlung der herstellungsbedingten Eigenspannungszustände von verleimten Elementen sind z. B. bei Szalai [90], der sich im Zusammenhang mit gebogenen Brettschichtholzträgern mit dieser Thematik befasst hat, zu finden.

Im Falle verschraubter Einzelbretter ist die analytische Ableitung der Verhältnisse aufwendiger. Bei den gegebenen Lastfällen liegt z.B. auch kein über die Trägerlänge konstanter Ersatzwert EI_{eff} für die Biegesteifigkeit vor. Zur Erfassung des Aufatmens mit der Schubanalogie wird das Randmoment $M_{y,R}$ aufgebracht. Da dieses Rückstellmoment seine Ursache in der Vorverformung der Einzelbretter hat, wird das Moment auf die Ebene A des ideellen Systems aufgebracht. Um zwar einen frei verformbaren Bogen abzubilden, aber kein verschiebliches Rechensystem zu erhalten, ist der Bogen in der Mitte eingespannt. Aufgrund der Symmetriebedingungen bei den untersuchten Lastfällen hat dieses Lager keinen Einfluss auf die Schnittgrößen.

Im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“ (2) ergeben sich die in Bild 7.1-4 und Bild 7.1-5 für beide Ebenen getrennt dargestellten Schnittgrößenverläufe. Durch Addition des Lastfalls „Biegen der Einzelbretter“ wird der Eigenspannungszustand „verschraubter Bogen nach dem Lösen der Fixierung“ („Aufatmen“) (1+2) wiedergegeben. Da im Lastfall 1 keine Querkraft hervorgerufen wird, ergibt die Summe der Querkräfte von Ebene A und B aus dem Lastfall 2 die „externe“ Querkraft am verschraubten Bogen. Diese hat für jede Stelle des Trägers den Wert Null, da es sich um einen Eigenspannungszustand handelt.

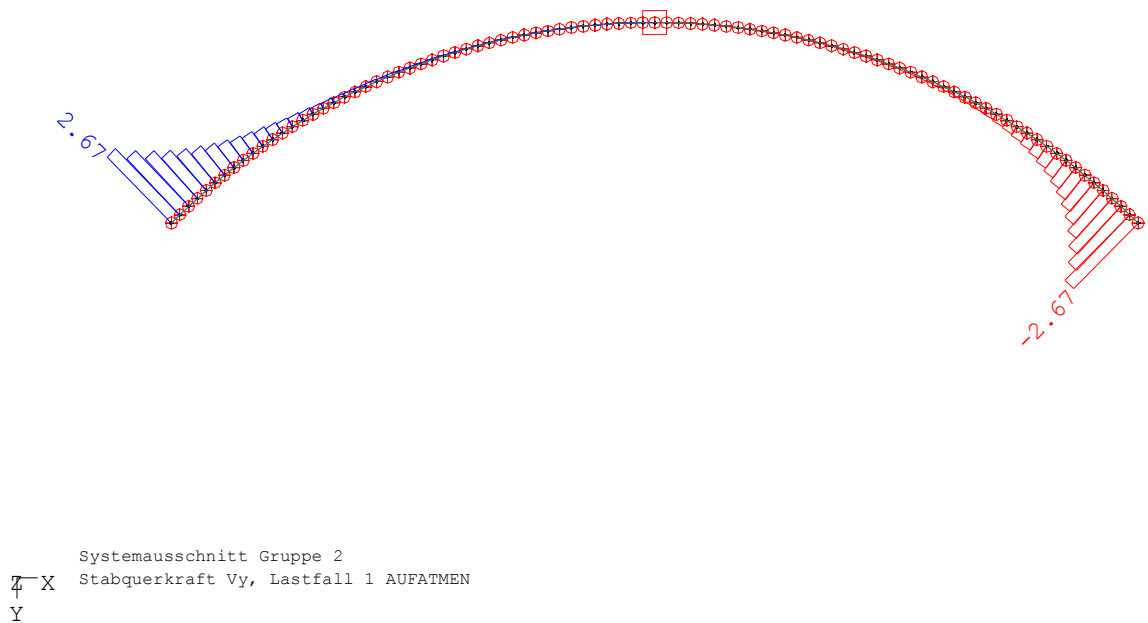
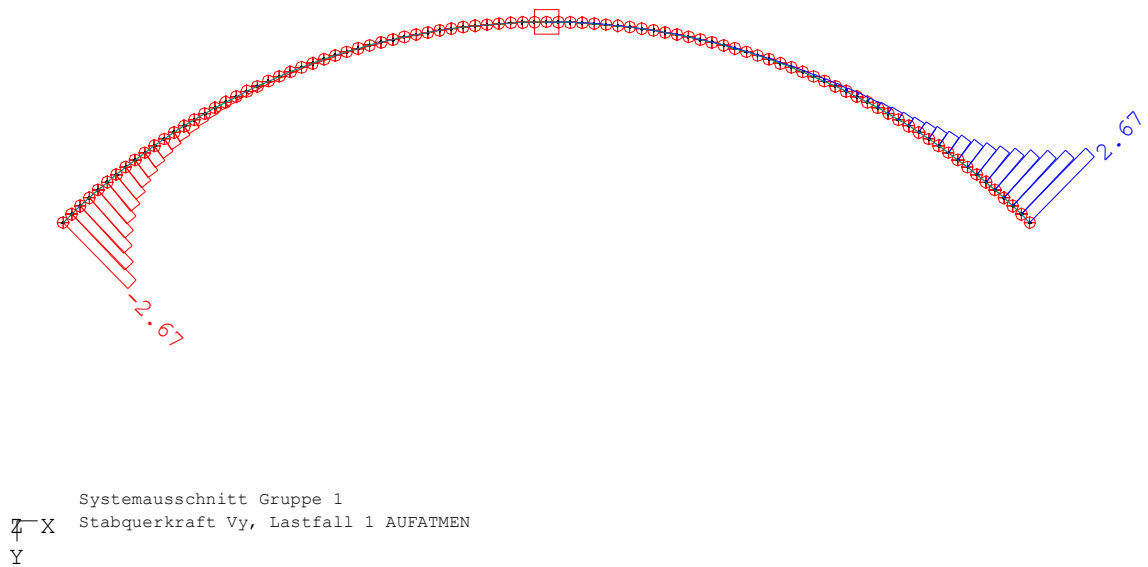
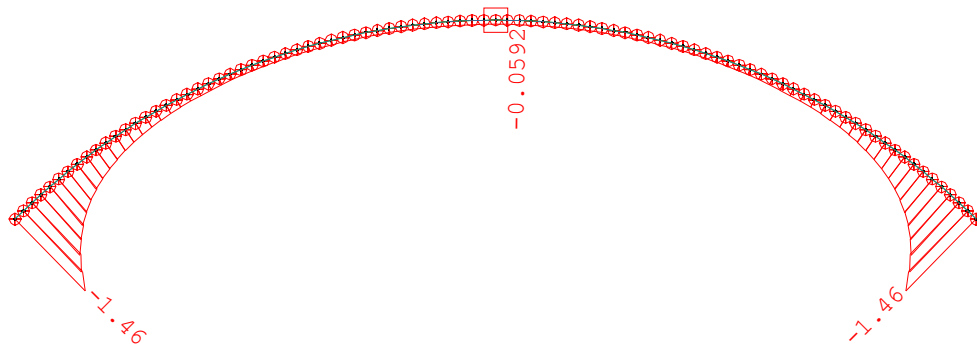


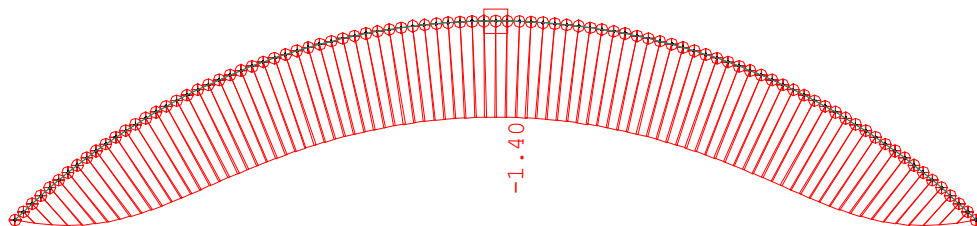
Bild 7.1-4: Querkraftverlauf [kN] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 $\equiv$ Ebene A, Gruppe 2 $\equiv$ Ebene B

Die Summe der Biegemomente (vgl.: Bild 7.1-5) hat den konstanten Wert 1,46 kNm. Dabei ist zu beachten, dass die vom Rechenprogramm ausgegebenen Vorzeichen eingabetechnisch bedingt hier entgegengesetzt zur vereinbarten Vorzeichendefinition erfolgt. Addiert man hierzu das zur Vorkrümmung des Trägers erforderliche konstante Biegemoment von $M_{y0} = -1,46$ kNm (Lastfall 1), hat auch das „externe“ Biegemoment im Eigenspannungszustand den Wert Null.



Systemausschnitt Gruppe 1
 Stabbiegemoment Mz, Lastfall 1 AUFATMEN

X
 Y



Systemausschnitt Gruppe 2
 Stabbiegemoment Mz, Lastfall 1 AUFATMEN

X
 Y

Bild 7.1-5: Biegemomentverlauf [kNm] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B

Mit Hilfe dieser „internen“ Schnittgrößen kann die Spannungsverteilung über den Querschnitt im Eigenspannungszustand an jeder beliebigen Stelle des Trägers bestimmt werden. Exemplarisch wird dies hier am „Trägerende“ und in „Trägermitte“ durchgeführt.

Spannungszustand an den Bogenenden:

Der Maximalwert vom Eigenanteil der Normalspannung beträgt am Trägerende für jede Schicht:

$$\sigma_{i,\max}^A = \pm \frac{M^A}{B^A} \cdot E_i \cdot \frac{d_i}{2} = \pm \frac{1,458 \cdot 10^{-3}}{7,217 \cdot 10^{-3}} \cdot 11000 \cdot 0,0135 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = \pm 30,0 \text{ MPa}$$

Das entspricht der bei der Brettbiegung erzeugten Normalspannung, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das Biegemoment der Ebene B hat an dieser Stelle den Wert Null. Im Eigenspannungszustand ist das Trägerende also frei von Normalspannungen. Jedoch ist das Trägerende für diesen Lastfall die Stelle mit der größten Verschiebung der einzelnen Bretter gegeneinander. Deshalb liegt hier die maximale Schubspannung vor. Diese ist schichtweise zu bestimmen. Die Anteile der Schubspannung für jede Schicht i haben in Abhängigkeit von den Koordinaten z_i und z_{si} folgenden Werte:

$$\tau_i^A(z_i) = -\frac{Q^A \cdot E_i}{B^A} \cdot \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{d_i^2}{8} \right) = \frac{-2,67 \cdot 10^{-3} \cdot 11000}{7,217 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(\frac{z_i^2}{2} - \frac{0,027^2}{8} \right)$$

$$\tau_i^A(z_i) = 4069,56 \cdot \left(\frac{z_i^2 [\text{m}^2]}{2} - 9,11 \cdot 10^{-5} \right) \text{ MPa}$$

$$\tau_i^B(z_i) = -\frac{Q^B \cdot E_i}{B^B} \cdot z_{si} \cdot \left(z_i + \frac{d_i}{2} \right) + \tau_{i,0} = \frac{-2,67 \cdot 10^{-3} \cdot 11000}{1,732 \cdot 10^{-1}} \cdot z_{si} \cdot \left(z_i + \frac{0,027}{2} \right) + \tau_{i,0}$$

$$\tau_i^B(z_i) = -169,6 \cdot z_{si} \cdot (z_i + 0,0135) \text{ MPa} + \tau_{i,0}$$

Der resultierende Wert in Schichtmitte der äußeren Schichten ($z_i=0$; $z_{si}=0,054$) beträgt z.B.:

$$\tau_i(z_i) = \tau_i^A(z_i) + \tau_i^B(z_i) = -4069,56 \cdot \left(\frac{z_i^2 [\text{m}^2]}{2} - 9,11 \cdot 10^{-5} \right)$$

$$\tau_i(z_i = 0) = -4069,56 \cdot (-9,11 \cdot 10^{-5}) - 169,6 \cdot 0,054 \cdot (0,0135) + 0 = 0,371 - 0,124 = 0,247 \text{ MPa}$$

Der Maximalwert der Schubspannung in den Randschichten liegt allerdings nicht in Schichtmitte an. In Bild 7.1-6 ist der Schubspannungsverlauf für die obere Hälfte des Gesamtquerschnitts dargestellt.

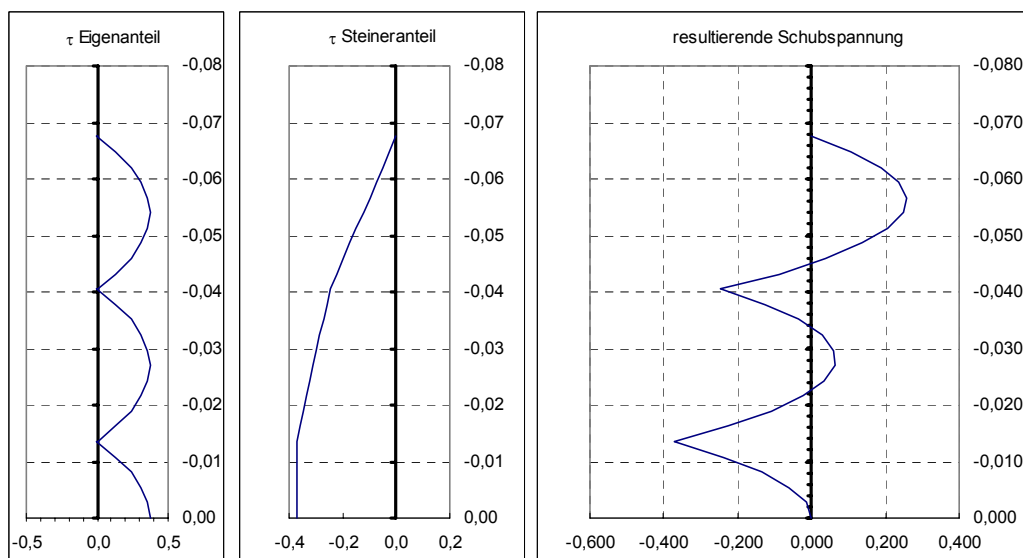


Bild 7.1-6: Schubspannungsverlauf [MPa] für den verschraubten Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

Spannungszustand in Bogenmitte:

Die Anteile der Normalspannung in Bogenmitte für den Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“ (2) bestimmen sich wie folgt:

$$\sigma_{i,\max}^A = \pm \frac{M^A}{B^A} \cdot E_i \cdot \frac{d_i}{2} = \pm \frac{5,92 \cdot 10^{-5}}{7,217 \cdot 10^{-3}} \cdot 11000 \cdot 0,0135 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = \pm 1,22 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i^B(z_{si}) = \frac{M^B}{B^B} \cdot E_i \cdot z_{si} = \pm \frac{1,399 \cdot 10^{-3}}{1,732 \cdot 10^{-1}} \cdot 11000 \cdot z_{si} = 88,85 \cdot z_{si} [\text{m}] \text{ MPa}$$

Bild 7.1-7 zeigt den Verlauf der Normalspannung in Trägermitte für die obere Querschnittshälfte. Dieser entspricht dem Verlauf, der sich bei starrem Verbund einstellt.

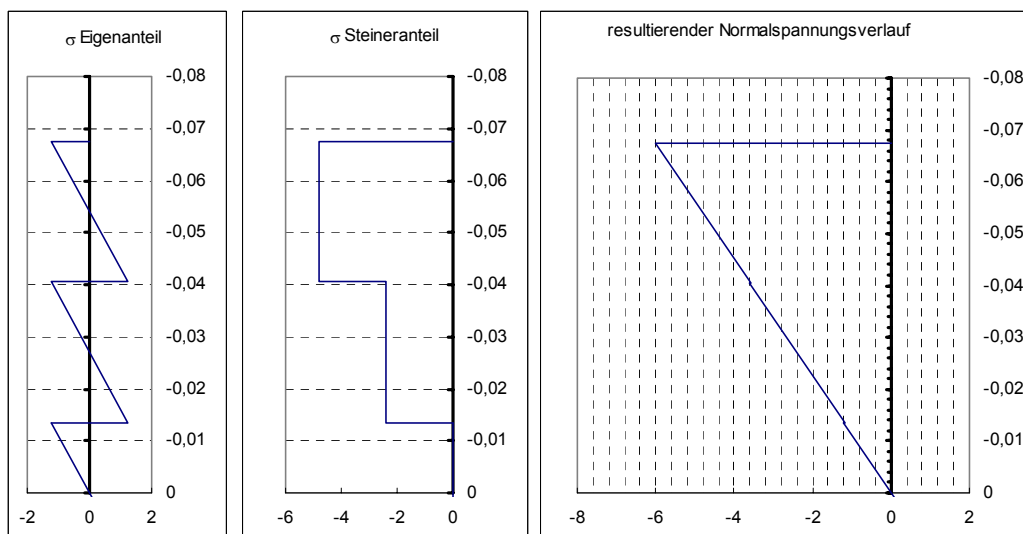


Bild 7.1-7: Normalspannungsverlauf [MPa] für den verschraubten Bogen im Lastfall „Aufatmen“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

Die Querkräfte in Bogenmitte sind gleich Null. Das bedeutet, es wird kein Schub übertragen, weshalb in diesem Bereich keine Schubbeanspruchung der Bretter vorliegt.

Die Spannungsverhältnisse des verschraubten Bogens sind auch für den Lastfall „Aufatmen“ in Bogenmitte identisch mit denen des verklebten Bogens (vgl.: Bild 7.1-3). Der Verlauf der ideellen Schnittgrößen bestätigt dies. Aufgrund der Steifigkeitsverhältnisse stellen sich schon weit vor der Bogenmitte konstante Verhältnisse ein, was auf einen an den Bogenenden konzentrierten Störbereich hinweist. Die Länge dieses Störbereiches und somit auch die erforderliche Verbundlänge sind von der Steifigkeit in den Verbundfugen abhängig.

Ergänzend sind in Bild 7.1-8 die Verschiebungen des Bogens infolge „Aufatmen“ gezeigt. Gut zu erkennen ist, wie die verschobene Struktur des Bogens zu den Enden hin von der Kreisform abweicht, was wiederum den Störbereich andeutet. Diese Tendenz des verschraubten Bogens, zu den Enden hin abzuflachen, lässt sich auch durch das Fehlen der Normalspannung an dieser Stelle erklären. Das zur Biegung der Lamellen notwendige innere Moment wird erst über die Länge durch Schubspannungen erzeugt, die infolge der gegenseitigen Verschiebung der Bretter generiert werden. Das Abweichen der Verschiebungsfigur bestätigt auch die Aussage, dass der Ersatzwert für die Biegesteifigkeit EI_{eff} im gegebenen Lastfall keine konstante Größe ist.

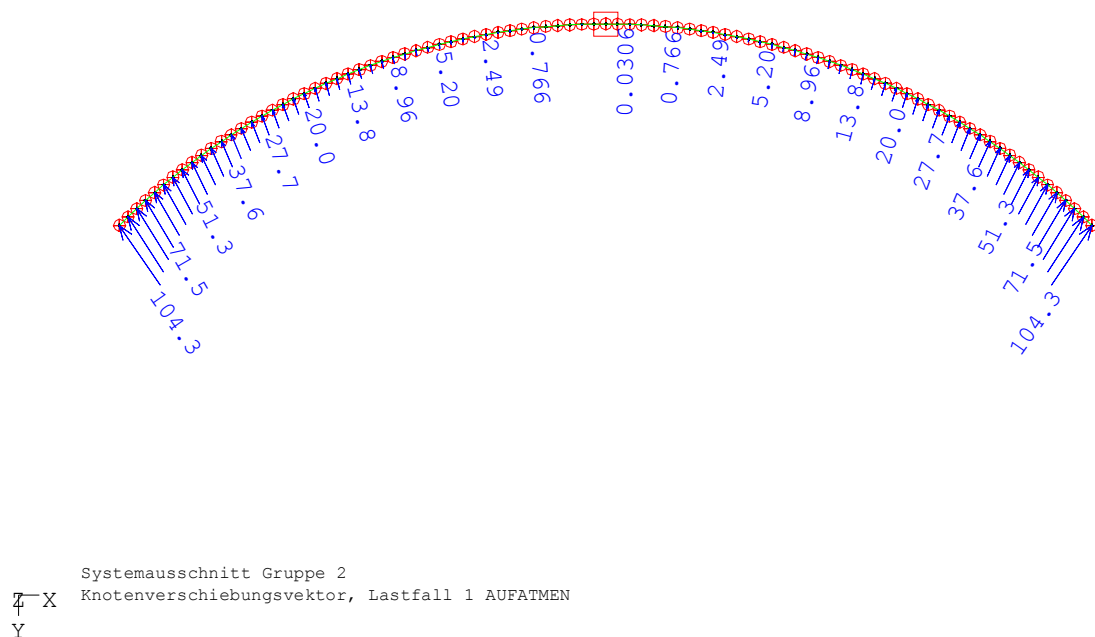
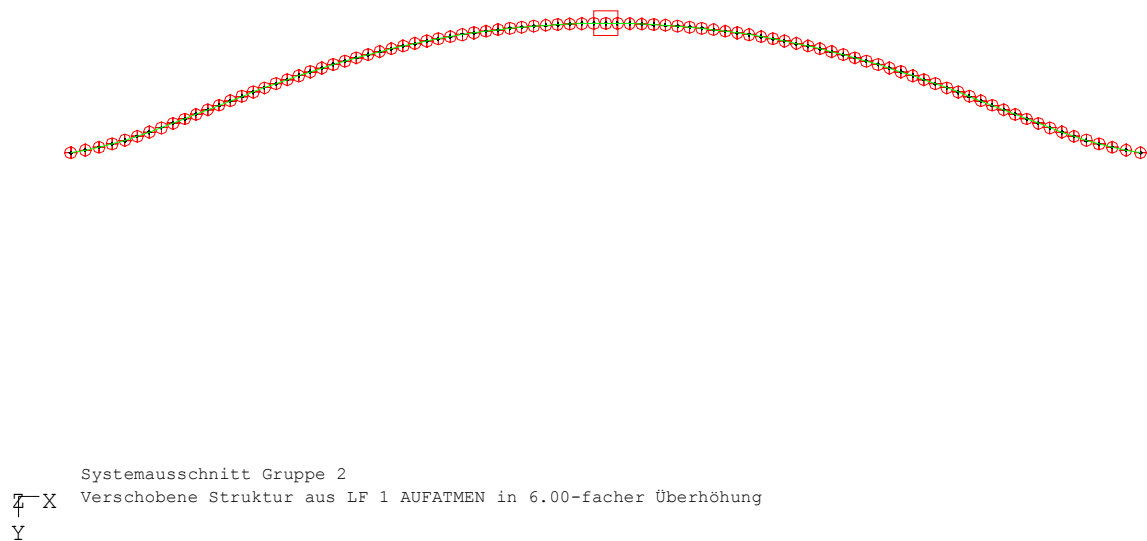


Bild 7.1-8: Programmausdruck: Verformungsfigur und Knotenverschiebungen [mm] des verschraubten Bogens, Lastfall „Aufatmen“, Darstellung der Ebene B=Gruppe 2

7.1.4 Der Zustand „elastische Rückverformung des durch Lagermessdosen gehaltenen Brettstapelbogens“

Im Zusammenhang mit den Relaxationsversuchen wurden an den beiden Enden des Bogens Lagermessdosen angebracht. Nach dem Lösen von der Montagelehre war der Bogen dann durch ein Mittelauflager und die beiden Lagermessdosen gehalten. Ergänzend soll auch diese Situation mit dem Rechenmodell erfasst werden. Dazu wird der Bogen wie in den bereits vorangegangenen Abschnitten generiert und das System zur Abbildung der Messdosen an den Trägerenden durch

zwei tangential zur Systemachse unverschiebliche Lager ergänzt. Die rücktreibende Kraft der Bretter im Lastfall „Aufatmen“ wird wieder durch Aufbringen des Randmomentes M_{yR} auf die Ebene A des ideellen Systems des Verbundquerschnitts abgebildet. Analog zu den vorangegangenen Berechnungen werden die aus diesem Lastfall am Verbundquerschnitt resultierenden Spannungen bestimmt. Addiert man dazu die aus dem Biegevorgang resultierende Normalspannung der Bretter, erhält man die Spannungsverteilung im Zustand „Aufatmen des durch Lagermessdosen gehaltenen Bogens nach Lösen der Fixierungen der Biegelehre“. In den Bildern Bild 7.1-9 und Bild 7.1-10 sind die Schnittgrößen des ideellen Systems (Achtung: abweichende Vorzeichendefinition, s. o.). In Bild 7.1-11 sind die Verformungen und die sich aus der Zwängung ergebenden Lagerkräfte für den Lastfall „Aufatmen“ dargestellt. Die Summe dieser internen Schnittgrößen ergibt den Schnittgrößenverlauf eines mit den Lagerkräften belasteten einfachen Balkens.

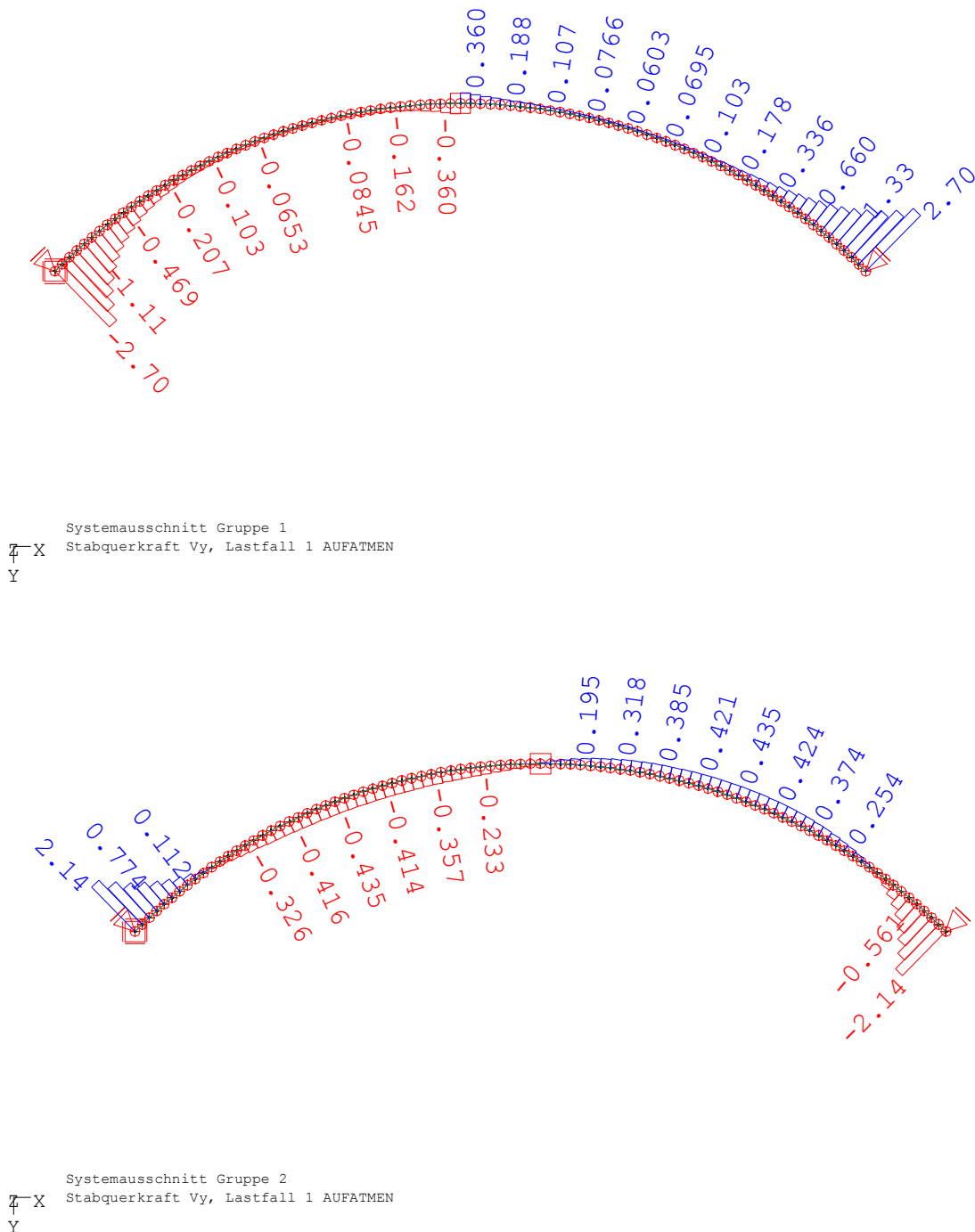
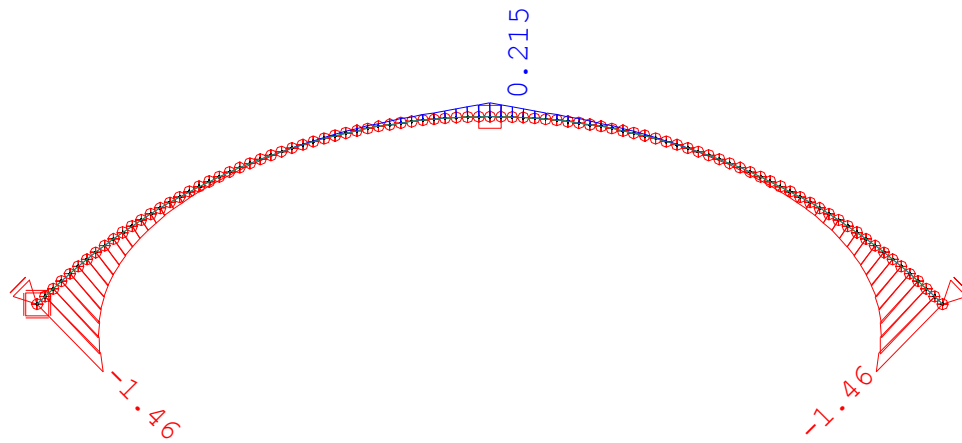
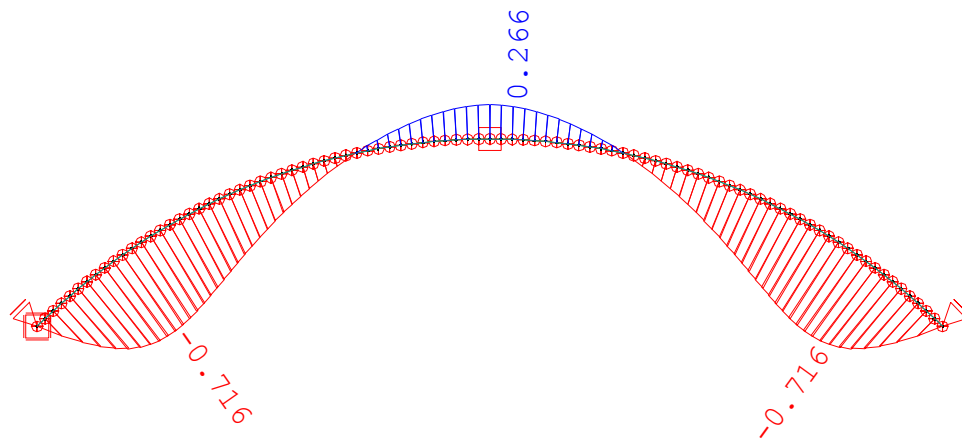


Bild 7.1-9: Programmausdruck: Querkraftverlauf [kN] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“;
Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B

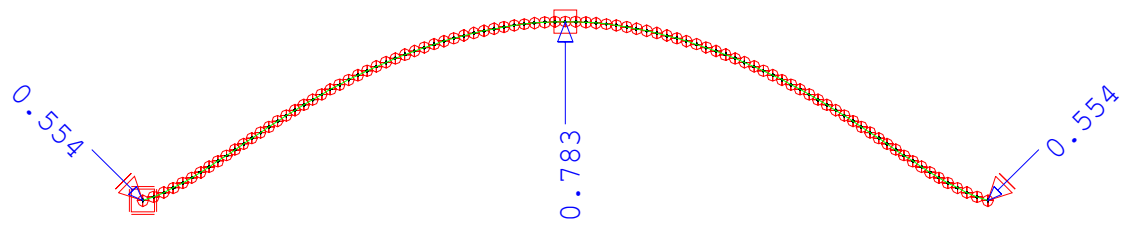


Systemausschnitt Gruppe 1
 Stabbiegemoment M_z , Lastfall 1 AUFATMEN

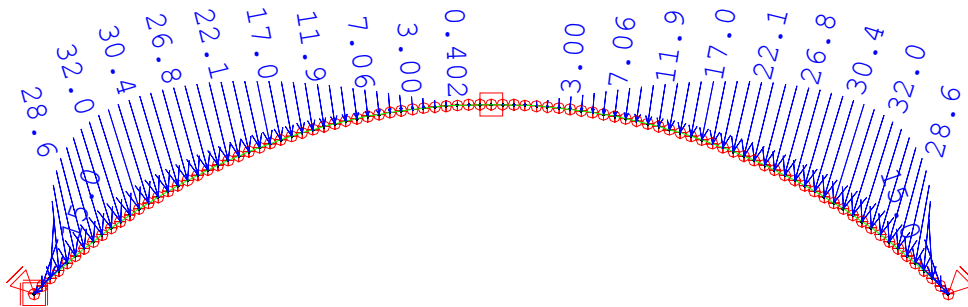


Systemausschnitt Gruppe 2
 Stabbiegemoment M_z , Lastfall 1 AUFATMEN

Bild 7.1-10: Programmausdruck: Biegemomentverlauf [kNm] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“;
 Gruppe 1 $\equiv$ Ebene A, Gruppe 2 $\equiv$ Ebene B



Systemausschnitt Gruppe 2
 Verschobene Struktur aus LF 1 AUFATMEN in 6.00-facher Überhöhung
 Auflagerkraftvektor, Lastfall 1 AUFATMEN



Systemausschnitt Gruppe 2
 Knotenverschiebungsvektor

Bild 7.1-11: Programmausdruck: Verformungsfigur [mm] und Knotenverschiebungen des verschraubten Bogens, Lastfall „Aufatmen“; Darstellung der Gruppe 2 $\equiv$ Ebene B.

Spannungszustand an den Bogenenden:

Die Normalspannung an den Endauflagern entspricht der, die bereits für den frei verformbaren Bogen ermittelt wurde. Die von den Messdosen erzeugte Zwängung hat allerdings einen Einfluss auf die Entwicklung der Normalspannungsverteilung über die Bogenlänge. Dies lässt sich gut am Verlauf der Biegemomente des ideellen Systems ablesen. Der Verlauf der Schubspannung ermittelt sich analog zum vorangegangenen Abschnitt. Der Verlauf an der oberen Querschnittshälfte ist in Bild 7.1-12 dargestellt.

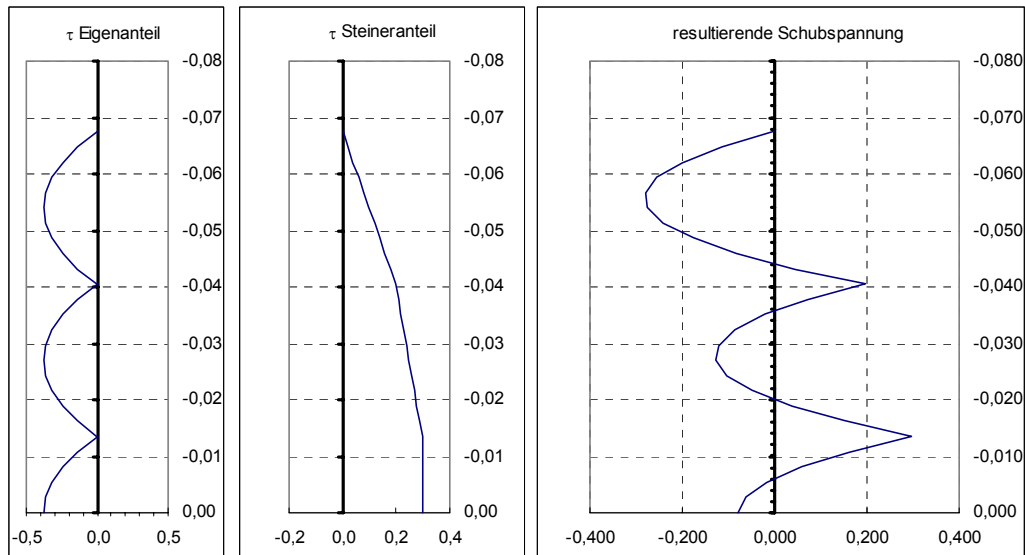


Bild 7.1-12: Schubspannungsverlauf [MPa] am Trägerende für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

Spannungszustand in Trägermitte („linke“ Seite):

In Trägermitte greift von unten die Lagerkraft der mittigen Halterung an. Aufgrund der Symmetrie des Systems verschieben sich die einzelnen Bretter an dieser Stelle nicht gegeneinander. In den Verbindungsmitteln kann keine Kraft geweckt werden. Das spiegelt sich in der Tatsache wieder, dass die Querkraft der Ebene B ($Q^B=0$) dort gleich Null ist. Die gesamte Querkraft wird hier sozusagen von den Einzelbrettern so abgetragen, als ob kein Verbund bestünde. Dementsprechend ergibt sich der in Bild 7.1-13 für die obere Querschnittshälfte gezeichnete Schubspannungsverlauf.

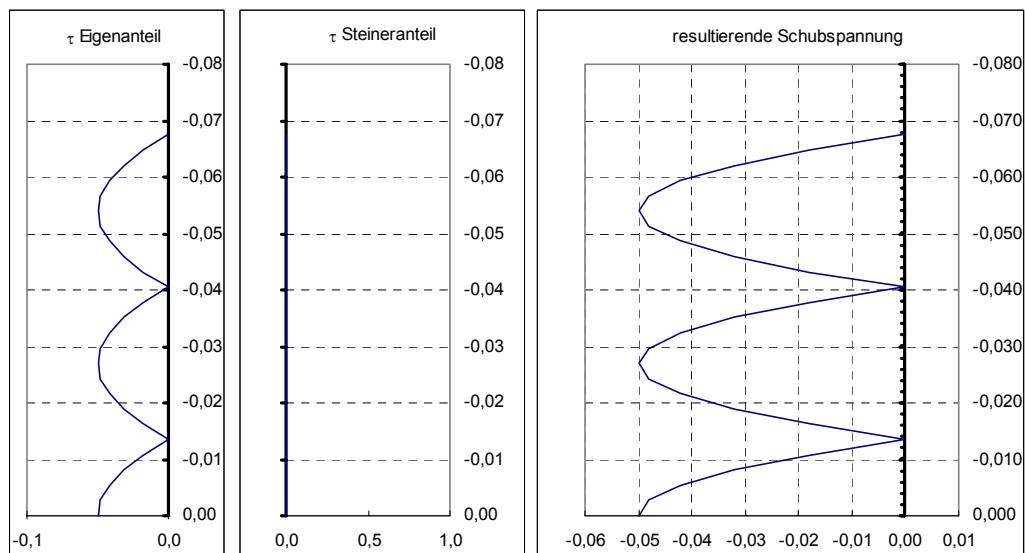


Bild 7.1-13: Schubspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

Der Verlauf der Normalspannungen infolge der Rückstellkräfte (ohne Überlagerung) ist in Bild 7.1-14 wiedergegeben (Vorzeichen bereits berichtigt). In Bild 7.1-15 ist die Summe nach der Überlagerung mit den Spannungen infolge „Vorbiegung der Bretter“ gezeigt. Die Überlagerung kann auch durch die Addition des für die Vorbiegung notwendigen konstanten Brettbiegemoments M_{y0} zum Eigenanteil des Biegemoments (M^A) erfolgen.

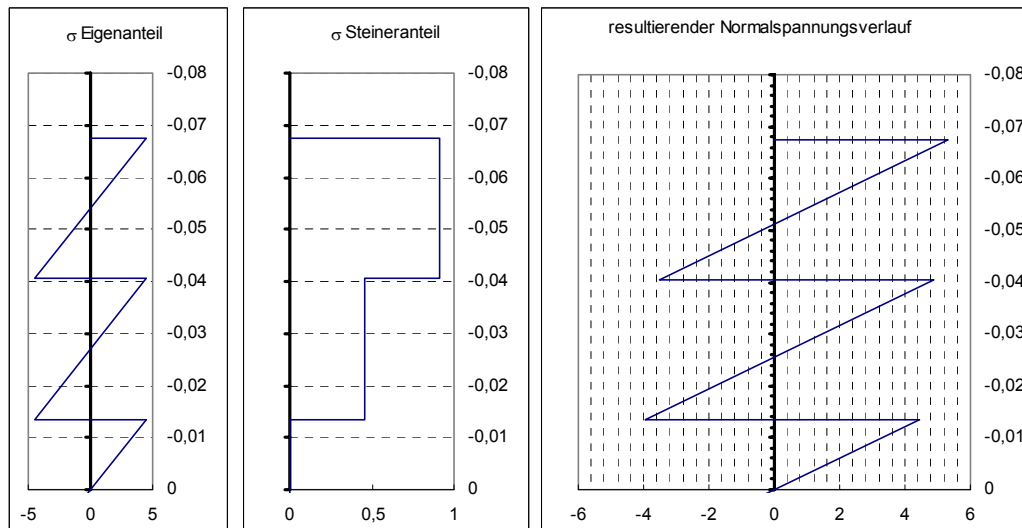


Bild 7.1-14: Normalspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

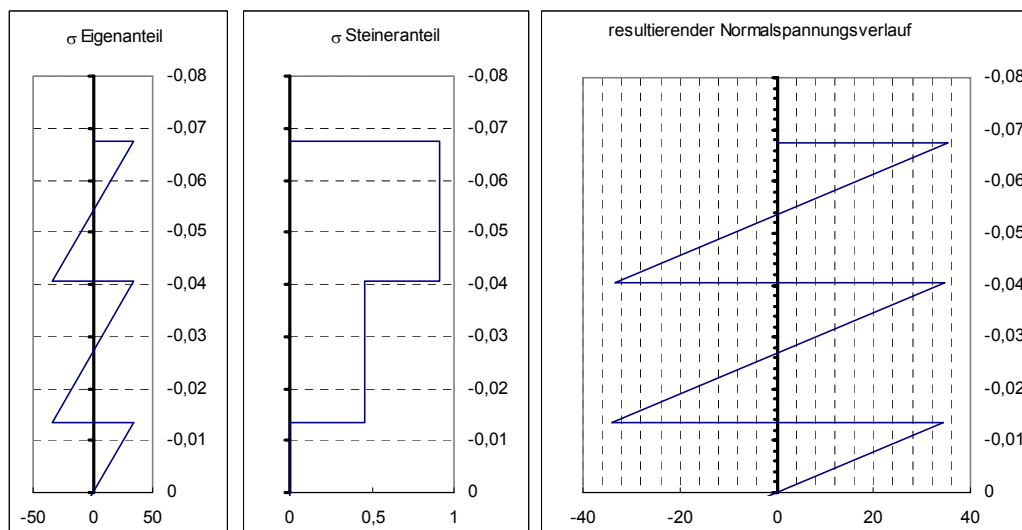


Bild 7.1-15: Normalspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“+ „Biegen der Bretter“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte

Ergänzende Anmerkung: Analog zu den Spannungsverhältnissen gekrümmter Brettschichtholzträger entsteht auch am Verbundquerschnitt des gekrümmten Brettstapelbogens im Bereich positiver Biegemomente Querzug infolge von Umlenkkräften (vgl., z.B. [23]). Dieser Effekt wurde bei den vorgeführten Berechnungen vernachlässigt. Die Umlenkkräfte sind im Falle des Brettstapelbogens von den Verbindungsmitteln aufzunehmen.

7.2 Beispielrechnung geschichtete zylinderförmige Holzschale

7.2.1 Vorbemerkung und allgemeine Angaben zum System

Ende der 70er bzw. Anfang der 80er Jahre wurden an der Universität von Canterbury in Neuseeland Versuche an zylinderförmigen Modellschalen aus Holz mit einem dreilagig geschichteten Querschnittsaufbau durchgeführt. Dabei wurden zwei Varianten untersucht. Einmal wurde der Verbund der einzelnen Lagen durch Verklebung („geklebte Holzschale“) und einmal durch Vernagelung („genagelte Holzschale“) hergestellt. Die Konstruktion wird im folgenden Abschnitt (7.2.2) näher beschrieben und ist mit Bild 7.2-1 in der Ansicht bzw. mit Bild 7.2-2 im Schnitt gezeigt. Den experimentell bestimmten Ergebnissen sind in [62] und [63] Werte aus numerischen Berechnungen gegenüber gestellt. Diese erfolgten mit Finite-Element-Berechnungen unter Einsatz von Schalenelementen, denen entsprechend der versuchstechnisch bestimmten Steifigkeiten eine ideelle Dicke t^* zuwiesen waren. In seiner Dissertation [76] führt Schickhofer Berechnungen für die „geklebte Holzschale“ mit dem Rechenprogramm „ABAQUS“ unter Einsatz des so genannten „composite-shell-elements“ durch. Dies ist ein spezielles mehrschichtiges finites Element, das laut Schickhofer für die Berechnung geklebter, schichtweise aufgebauter Holzelemente geeignet ist. Diese Berechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den in [62] angegebenen Ergebnissen.

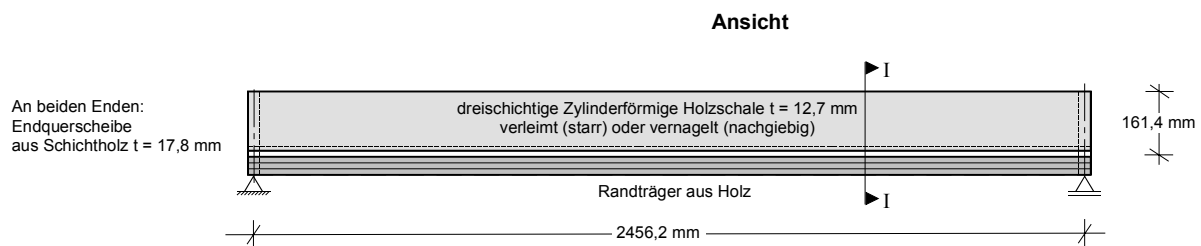


Bild 7.2-1: Zylinderförmige Holzschale in der Ansicht nach [76]

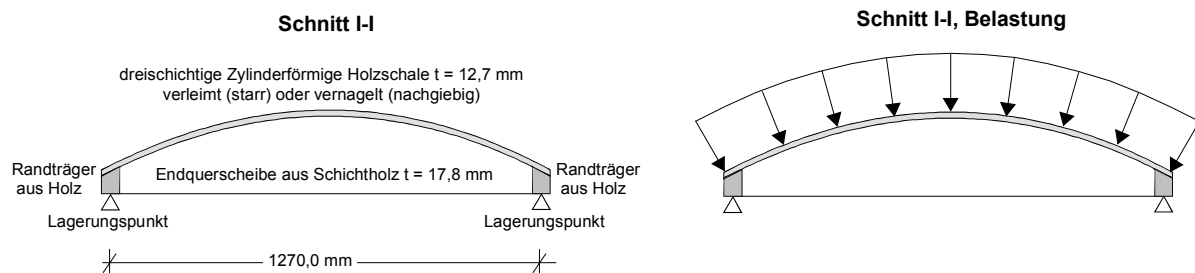


Bild 7.2-2: Zylinderförmige Holzschale im Schnitt nach [76]; rechts: Belastung.

Die Belastung in Versuch und Rechnung erfolgt durch eine gleichmäßig verteilte, rechtwinklig zur Schalenoberfläche angreifende Flächenlast (Bild 7.2-2, rechts). Unter dieser Last trägt das vorliegende System zu einem bedeutenden Anteil über Scheibentragwirkung ab. Insofern ist diese System-Last-Konstellation nur bedingt geeignet, den Einfluss schubweicher Schichten bzw. einer nachgiebigen Verbindung der einzelnen Lagen auf die Biegetragwirkung zu untersuchen. Allerdings bieten die vorhandenen Ergebnisse eine gute Vergleichsbasis, mit der das Verhalten des ideellen Systems der Schubanalogie bezüglich Biegeschub in Kombination mit Effekten nach Theorie zweiter Ordnung an einer komplexen Tragstruktur bewertet werden kann.

Zunächst wird die geklebte Holzschale mit der Schubanalogie untersucht. Dabei wird vornehmlich auf die Berechnung nach Theorie zweiter Ordnung eingegangen. Im Anschluss daran wird die genagelte Variante untersucht.

7.2.2 Vergleichsrechnung „geklebte Holzschale“

7.2.2.1 Eingangsgrößen und Transformation zum ideellen System

Die Schalenfläche wird von drei Lagen orthogonal versetzt angeordneter Holzlamellen ($b \times h = 18 \times 4 \text{ mm}^2$) gebildet. An den seitlichen Rändern ist die Schale mit Randträgern Verbunden. Jeweils die äußeren Lamellenlagen sind quer zu den Randträgern orientiert, während die mittleren Lamellen des Querschnitts parallel zu den Längskanten ausgerichtet sind. An den beiden Stirnseiten wird der Abschluss der Schale jeweils durch eine Schichtholzscheibe ($t = 17,8 \text{ mm}$) gebildet (vgl.: Bild 7.2-1 und Bild 7.2-2). Eine genauere Beschreibung der Konstruktion ist mit den genannten Quellen gegeben.

Für die Berechnung mit der Schubanalogie kommt das in Kapitel 4.6.2 beschriebene Drei-Ebenen-Modell zum Einsatz. Dabei ist das ideelle System so generiert, dass die mittels Referenzbedingungen über die Verschiebung gekoppelten Ebenen nebeneinander zu liegen kommen, wie in Bild 7.2-3 gezeigt ist (die Kopplungen sind nicht dargestellt).

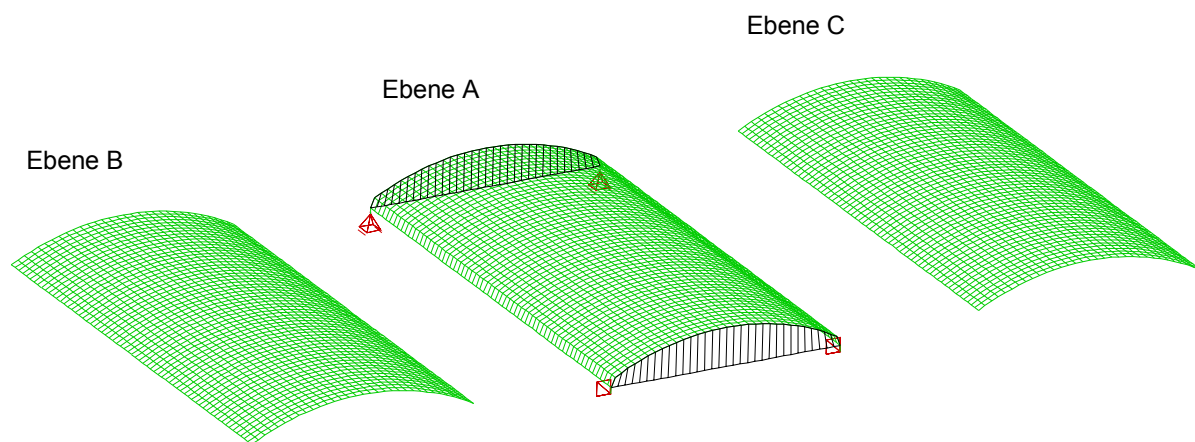


Bild 7.2-3: Ideelles System der Zylinderschale im Drei-Ebenen-Modell. Struktur in der Perspektive, Kopplungen nicht dargestellt.

In Übereinstimmung mit [76] und [62] werden folgende Materialkenngrößen für das Holz der Lamellen zur Bestimmung der ideellen Steifigkeiten angesetzt:

$E_0 = 8000 \text{ MPa}$	(E-Modul in Faserrichtung)
$E_{90} = 300 \text{ MPa}$	(E-Modul in Faserrichtung)
$G = 481 \text{ MPa}$	(Schubmodul)
$G_R = 40 \text{ MPa}$	(Rollschubmodul, vgl. Kapitel 6.2)

Bei einer näherungsweisen Bestimmung der Ersatzschubsteifigkeit S , in die die Verformungsanteile aller Schichten einfließen, gilt (4-6). Bezogen auf einen Meter Elementbreite bestimmt sich diese Kenngröße wie folgt:

$$\frac{1}{S_x} = \frac{1}{a^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{c}_{i,xz}} + \frac{d_1}{2 \cdot G_{1,xz}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_{i,xz}} + \frac{d_n}{2 \cdot G_{n,xz}} \right];$$

$$\frac{1}{S_L} = \frac{1}{S_Q} = \frac{1}{0,00846^2} \cdot \left[\frac{0,00423}{40} + \frac{0,00423}{481} \right] \Rightarrow S \approx 0,625 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Anmerkung: Der Fußzeiger L steht für in Richtung der Längsträger orientierte Steifigkeiten, Q für die quer dazu orientierten Kennwerte.

Auf einen Meter Schalenbreite bezogen lauten die ideellen Biege-, Torsions- und Dehnsteifigkeiten der Schale:

$$B_L^A = \sum_{i=1}^n (E_{L,i} \cdot I_{L,i}^A) = \frac{0,00423^3}{12} \cdot (2 \cdot 300 + 8000) = 5,42 \cdot 10^{-5} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}};$$

$$B_L^B = \sum_{i=1}^n (E_{L,i} \cdot d_i \cdot z_{Si}^2) = 2 \cdot 300 \cdot 0,00423^3 = 4,54 \cdot 10^{-5} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}}$$

$$D_L^C = \sum_{i=1}^n (E_{L,i} \cdot A_{L,i}) = 0,00423 \cdot (2 \cdot 300 + 8000) = 36,378 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

$$B_Q^A = \frac{0,00423^3}{12} \cdot (2 \cdot 8000 + 300) = 1,03 \cdot 10^{-4} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}};$$

$$B_Q^B = 2 \cdot 8000 \cdot 0,00423^3 = 1,21 \cdot 10^{-3} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}}$$

$$D_Q^C = 0,00423 \cdot (2 \cdot 8000 + 300) = 68,949 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

$$B_{xy}^A = \sum_{i=1}^n G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{6} = 3 \cdot 481 \cdot \frac{0,00423^3}{6} = 1,82 \cdot 10^{-5} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}}$$

$$B_{xy}^B = \sum_{i=1}^n (2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{Si}^2 \cdot d_i) = 4 \cdot 481 \cdot 0,00423^3 = 1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{MNm}^2}{\text{m}}$$

Für die Schubsteifigkeit gegenüber Scheibenbeanspruchung ermittelt sich folgender Wert:

$$D_{xy} = 0,00423 \cdot 3 \cdot 481 = 6,1 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Die für die Randträger angesetzten Steifigkeitskennwerte werden in Anlehnung an die Normen [N4] und [N2] mit folgenden „durchschnittlichen“ Werten belegt:

$$E_0 = 11000 \text{ MPa}$$

$$G = 400 \text{ MPa}$$

Bezüglich der Steifigkeiten der Endquerscheiben aus Schichtholz werden folgende Annahmen getroffen:

$$E_0 = E_{90} = 5000 \text{ MPa}$$

$$G = 500 \text{ MPa}$$

Bei der Berechnung wird die Schalenstruktur mit einem Trägerrost angenähert. Bei diesem ist die Längsrichtung in 64 Teilstäbe mit einer Länge von jeweils ca. 39,79 mm ($e_Q=0,03979$ m) und die Querrichtung in 32 Teilstäbe mit einer Länge von je ca. 38,37 mm ($e_L=0,03837$ m) unterteilt. Die zur Aufnahme der Normalkräfte vorgesehene Ebene C ist als Fachwerkstabnetz ausgebildet. Über Referenzbedingungen sind die Verschiebungen einander entsprechender Knoten der ideellen Ebenen in alle drei Richtungen gekoppelt. Die Stäbe der Ebene A werden biegesteif mit den Randträgern verbunden, während sich die Stäbe der Ebene B diesbezüglich frei verdrehen können. Dies entspricht dem in Wirklichkeit gegebenen Anschluss, da die Schale lediglich an der Unterseite

mit den Randträgern verklebt ist. Somit werden zwar Verdrehungen zwischen Randträger und Schale übertragen ($\leftrightarrow M^A$), die gegenseitige Verschiebung der Deckschichten ($\leftrightarrow M^B$) ist jedoch im Rahmen der Schubsteifigkeiten des Verbundquerschnitts möglich. Die Ausmitte des Anschlusses wird durch quasi starre Zwischenstäbe erfasst. Mittels Scheibenelementen („QUAD“-Elemente) sind die Endquerscheiben abgebildet. Bild 7.2-4 zeigt die Struktur in der Perspektive, wobei das Detail für den Anschluss des Randträgers gesondert (im Schnitt) abgebildet ist. Im Sinne der Übersichtlichkeit ist die Abbildung auf die Ebene A beschränkt.

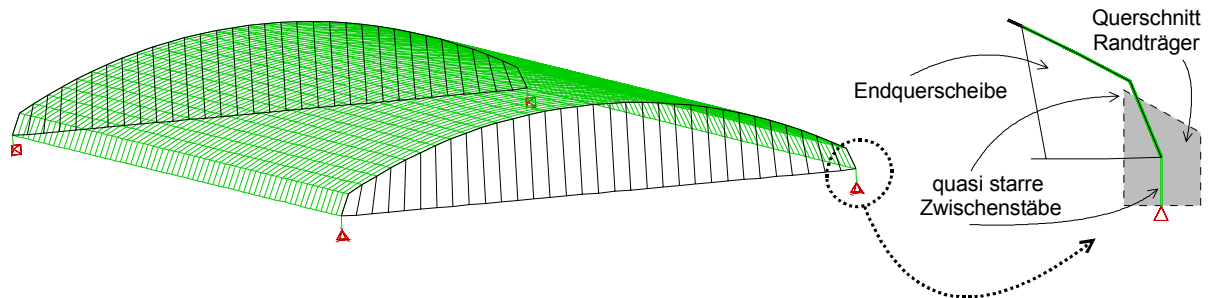


Bild 7.2-4: Trägerrostsystem der Schale, Abbildung der Ebene A in der Perspektive. Rechts: ergänzter Programmausdruck; Detail Anschluss der Schale an den Randträger im Auflagerbereich mit Andeutung des Randträgerquerschnitts (Darstellung des Details im Schnitt).

Durch Multiplikation der soeben ermittelten Schub-, Biege-, Drill- und Dehnsteifigkeiten mit dem Trägerabstand ergeben sich die den Roststäben zuzuweisenden Steifigkeiten. Der Scheibenschub wird über eine Vierendeeltragwirkung der Roststäbe von Ebene A erfasst. Dazu müssen die Stäbe dieser Ebene eine definierte Biegesteifigkeit um die rechtwinklig zur Schalenoberfläche gerichteten Achsen („schwache Achsen“) aufweisen. In [55] sind entsprechende Beziehungen, die auf Verformungsbetrachtungen beruhen, angegeben. Mit diesen werden die hier mit B_z bezeichneten Biegesteifigkeiten in Abhängigkeit von den Abständen der Roststäbe (e_Q und e_L) bestimmt.

$$B_{z,L}^{\text{Stab}} = \frac{e_Q \cdot e_L^2}{6} \cdot D_{xy} = \frac{0,03979 \cdot 0,03837^2}{6} \cdot 6,1 = 5,955 \cdot 10^{-5} \text{ MNm}^2$$

$$B_{z,Q}^{\text{Stab}} = \frac{e_Q^2 \cdot e_L}{6} \cdot D_{xy} = \frac{0,03979^2 \cdot 0,03837}{6} \cdot 6,1 = 6,172 \cdot 10^{-5} \text{ MNm}^2$$

7.2.2.2 Berechnung und Vergleich der Ergebnisse

Die Generierung der Struktur und ihre Berechnung erfolgte mit den Modulen „AQUA“, „GENF“ und „ASE“ des Softwarepaketes der Firma SOFISTIK (Eingabedatei siehe Anhang B). In Form von Knotenlasten wurde die Belastung in die Ebene C eingeleitet. Mittels einer Traglastiteration (vgl. Kapitel 4.6) wurde eine Last-Verformungskurve ermittelt (Th 2, lineares Material). In Bild 7.2-5 sind die Ergebnisse für die vertikalen Verschiebungen in Schalenmitte und in Mitte der Randträger den Vergleichswerten gegenübergestellt. Auch die angeführten Vergleichsergebnisse basieren auf einer geometrisch nichtlinearen Rechnung bei linearem Materialverhalten. Um den Einfluss der Torsionssteifigkeit zu verdeutlichen, wurde ein gesonderter Rechenlauf, bei dem die Torsionssteifigkeit möglichst klein angesetzt wurde ($B_{xy} \rightarrow 0$), durchgeführt. Wie man sieht, ist der Einfluss der Torsionssteifigkeit auf das Verformungsverhalten der Schale gering. Die Ergebnisse für die vertikale Verschiebung in Schalenmitte passen gut mit den in [62] und [76] angegebenen Werten zusammen. Im Versuch trat bei einer Laststufe von $p=7,644 \text{ kN/m}^2$ das Bruchversagen der Schale ein. Dabei handelte es sich um „ein Ablösen der Schale vom Randträger und teilweise von der Endquerscheibe“ [76]. Darin ist auch das Abweichen der Messwerte von den gezeigten

Rechenergebnissen an dieser Stelle begründet. Moss und Schickhofer haben ihre Berechnungen bei dieser Laststufe beendet. Bei den hier behandelten Rechnungen mit der Schubanalogie wird die Last gesteigert, bis kein Gleichgewicht mehr gefunden wird. Dies ist bei einer Laststufe von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$ (bzw. $11,04 \text{ kN/m}^2$ für $B_{xy} \rightarrow 0$) der Fall. Zu beachten ist, dass dies der Grenzwert für das Systemversagen ist. Aspekte bezüglich des Materialversagens haben bei diesen Untersuchungen keinen Einfluss.

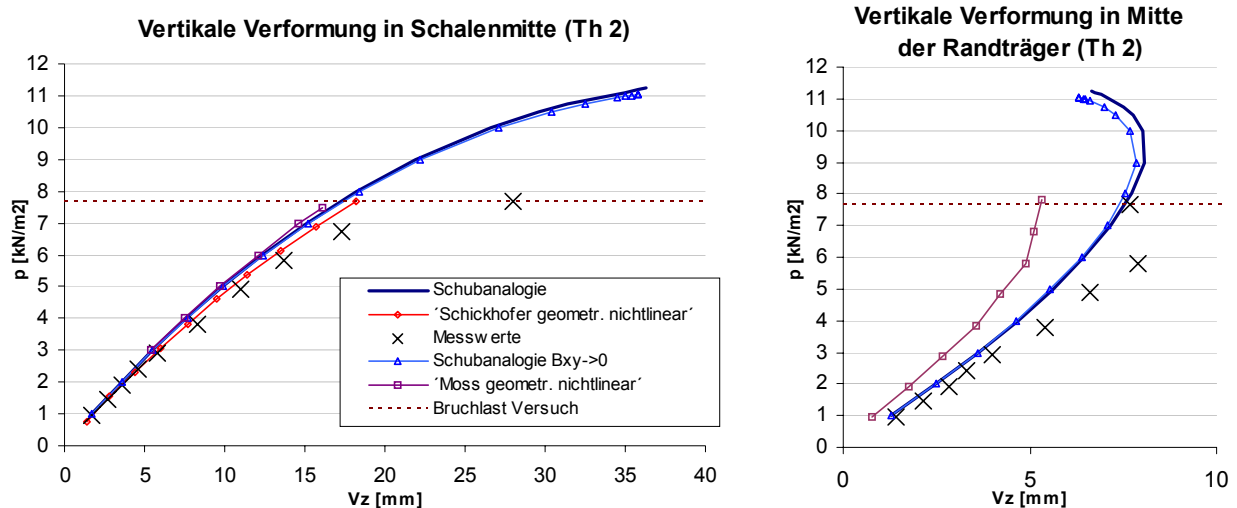


Bild 7.2-5: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der geklebten Schale und in Mitte der Randträger (Messwerte Randträger: „west edge beam“). Vergleichswerte aus [76] bzw. [62]

Anmerkung: In [76] werden keine Angaben über die errechnete Verschiebung in Mitte der Randträger gemacht.

Die verschobene Struktur des Rechensystems bei der kritischen Laststufe ist in Bild 7.2-7 in der Perspektive und in Bild 7.2-6 in der Ansicht bzw. im Grundriss gezeigt.

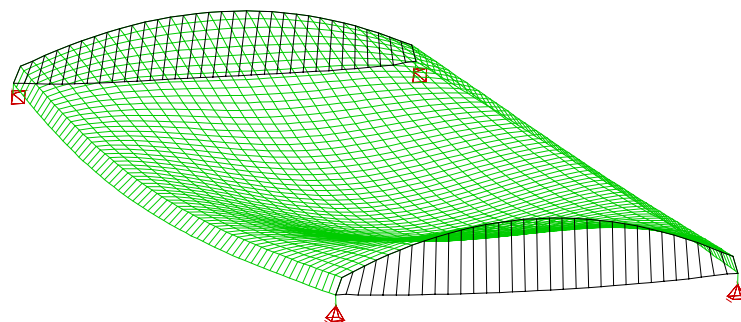


Bild 7.2-6: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der geklebten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=11,23 \text{ kN/m}^2$) in der Perspektive.

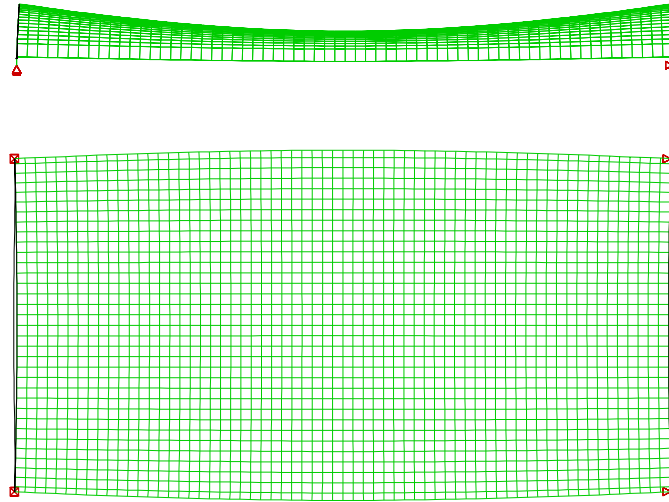


Bild 7.2-7: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der geklebten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=11,23 \text{ kN/m}^2$) in der Ansicht (oben) in im Grundriss (unten).

Nachfolgend sind die ideellen Schnittgrößen der Schale in den jeweils mittleren Schnitten angegeben. Bild 7.2-8, Bild 7.2-9 und Bild 7.2-10 zeigen die Schnittgrößen des mittleren Roststabes in Querrichtung. Bild 7.2-11 und Bild 7.2-12 die Größen des Längsstabes am Scheitel der Schale. Mittels Division der angegebenen Werte durch die Rasterbreite ($e_L \approx e_Q \approx 0,04 \text{ m}$) würde man Schnittgrößen, die auf einen Meter Breite bezogen sind, erhalten.

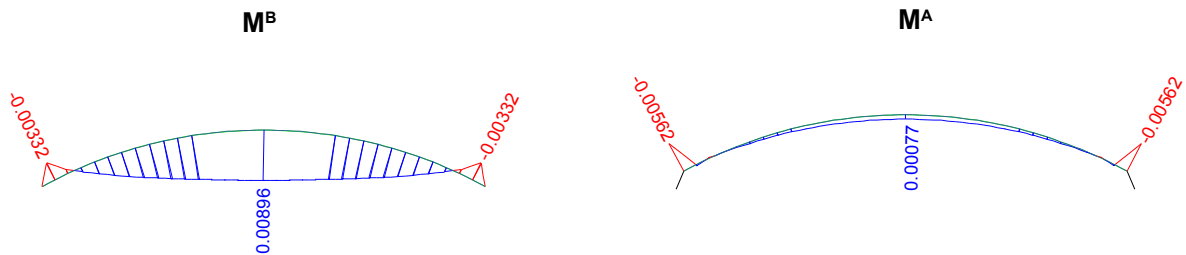


Bild 7.2-8: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.

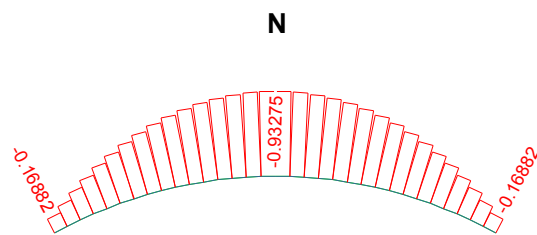


Bild 7.2-9: Querschnitt in Schalenmitte, Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.

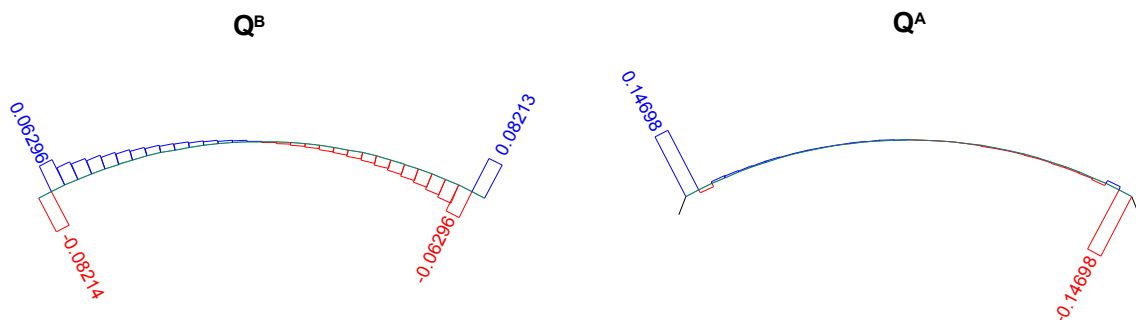


Bild 7.2-10: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.

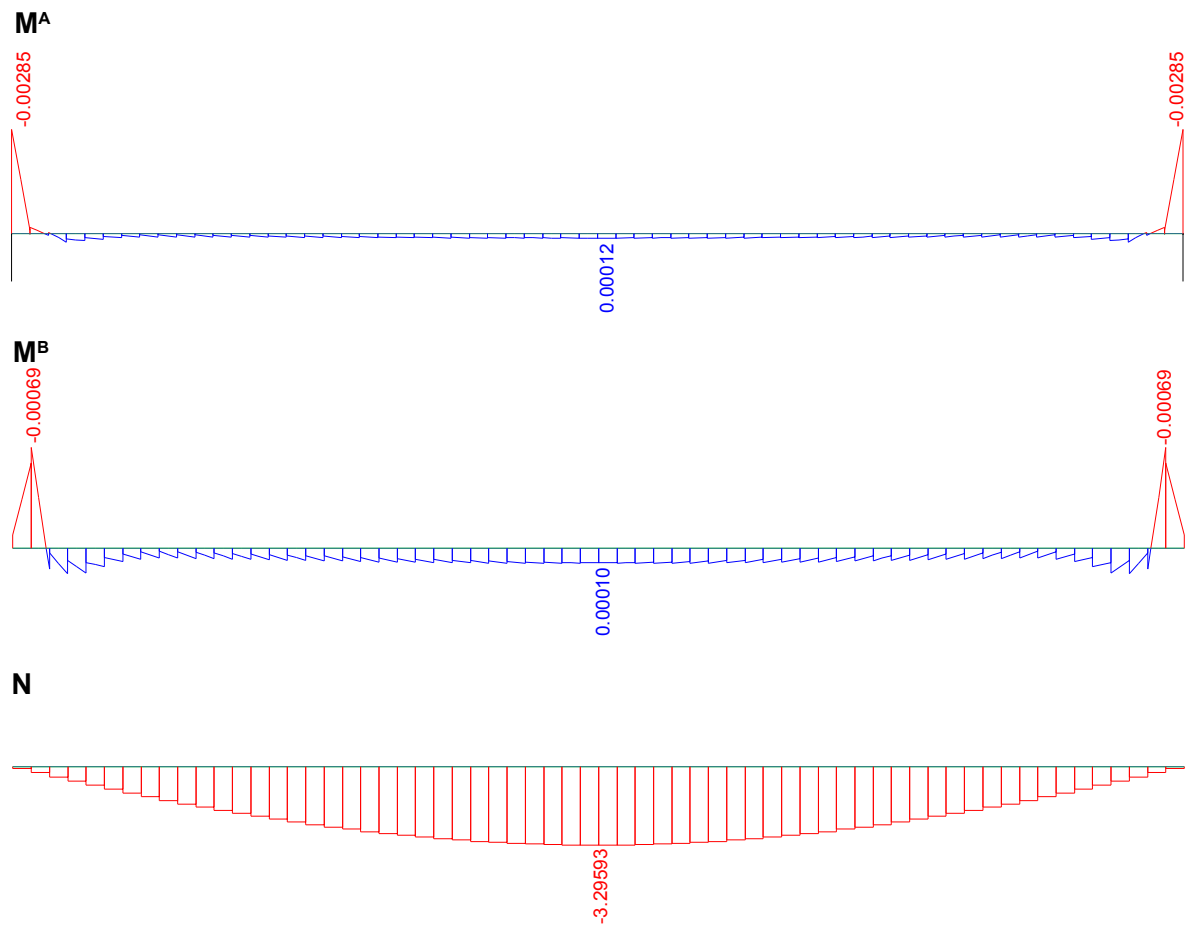


Bild 7.2-11: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] und Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.

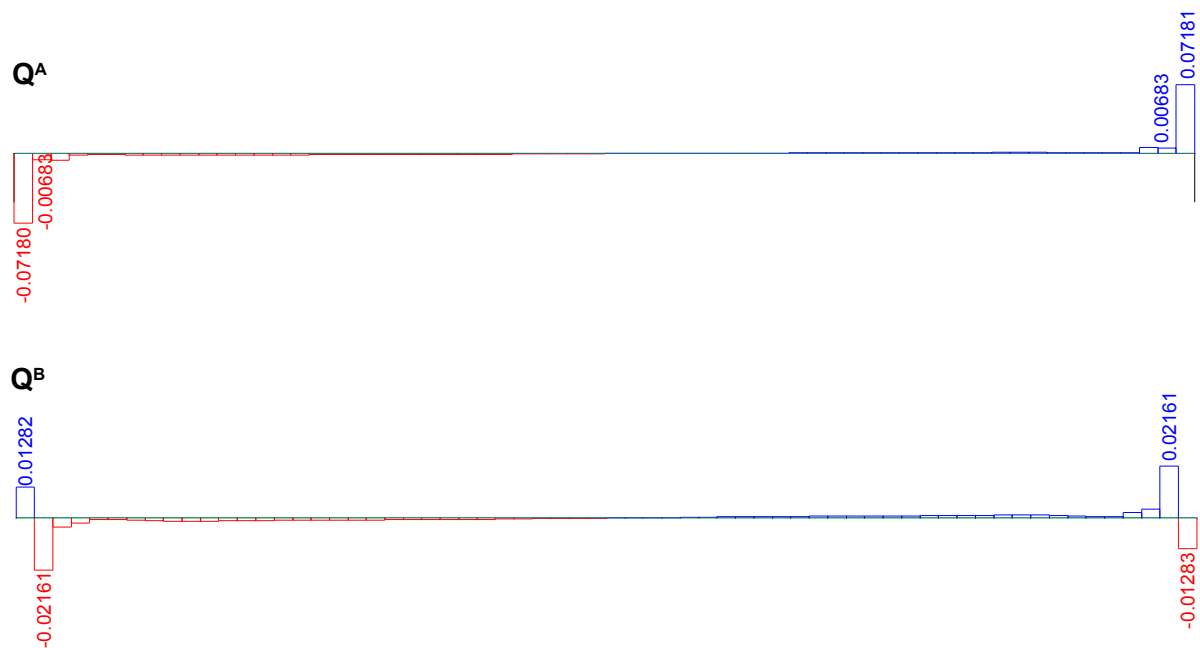


Bild 7.2-12: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.

Aus den ideellen Schnittgrößen können im Nachlauf die Spannungsverläufe bestimmt werden. Es sind die Zustände unter der Last $p=11,23 \text{ kN/m}^2$ an ausgewählten Bereichen mit Hilfe der Tabellenkalkulation ermittelt und in Bild 7.2-13, Bild 7.2-14, Bild 7.2-15 und Bild 7.2-16 gezeigt.

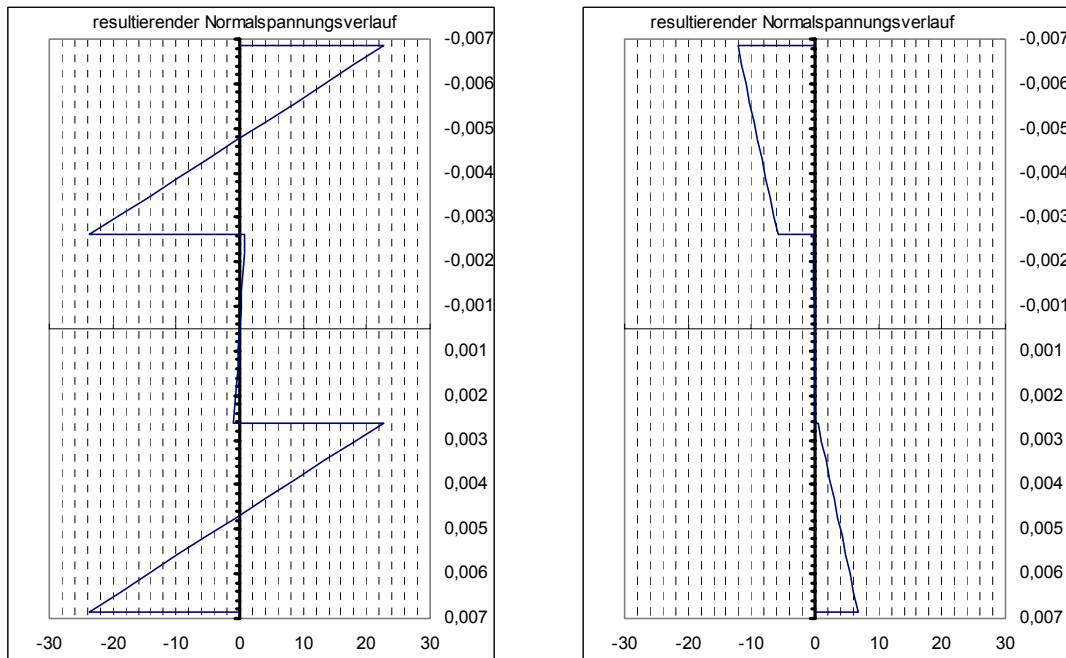


Bild 7.2-13: Normalspannungen [MPa] in Querrichtung (mittlerer Schnitt) . Links: Am Rand; rechts: in der Mitte.

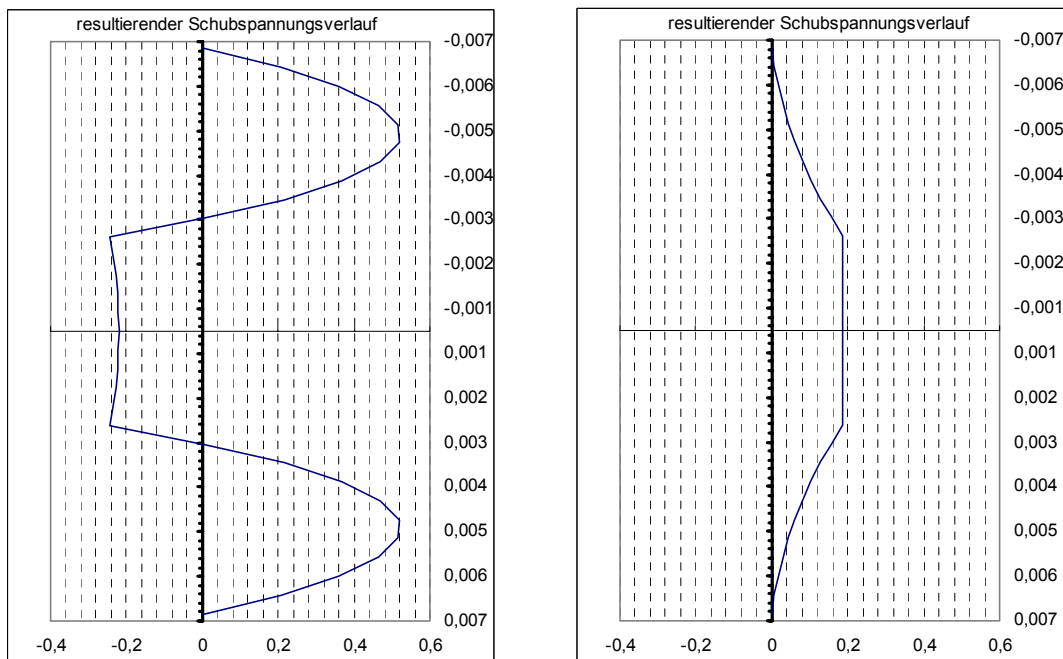


Bild 7.2-14: Schubspannungen [MPa] am Längsschnitt. Links: Schnitt 2 cm vor dem Randträger; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor dem Randträger.

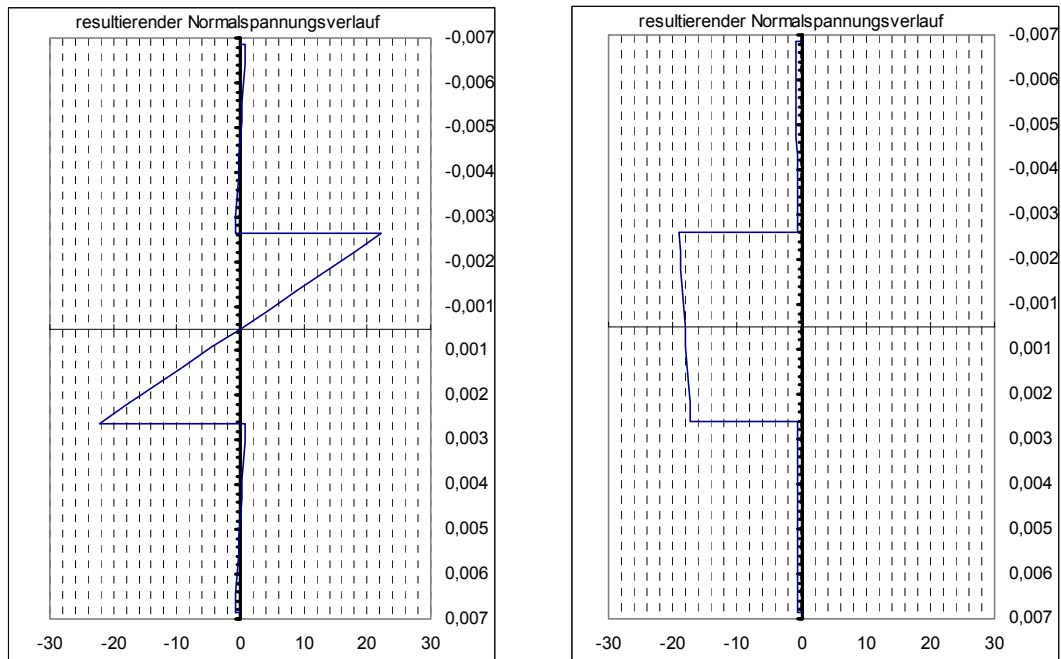


Bild 7.2-15: Normalspannungen [MPa] in Längsrichtung. Links: im Bereich der Querscheibe; rechts: in Schalenmitte.

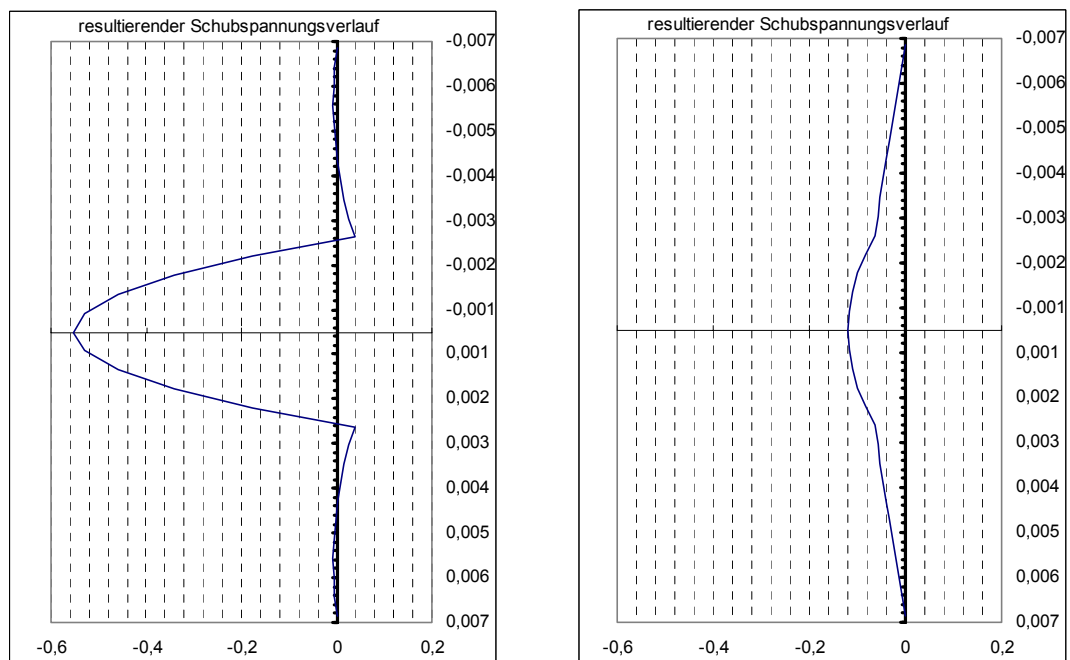


Bild 7.2-16: Schubspannungen [MPa] am Schnitt quer zur Längsrichtung. Links: Schnitt 2 cm vor der der Endquerscheibe; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor der Endquerscheibe.

Der Schubfluss infolge Scheibentragwirkung (t_{xy}) kann bestimmt werden, indem die in Schalenebene wirkenden Querkräfte durch den Trägerabstand dividiert werden (Vierendeeltragwirkung). In Bild 7.2-17 sind stellvertretend die Querkräfte der in Querrichtung orientierten Roststäbe in Schalenebene gezeigt. Gut zu erkennen ist die Zunahme dieser Beanspruchung zu den Eckbereichen hin und der Schubspannungsfreie Bereich im Schalenzentrum. Die maximale Scheibenschubspannung ermittelt sich damit wie folgt:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{Q_x^{\max}}{e \cdot t} \approx \frac{1,75 \cdot 10^{-3}}{0,04 \cdot 00423 \cdot 3} = 3,45 \text{ MPa}$$

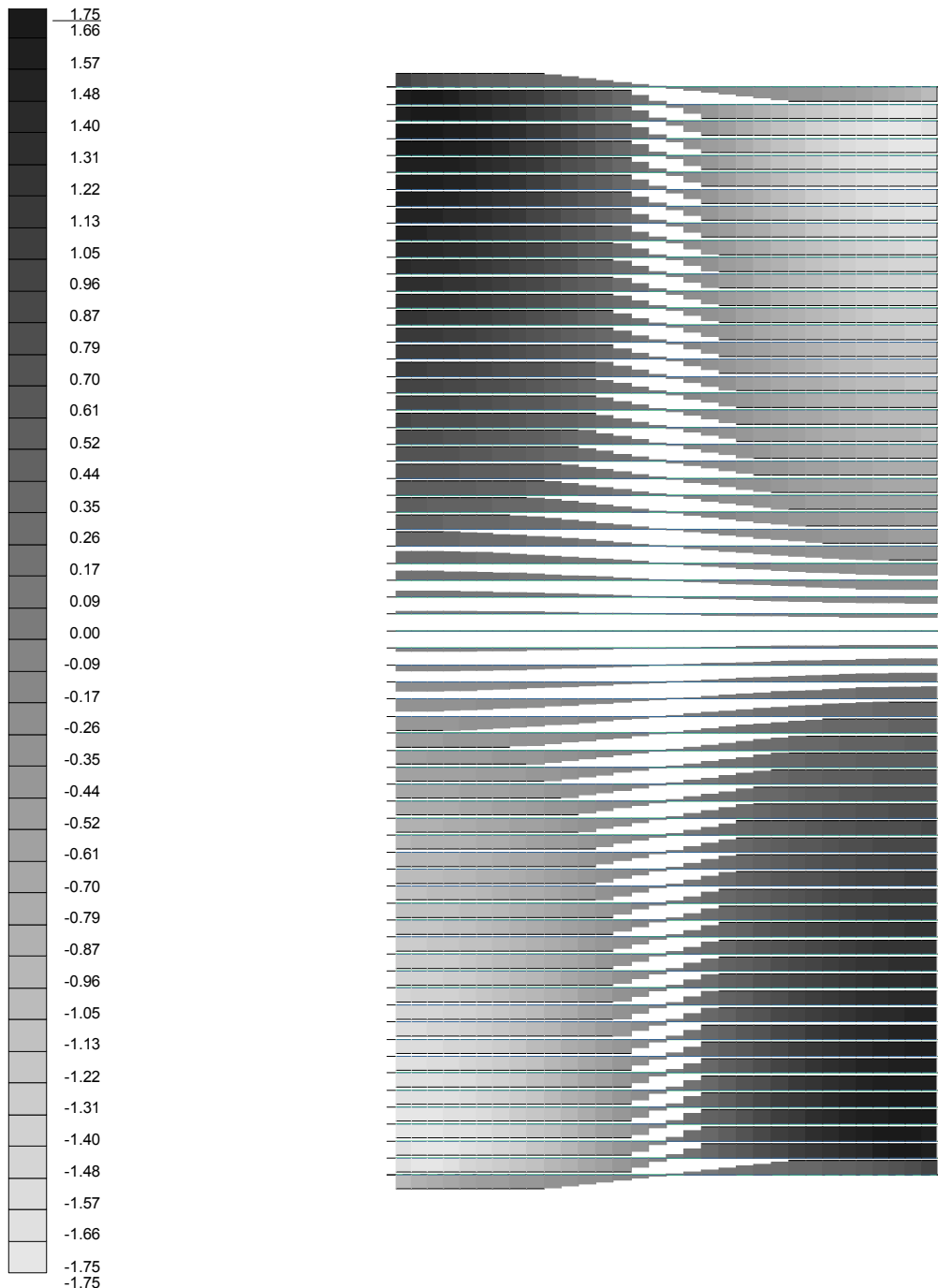


Bild 7.2-17: Querkräfte [kN] der quer orientierten Roststäbe in Schalenebene bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$. Darstellung in der Draufsicht in Form eines in Graustufen abgestuften Linienabtrags mit begrenztem Maximalabtrag.

7.2.3 Vergleichsrechnung „genagelte Holzschale“

7.2.3.1 Eingangsgrößen und Transformation zum ideellen System

Bei der genagelten Variante werden die einzelnen Lamellen mit 13 mm langen „stationer pins“ verbunden. Die in [62] angeführten Angaben bezüglich des Nagelbildes sind sehr allgemein gehalten. Es wird lediglich die Nageldichte mit 3120 Nägel/m² angegeben. Aus dieser lässt sich ableiten, dass je Kreuzungspunkt ungefähr ein Nagel eingeschlagen wurde, wie in Bild 7.2-18 dargestellt ist.

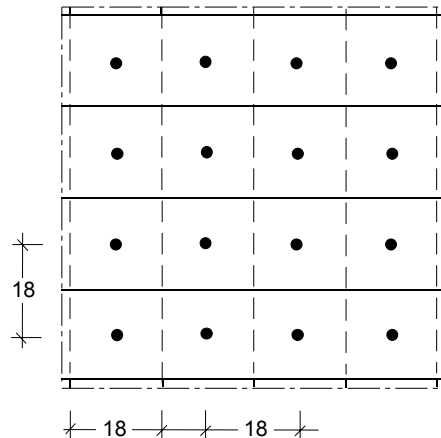


Bild 7.2-18: Angenommenes Nagelbild bezüglich der Vernagelung der einzelnen Lagen. Darstellung als Ausschnitt im Grundriss.

Diese Anordnung der Nägel ist im Hinblick auf die Schubsteifigkeit des Elements bezüglich Scheibentragswirkung vergleichsweise ungünstig. Da pro Kreuzungspunkt jeweils nur ein Nagel angebracht ist, kann sich kein Kräftepaar ausbilden, welches einer gegenseitigen Verdrehung der Lamellen in den Kreuzungspunkten - wie sie bei einer Scheibenschubbeanspruchung auftritt - entgegensteht. Erst durch die Tragwirkung des Gesamtelements bzw. durch die Kinematik wird die Schubsteifigkeit herbeigeführt. Hierbei kommen Effekte wie zum Beispiel die Reibung an den Schmalseiten der Lamellen und das vom Gleitwinkel abhängige gegenseitige „Verkeilen“ der Lamellen zum Tragen. Die Ableitung einer entsprechenden Schubsteifigkeit auf Grundlage der mechanischen Zusammenhänge erscheint für dieses komplexe Tragverhalten nicht sinnvoll. In [62] sind anhand von gesonderten Versuchen nichtlineare Beziehungen für die Schubsteifigkeit des Schalelements gegenüber Scheibenschub abgeleitet. Für die Berechnung mit der Schubanalogie wird ein lineares Materialverhalten zugrunde gelegt, wobei in Anlehnung an die genannten Untersuchungen folgender Wert angesetzt wird:

$$D_{xy} = 0,33 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Bezogen auf die verwendeten Nägel wird davon ausgegangen, dass diese in etwa den in der Norm für Drahtstifte [N1] (Fassung zur Zeit der Versuche) geregelten Flachkopfnägeln der Größe 9x13 entsprechen. Passend zum angesetzten Elastizitätsmodul (vgl. 7.2.2) wird für das Holz eine Rohdichte von $\rho = 310 \text{ kg/m}^3$ zugrunde gelegt. Mit dieser ermittelt sich der charakteristische Verschiebungsmodul pro Nagel und Scherfuge nach [N4] wie folgt:

$$k_{\text{ser}} = \frac{\rho_k^{1,5}}{25} \cdot d = \frac{310^{1,5}}{25} \cdot 0,9 = 196,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \approx 200 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \equiv 0,2 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Da Vergleiche mit den Versuchsergebnissen beabsichtigt sind, wird hier auf die nach [N4] für Tragfähigkeitsnachweise notwendigen Abminderungen dieses Steifigkeitswertes verzichtet. Für die

auf die Fläche bezogene Fugensteifigkeit $\bar{c}$ gilt mit der gegebenen Nageldichte (3120 Nägel/m², vgl.: [62]):

$$\bar{c} = \frac{\sum k_{ser}}{A} = \frac{0,200 \cdot 3120}{1} = 624 \frac{\text{MN}}{\text{m}^3}$$

Mit diesem Wert wird die Ersatzschubsteifigkeit (bezüglich Biegeschub) S bestimmt:

$$\frac{1}{S_L} = \frac{1}{S_Q} = \frac{1}{0,00846^2} \cdot \left[\frac{0,00423}{40} + \frac{0,00423}{481} + \frac{2}{624} \right] \Rightarrow S \approx 0,022 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

Die ideellen Biege- und Torsionssteifigkeiten entsprechen denen der geklebten Schale.

7.2.3.2 Berechnung und Vergleich der Ergebnisse

Die Berechnung der genagelten Variante erfolgt mit dem, bereits von der Vergleichsrechnung der geklebten Schale bekannten, ideellen System, wobei die Steifigkeiten gemäß den Erläuterungen des vorangegangenen Abschnitts (7.2.3.1) angepasst sind. Es werden wieder sowohl eine Variante mit „voller“ Drillsteifigkeit als auch eine Variante, bei der die Drillsteifigkeit vernachlässigt wird ($B_{xy} \rightarrow 0$), untersucht. Die Last-Verformungs-Kurven sind in Bild 7.2-19 gezeigt. Die Traglastiteration endet bei einer Laststufe (Systemversagen) von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$ (bzw. $3,74 \text{ kN/m}^2$ für $B_{xy} \rightarrow 0$), während im Versuch das Versagen bei $p=2,39 \text{ kN/m}^2$ einsetzte. Auch im Falle der genagelten Schale ist der Einfluss der Torsionssteifigkeit gering. Zum Vergleich sind die in [62] angegebenen Messwerte eingetragen. Die Ergebnisse der Berechnungen nach [62] variieren stark in Abhängigkeit von der angesetzten Materialfunktion. Stellvertretend sind die Werte der Version, welche die Versuchsergebnisse für die Verschiebung in Schalenmitte am besten beschreibt („A=3x exp.“), in Bild 7.2-19 mit aufgenommen. In [76] wird die genagelte Variante nicht näher untersucht.

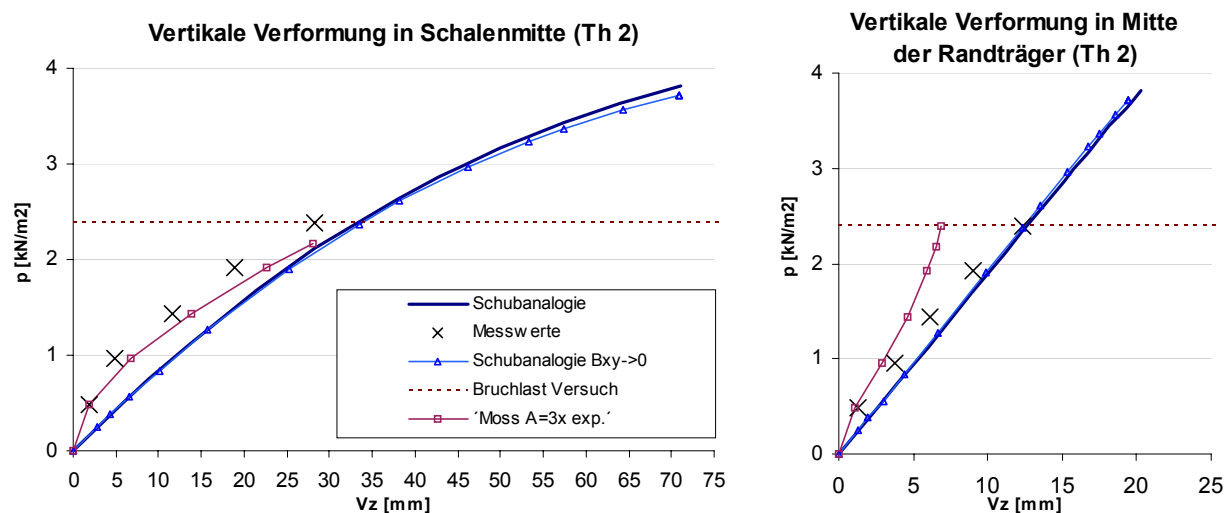


Bild 7.2-19: Vergleich der vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der genagelten Schale und in Mitte der Randträger (Messwerte nach [62], betrachteter Randträger: „west edge beam“)

Vom prinzipiellen Verlauf passt die Last-Verformungs-Kurve nach der Schubanalogie relativ gut zu den Messwerten, auch wenn die berechneten Werte ein „weicheres“ Verhalten der Tragstruktur zeigen. Die Rechenergebnisse nach [62] weisen bezogen auf die Schalenmitte ebenfalls eine gute Übereinstimmung auf, bezogen auf die Durchsenkung in Mitte der Randträger weichen sie etwas ab. Auffallend ist diese Differenz vor allem, wenn der Verhältniswert aus den Ergebnissen in Schalenmitte zu den Ergebnissen in Mitte der Randträger betrachtet wird. Anhand von Bild 7.2-20

wird diese Tatsache verdeutlicht. Während die Verhältniswerte nach der Schubanalogie zumindest tendenziell zum Verhältnis der Messwerte passen, zeigt die entsprechende Relation für die Ergebnisse nach [62] einen deutlich flacheren Verlauf. Es ist anzunehmen, dass die Art der Erfassung des nachgiebigen Verbundes der einzelnen Lagen eine bedeutende Ursache für diese Diskrepanz ist.

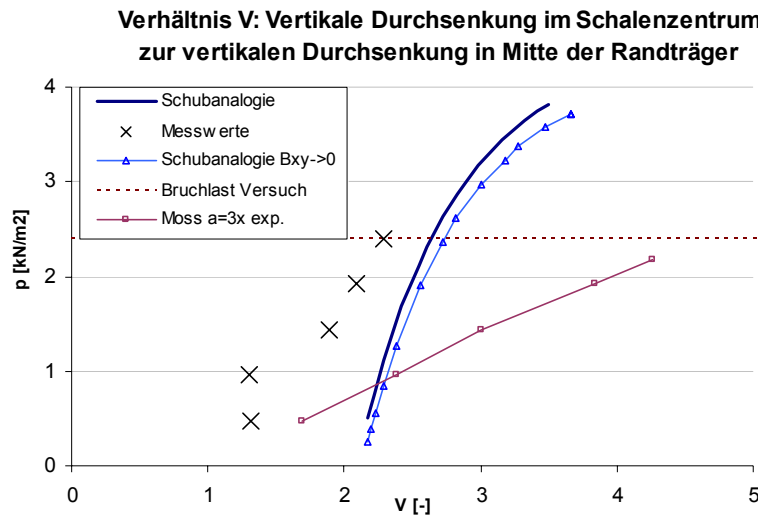


Bild 7.2-20: Vergleich der Verhältniswerte V für die Durchsenkung im Schalenzentrum zur Durchsenkung in Mitte der Randträger.

Bild 7.2-21 und Bild 7.2-22 zeigen die verschobene Struktur bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

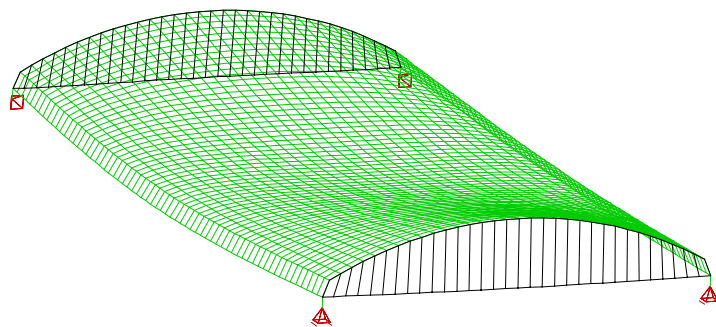


Bild 7.2-21: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der genagelten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=3,81 \text{ kN/m}^2$) in der Perspektive.

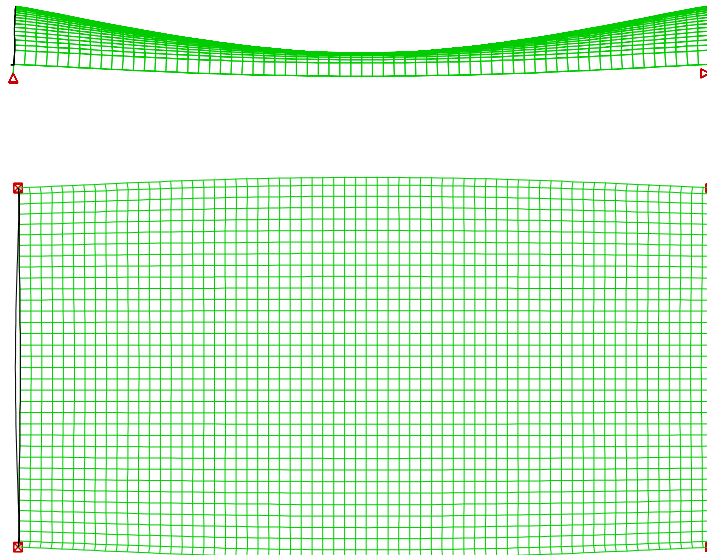


Bild 7.2-22: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der genagelten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=3,81 \text{ kN/m}^2$) in der Ansicht (oben) in im Grundriss (unten).

In Bild 7.2-23 bis Bild 7.2-27 sind die ideellen Schnittgrößen der Schale auf die bereits aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannte Weise in den jeweils mittleren Schnitten angegeben.

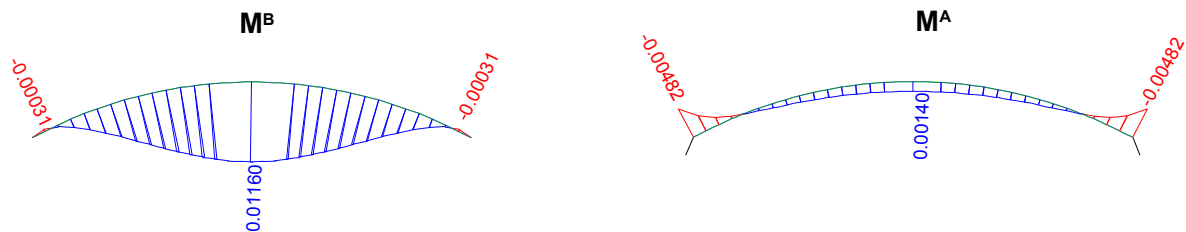


Bild 7.2-23: Querschnitt in Schalenmitte, ideelle Biegemomente $[\text{kNm/Roststab}]$ bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

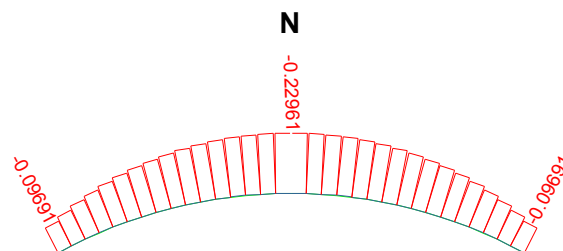


Bild 7.2-24: Querschnitt in Schalenmitte, Normalkraft $[\text{kN/Roststab}]$ bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

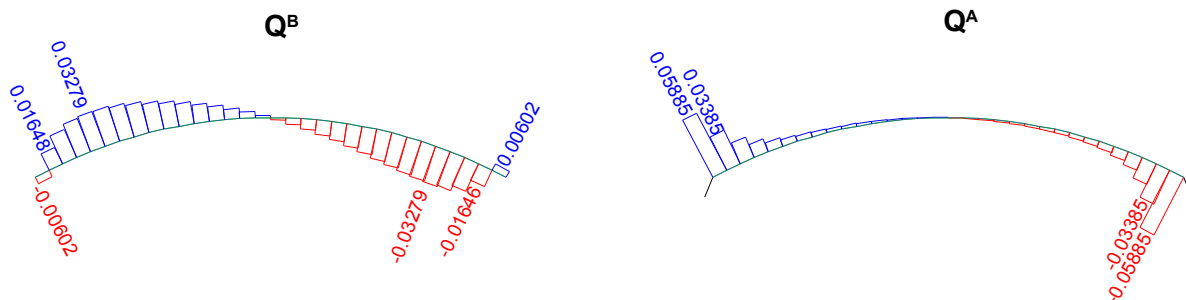


Bild 7.2-25: Querschnitt in Schalenmitte, ideelle Querkräfte $[\text{kN/Roststab}]$ bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

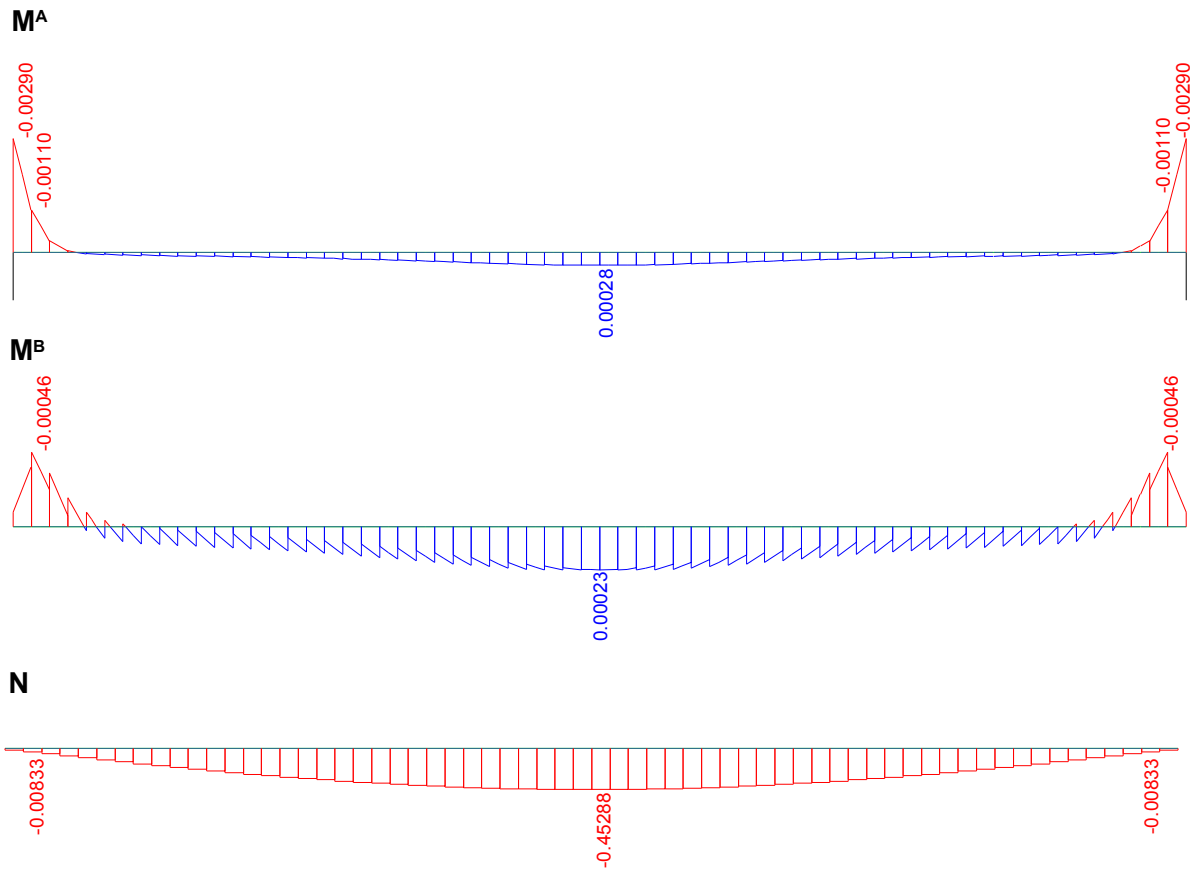


Bild 7.2-26: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] und Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

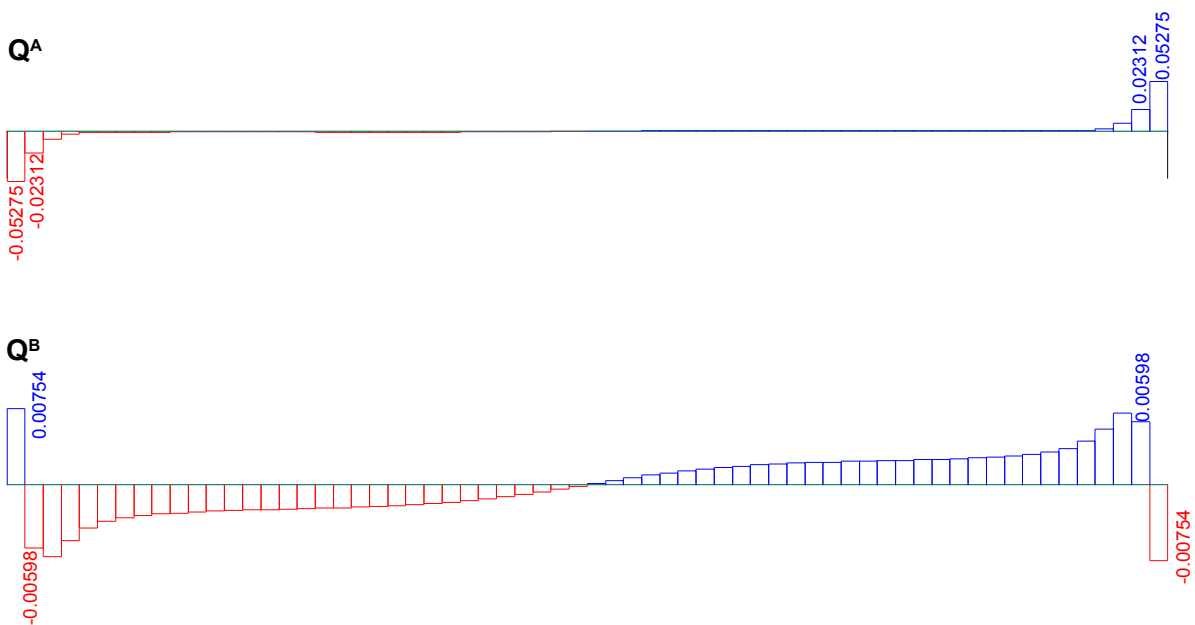


Bild 7.2-27: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.

Die aus diesen Schnittgrößenverläufen für ausgewählte Bereiche bestimmten Spannungszustände sind in Bild 7.2-28 bis Bild 7.2-31 gezeigt.

Anmerkung: Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass bei der Traglastuntersuchung das Materialversagen außer Acht gelassen wurde und somit auch Spannungswerte angegeben sein können, die die Festigkeit des Materials überschreiten.

Nachfolgend sind die Spannungsverläufe der genagelten Variante an den bereits für die geklebte Schale ausgewählten Schnitten gezeigt (Bild 7.2-28, Bild 7.2-29, Bild 7.2-30, Bild 7.2-31). Wenn man die Spannungszustände der genagelten Schale mit denen der geklebten Schale vergleicht, wird der Einfluss der durch die Nachgiebigkeit der Nägel zusätzlich entstandenen schubnachgiebigen Fugen deutlich. Vor allem die Schubspannungsverläufe deuten mit dem im Verhältnis geringeren Fugenschub auf die reduzierte Übertragung des Querkraftschubes zwischen den einzelnen Teilquerschnitten hin.

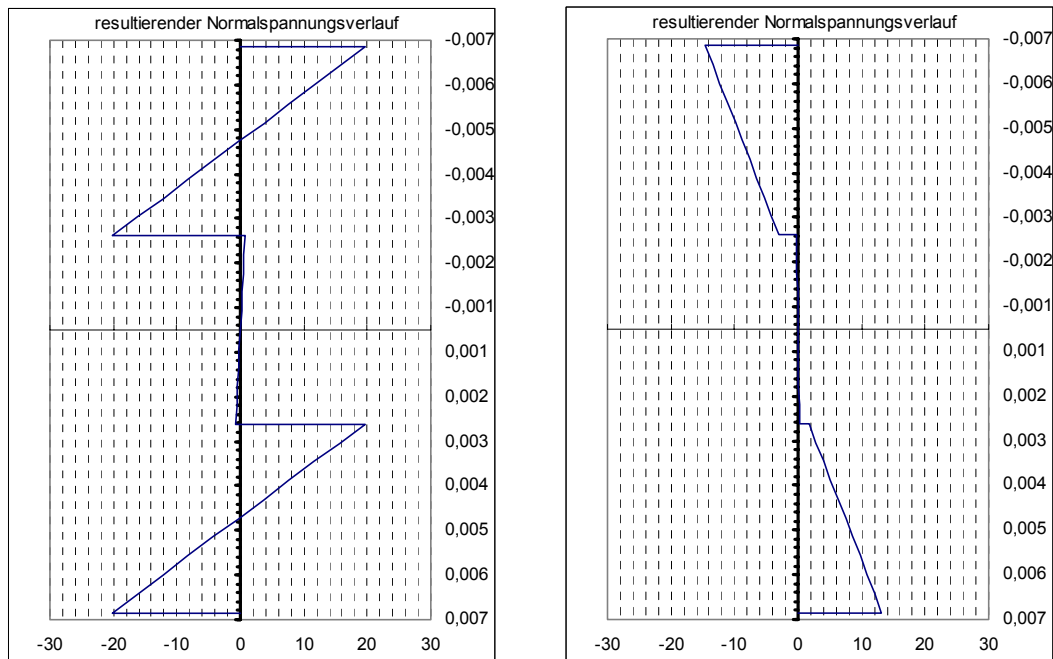


Bild 7.2-28: Normalspannungen [MPa] in Querrichtung (mittlerer Schnitt). Links: Am Rand; rechts: in der Mitte.

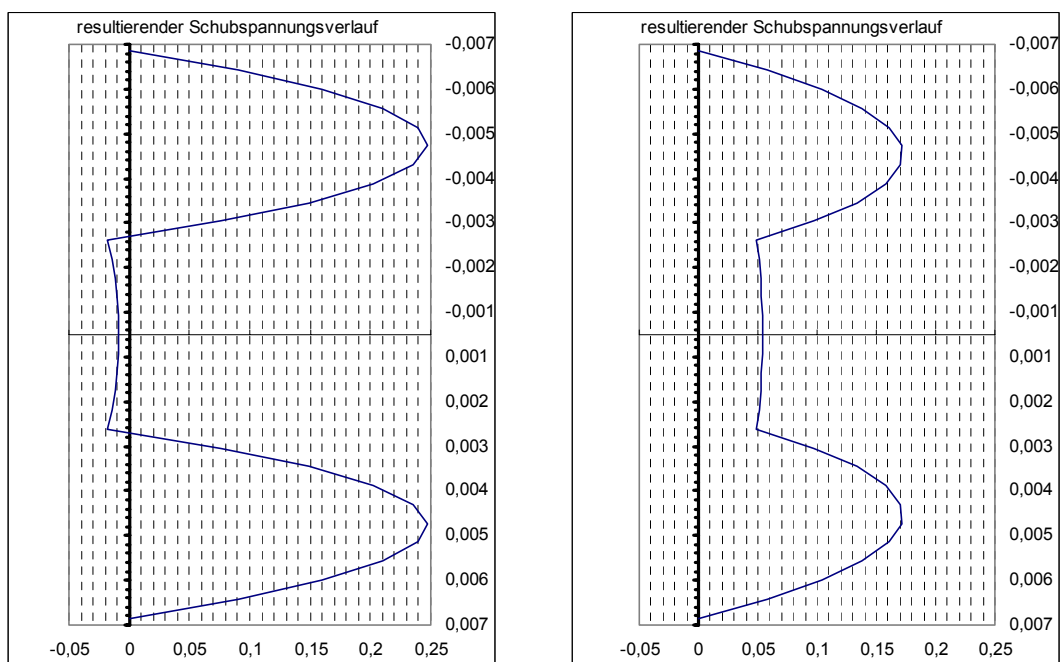


Bild 7.2-29: Schubspannungen [MPa] am Längsschnitt. Links: Schnitt 2 cm vor dem Randträger; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor dem Randträger.

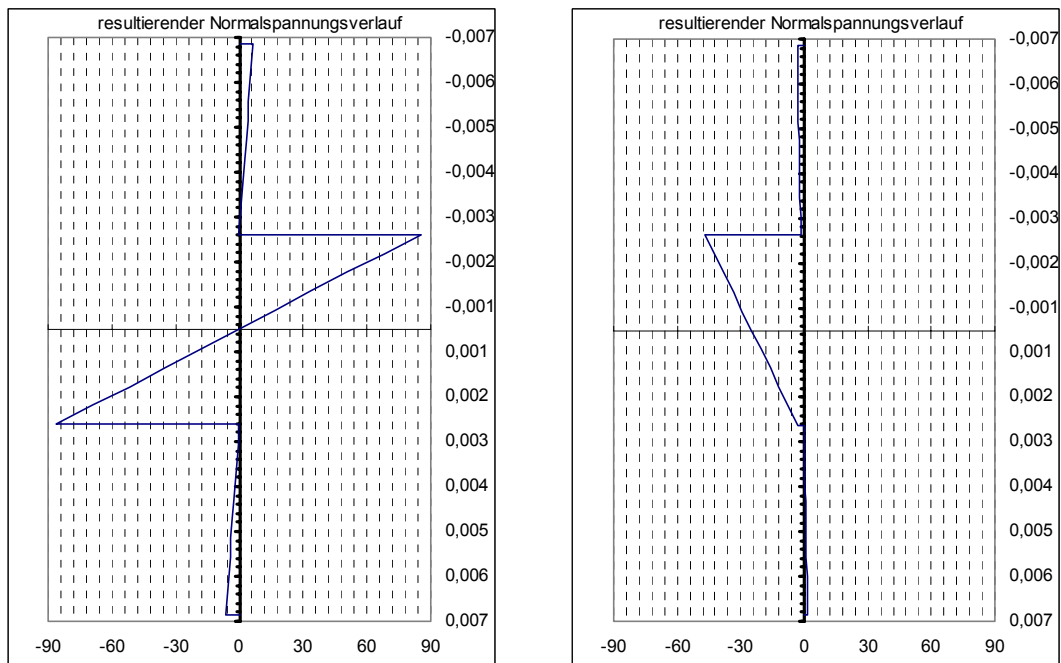


Bild 7.2-30: Normalspannungen [MPa] in Längsrichtung. Links: im Bereich der Querscheibe; rechts: in Schalenmitte.

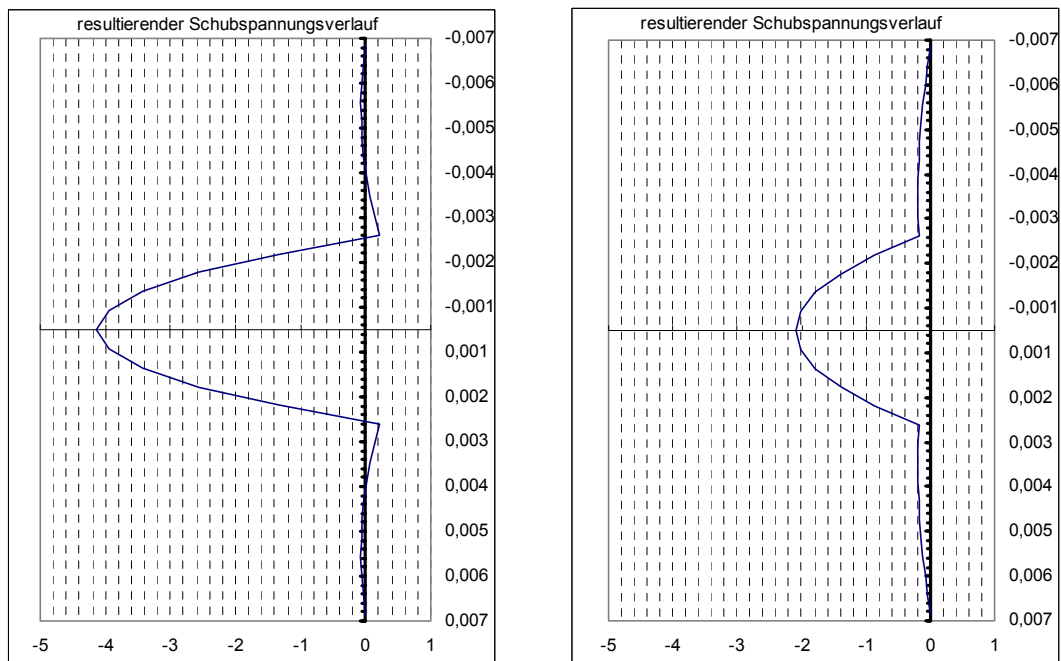


Bild 7.2-31: Schubspannungen [MPa] am Schnitt quer zur Längsrichtung. Links: Schnitt 2 cm vor der der Endquerscheibe; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor der Endquerscheibe.

Abschließend wird die maximale Scheibenschubspannung anhand der Querkräfte von den in Querrichtung orientierten Roststäben (Bild 7.2-32) errechnet:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{Q_x^{\max}}{e \cdot t} = \frac{0,479 \cdot 10^{-3}}{0,04 \cdot 00423 \cdot 3} = 0,94 \text{ MPa}$$

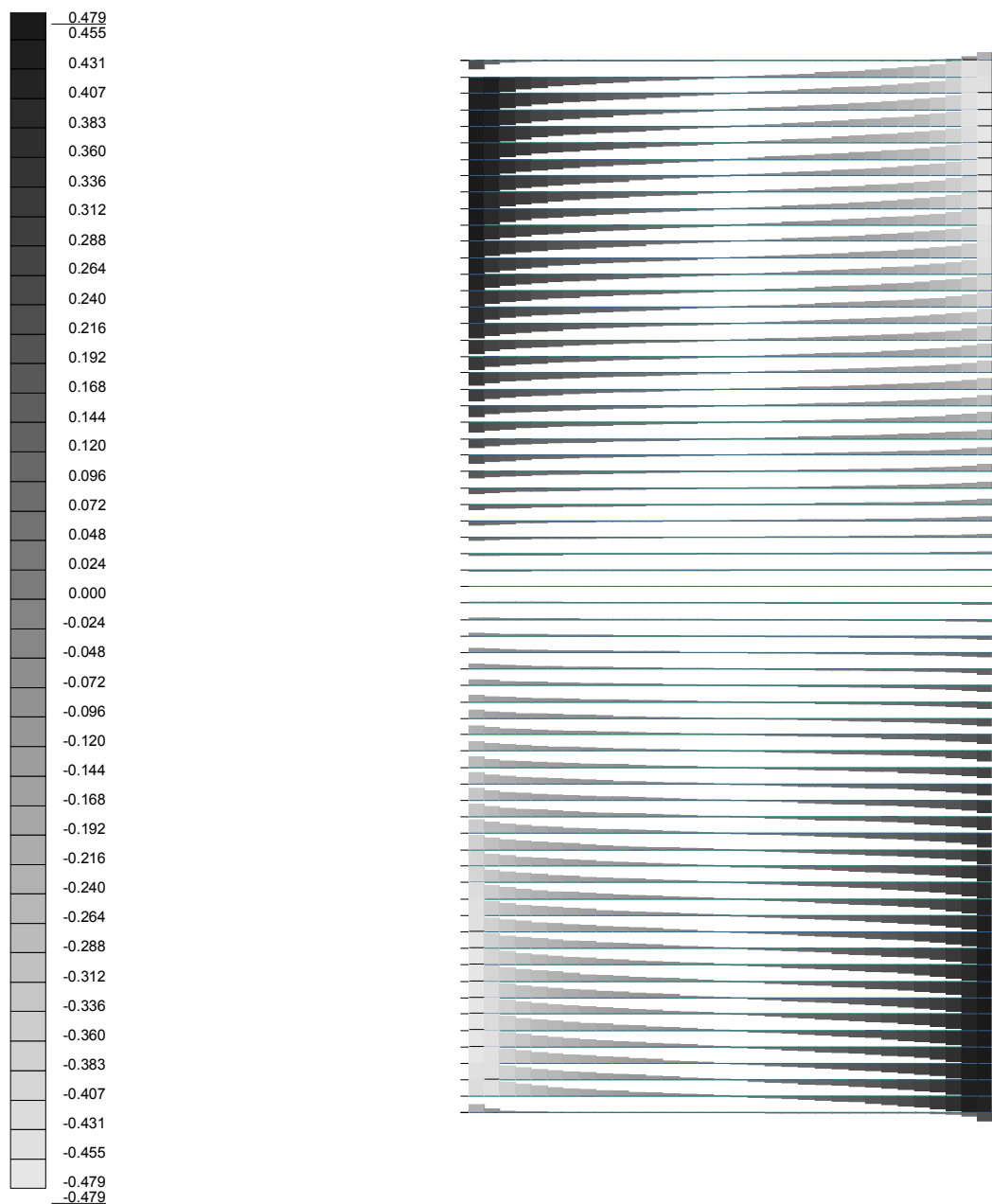


Bild 7.2-32: Querkräfte [kN] der quer orientierten Roststäbe in Schalenebene. Darstellung in der Draufsicht in Form eines in Graustufen abgestuften Linienabtrags mit begrenztem Maximalabtrag.

8 Zusammenfassung

Die Berechnung von Flächentragwerken bzw. Trägerrosten aus Holz ist infolge des Aufbaus der Querschnitte dieser Flächen oft aufwendig. Die stoffliche und die konstruktive Anisotropie sowie die Schubverformung einschließlich des nachgiebigen Verbundes müssen berücksichtigt werden. Dabei sind auch Fragestellungen bezüglich der Stabilität (Theorie zweiter Ordnung) zu beachten. Es bietet sich die Anwendung des im Allgemeinen mit dem Begriff „Schubanalogie“ bezeichneten Verfahrens an. Abweichend von bisher üblichen numerischen Methoden wird bei diesem Verfahren der reale Querschnitt für die Berechnung in einen Modellquerschnitt transformiert. Auf diese Weise ist eine näherungsweise Berechnung von Flächen mit genanntem Aufbau unter Benutzung praxisüblicher Rechenprogramme möglich. Für die Analyse von räumlichen, gekrümmten Strukturen sind besondere Überlegungen notwendig. Dabei gilt es auch Fragen bezüglich der Abweichungen bzw. der Anwendungsgrenzen des Verfahrens zu beantworten.

In der vorliegenden Arbeit wird ein für zweiteilige bzw. dreiteilige symmetrische Querschnitte bestehender Ansatz zur Verifizierung der Methode bezüglich Biegung mit Querkraft aufgegriffen und auf mehrteilige Querschnitte sowie auf die Torsion zweiteiliger Querschnitte erweitert. Den Überlegungen liegen Energiebetrachtungen zugrunde. Auf dieser Basis wird nachgewiesen, dass die Methode für beliebige Querschnittsaufbauten die theoretisch exakte Lösung liefern kann, solange die Verteilung der Fugensteifigkeiten einer vorgegebenen Relation gehorcht. Für den baupraktisch wichtigen Fall von Verbundquerschnitten, die aus lauter identischen, gleichartig miteinander verbundenen Teilquerschnitten bestehen, werden die Abweichungen des Verfahrens abgeschätzt.

Um das Verhalten des ideellen Modellquerschnitts zu verdeutlichen und konkrete Anhaltswerte zu geben, werden diese Untersuchungen durch Parameterstudien und analytische Ableitungen ergänzt. Dazu ist die analytische Lösung des Vorgehens gemäß der Schubanalogie für ausgesuchte System-Last-Konstellationen abgeleitet, so dass numerische bzw. programmtechnisch bedingte Ungenauigkeiten umgangen werden. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Abweichungen des Verfahrens für Verbundquerschnitte aus lauter identischen Teilen mit identischen Fugensteifigkeiten im Rahmen der üblichen vereinfachenden Annahmen gering sind. Erwähnenswert ist jedoch der Fehler bezüglich des maximal vorhandenen Fugenschubes. Allerdings liegt er im Hinblick auf eine Bemessung stets auf „der sicheren Seite“ und fällt für die meisten praxisrelevanten Fugensteifigkeiten relativ gering aus. Für Verbundquerschnitte mit ungleichmäßig verteilten Steifigkeiten bzw. unsymmetrischem Aufbau ist die Eignung des Verfahrens zur Erfassung des realen Spannungs-Dehnungs-Zustandes stark von den anliegenden Steifigkeitsverhältnissen abhängig. Auf Grund der Vielzahl der Parameter sind allgemeingültige Aussagen zur erreichbaren Genauigkeit nur schwer vorstellbar.

Für die Bemessung von Flächentragwerken, die über Membrankräfte abtragen, ist oft das Stabilitätsverhalten maßgebend. Das Rechenmodell der Schubanalogie musste bezüglich dieses Gesichtspunktes erweitert werden, um ein vorzeitiges, lokales Versagen des ideellen Systems zu vermeiden. Die erweiterte Theorie wird analytisch untersucht und anhand von Beispielen getestet. Dabei werden im Rahmen einer Parameterstudie Anhaltswerte bezüglich einer sinnvollen Unterteilung des Rechenmodells abgeleitet.

Abschließend ist die Anwendung der Methode mit Beispielrechnungen dokumentiert. Anhand von Untersuchungen der Montagezustände eines Brettstapelbogens werden verschiedene Aspekte zur Umsetzung einer vorhandenen Struktur in ein entsprechendes ideelles System erläutert. Die Berechnung einer zylinderförmigen Holzschale mit geschichtetem Aufbau nach Theorie zweiter Ordnung zeigt eine gute Übereinstimmung mit in der Literatur zu diesem Beispiel gegebenen Vergleichswerten.

9 Literatur

- [1] Aicher, S.; Roth, W.:
Ein modifiziertes γ -Verfahren für das mechanische Analogon: dreischichtiger Sandwichverbund-zweiteiliger verschieblicher Verbund
In: Bautechnik; Nr.: 01/1987, Seiten: 21-29.
- [2] Aicher, S.:
Bemessung biegebeanspruchter Sandwichbalken mit dem modifizierten γ -Verfahren
In: Bautechnik; Nr.: 03/1987, Seiten: 79-86.
- [3] Albers, K.:
Querdehnungs- und Gleitzahlen sowie Schub- und Scherfestigkeiten von Holzwerkstoffen
Dissertation; Universität Hamburg; 1970.
- [4] Arbeitsgemeinschaft Holz e.V. (Herausgeber):
Beispiele Moderner Holzarchitektur
2. Aufl. Düsseldorf: Holzwirtschaftlicher Verlag der Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., 1990.
- [5] Arbeitsgemeinschaft Holz e.V. (Herausgeber):
Holzbau Handbuch, Reihe 1, Teil 9, Folge 4 (QS-Holzplattenbrücken)
1. Aufl. Düsseldorf: Holzwirtschaftlicher Verlag der Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., 1995.
- [6] Benitz-Wildenburg, J.:
Dickholz – „Die andere Holzbauweise“
In: Mikado; Nr.: 1/1998, Seiten: 49-52.
- [7] Bergfelder, J.:
Näherungsverfahren zur Berechnung allgemeiner zusammengesetzter hölzerner Biegeträger mit elastischem Verbund
In: Der Bauingenieur; 49 (1974), Seiten: 350-357.
- [8] Blaß, H. J.; Görlacher, R.:
Berechnung von Wand- und Deckentafeln unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit infolge Rollschubbeanspruchungen
In: Ingenieurholzbau - Karlsruher Tage 2000; Karlsruhe: Bruderverlag, 2000; Seiten: 30-41.
- [9] Blaß, H. J.; Görlacher, R.:
Zum Trag und Verformungsverhalten von LIGNOTREND-Decken- und Wandsystemen aus Nadel-schmitt-holz (Teil 1 und 2)
In: Bauen mit Holz 4/01 und 5/01; Bruderverlag 2001; S. 37-43 und 68-71.
- [10] Blaß, H. J.; Görlacher, R.:
Zum Trag und Verformungsverhalten von Brettsperrholzelementen bei Beanspruchung in Plattenebene (Teil 1 und 2)
In: Bauen mit Holz 11/02 und 12/02; Bruderverlag 2002; S. 34-41 und 30-33.
- [11] Böttcher, C.:
Flächentragwerke im Ingenieurholzbau, Beispiele – Berechnung - Konstruktion
Diplomarbeit; TU-München, Fachgebiet Holzbau; 2002.
- [12] Bogusch, W.:
Kugelförmige Holzgitterschalen mit großen Spannweiten
In: Schweizer Holzbau; Nr.: 8/1983, Seiten: 20-25.
- [13] Born, D.:
Berechnung von Schalentragwerken mit gekrümmten Gitterostelementen
Dissertation; Technische Universität Braunschweig; 1971.
- [14] Bosl, R.:
Zum Nachweis des Trag- und Verformungsverhaltens von Wandscheiben aus Brettlagenholz
Dissertation; Universität der Bundeswehr München; 2001.

- [15] Burger, N.:
Holzschalen in Brettrippenbauweise
In: Ingenieurholzbau - Karlsruher Tage 2001; Karlsruhe: Bruderverlag, 2001; Seiten: 101-119.
- [16] Cziesielski, E.:
Hölzerne Dachflächentragwerke
In: Holzbautaschenbuch, Band 1, 9. Auflage; Berlin: Ernst und Sohn, 1996; Seiten: 759-813.
- [17] Dirr, B.:
Beitrag zur näherungsweise Berechnung dünner, isotroper, elastischer Scheiben mit Hilfe von Gitterrostelementen
Dissertation; Technische Hochschule Hannover; 1968.
- [18] Dirr, B.; Waller, H.:
Über die statische Berechnung von Scheiben und Platten nach dem Gitterrostverfahren
In: Fortschrittberichte VDI; Reihe 4 (1968), Nr.: 7, Seiten: 1-39.
- [19] Dubas, P.:
Zusammengesetzte Holzstäbe mit unsymmetrischem zweiteiligen Querschnitt
In: Schweizer Ingenieur und Architekt; Nr.: 9, 1988, Seiten: 243-245.
- [20] Eberhardsteiner, J.:
Mechanisches Verhalten von Fichtenholz
1. Aufl. Wien: Springer, 2002.
- [21] Edlund, B.:
Bruchhypothesen für orthotropes Material
In: Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis; Bruderverlag, Karlsruhe, 1982, Seiten: 17-22.
- [22] Edlund, B.:
Zug und Druck
In: Step 1 – Bemessung und Baustoffe; Fachverlag Holz der Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., Düsseldorf 1995, Seiten: B2/1-B2/8.
- [23] Ehlbeck, J.; Kürth, J.:
Pultdachträger, gekrümmte Träger und Satteldachträger
In: Step 1, Bemessung und Baustoffe; Düsseldorf; Informationsdienst Holz, 1995; Seiten B8/1-B8/8.
- [24] Ewald, G.:
Zur Ausbildung der Knotenpunkte bei Rauten-Lamellen-Konstruktionen
In: Bauen mit Holz; 1985, Nr.: 4, Seiten: 222-223.
- [25] Fuchs, C.:
Aufwändige Planung zahlt sich aus – Toscana-Therme Bad Sulza
In: Mikado; Nr.: 12/2000, Seiten: 12-15.
- [26] Götz, K-H.; Hoor, D.; Möhler, K.; Natterer, J.:
Holzbauatlas 1, 1. Aufl.
ARGE Holz e.V. & CMA Bonn, Druck: J.P. Himmer, Augsburg, 1980.
- [27] Gustafsson, P.J.:
Ausgeklinte Träger und Durchbrüche in Brettschichtholz
In: Step 1 – Bemessung und Baustoffe; Fachverlag Holz der Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., Düsseldorf 1995, Seiten: B5/1-B5/9.
- [28] Happold, E.; Liddell, W. I.:
Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau
In: The Structural Engineer; 53, Nr.: 03/1975, Seiten: 99-135.
- [29] Hartmann, H.:
Die Berücksichtigung elastisch plastischer Verformungseigenschaften mechanischer Verbindungsmittel bei Verbundkonstruktionen im Ingenieurholzbau
Dissertation; TU-München; 2000.

- [30] Hartmann, H.; Kneidl, R. :
Träger mit nachgiebigem Verbund, Eine Berechnung mit Stabwerksprogrammen
In: Bauen mit Holz; Nr.: 04/1995, Seiten: 285-290.
- [31] Heimeshoff B.:
Über den Einfluss der Anisotropie auf den Spannungs- und Verformungszustand von Stäben mit Rechteckquerschnitt bei Torsionsbeanspruchung
In: Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis; 1. Aufl. Karlsruhe: Bruderverlag, 1982; Seiten 9-16.
- [32] Heimeshoff, B.:
Nachweis der Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit von Einfeldträgern, die aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen bestehen im Ingenieurholzbau
In: Holz als Roh- und Werkstoff, 49 (1991), Seiten: 243-249.
- [33] Heimeshoff, B.:
Näherungsverfahren zur Berechnung von Einfeldträgern mit Kragarm und Zweifeldträgern, die aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen bestehen im Ingenieurholzbau
In: Holz als Roh- und Werkstoff, 49 (1991), Seiten: 277-285.
- [34] Heinle, E.; Schlaich, J.:
Kuppeln aller Zeiten – aller Kulturen
1. Aufl. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt, 1996.
- [35] Hellriegel, S.; Fritzen, K.:
Überdimensionale Tischplatten – Zweiachsig tragende Holz-Flachdecken, lediglich punktförmig durch Stahlrohre gestützt
In: Bauen mit Holz; 1999, Nr.: 2, Seiten: 14-17.
- [36] Hemmer, K.:
Versagensarten des Holzes der Weißtanne (Abies Alba) unter mehrachsiger Beanspruchung
Dissertation; Universität Fridericiana Karlsruhe, 1985.
- [37] Hempel, G:
Hyperbolische Paraboloid-Schalendächer
In: Bauen mit Holz; Nr.: 10/1967, Seiten: 479-486.
- [38] Herzog, Th. (Hrsg.):
Expodach – Symbolbauwerk zur Weltausstellung Hannover 2000
1. Aufl. München: Prestel, 2000.
- [39] Hoffmeyer, P.:
Holz als Baustoff
In: Step 1 – Bemessung und Baustoffe; Fachverlag Holz der Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., Düsseldorf 1995, Seiten: A4/1-A4/22.
- [40] Hofmann, Th. J.:
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie;
Dissertation Universität Stuttgart, 1992.
- [41] Jakob, S.; Lauber:
Neue Messe Rimini – Zollinger in Italien
In: Bauen mit Holz; Nr.: 2/2002, Seiten: 10-15.
- [42] Kenel, A.:
Zur Berechnung von Holz/Beton-Verbundkonstruktionen
Forschungs- und Arbeitsbericht 115/42; EMPA Abteilung Holz, Dübendorf; 2000.
- [43] Kley, G.; Jacob, S.:
Holz-Faltwerke als Dachkonstruktion
In: Bauen mit Holz; 1998, Nr.: 6, Seiten: 17-21.

- [44] Kneidl, R.:
Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Trägern mit veränderlichem nachgiebigem Verbund;
In: Bauingenieur 65, 1990, Seiten 281-288.
- [45] Kneidl, R.:
Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalkensystemen
Dissertation; TU-München; 1991.
- [46] Krämer, V.:
Trag- und Verformungsverhalten genagelter Brettstapelelemente unter plattenförmiger Beanspruchung
Dissertation; Universität Fridericiana (TH) Karlsruhe; 2002.
- [47] Kreibich, R.:
Spannweite 162m, Scheitelhöhe 48 m – ein gigantischer Kuppelneubau im amerikanischen Nordwesten
In: Bauen mit Holz, Nr.: 01/1983, Seiten: 22-23.
- [48] Kreuzinger, H.:
Flächentragwerke: Platten, Scheiben und Schalen; Berechnungsmethoden und Beispiele.
Informationsdienst Holz: Brücken aus Holz; 1999; Seiten 43-60
- [49] Kreuzinger, H.:
Die Holz-Beton-Verbundbauweise
In : Fachtagung Holzbau 1999-2000, Holzbau für das neue Jahrhundert;
Informationsdienst Holz, 2000, Seiten: 70-83.
- [50] Kreuzinger, H.:
Mechanically jointed beams - possibilities of analysis and some special problems;
CIB-W18, Meeting 34/2001; Venice, Italy;
Hrsg.: Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktion, Universität Karlsruhe.
- [51] Kreuzinger, H.:
Verbundkonstruktionen
In: Holzbaukalender 2002, 1. Jahrgang; Karlsruhe, Bruderverlag 2001; Seiten 598-621.
- [52] Kreuzinger, H.; Scholz, A.:
Wirtschaftliche Ausführungs- und Bemessungsmethode von ebenen Holzelementen (Brücken, Decken, Wände);
DGfH - Schlussbericht, München, Februar 1999.
- [53] Kreuzinger, H.; Scholz, A.:
Nachweis in Grenzzuständen der Tragfähigkeit bei Platten und Scheiben aus Holz und Holzwerkstoffen unter Spannungskombinationen
Forschungsvorhaben - Schlussbericht, TU-München, Juni 1999.
- [54] Kreuzinger, H.; Scholz, A.:
Schubtragverhalten von Brettsperrholz
Forschungsvorhaben - Schlussbericht, TU-München, Februar 2001.
- [55] Kreuzinger, H.; Scholz, A.:
Flächentragwerke - Berechnung und Konstruktion;
AIF Forschungsvorhaben - Schlussbericht, TU-München, November 2003.
- [56] Kunze, R.:
Torsion nachgiebig verbundener Querschnitte
Diplomarbeit; TU-München, Fachgebiet Holzbau; 2002.
- [57] Laermann, K. H.:
Flächentragwerk
In: Bauingenieurwesen, Lexikon; 1. Aufl. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1991.

- [58] Meschke, H.J.:
Baukunst und –technik der hölzernen Wölbkonstruktionen – Vom Bogentragwerk zum Stabnetzwerk
Dissertation; RWTH Aachen; 1989.
- [59] Möhler, K.:
Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigen Verbindungsmitteln
Habilitation; Universität (TH) Karlsruhe; 1956.
- [60] Möhler, K., Hemmer, K.:
Verformungs- und Festigkeitsverhalten von Nadelvoll- und Brettschichtholz bei Torsionsbeanspruchung
In: Holz als Roh und Werkstoff, 35 (1977), Seiten: 437-478.
- [61] Moser, K.:
Ein Meilenstein auf dem Weg zu wirtschaftlichen Großüberdachungen – Eine neue Sporthalle als Holznetzkupele in Oulu, Nordfinland
In: Bauen mit Holz; Nr.: 11/1985, Seiten: 748-751.
- [62] Moss, P. J.; Carr, A. J.; Cree-Brown, N. C.:
Nonlinear layered timbered shells
In: Journal of the Structural Division; Vol. 105 (1979), Nr.: ST 10, pp.: 2019-2033.
- [63] Moss, P. J.; Walford, G. B.:
Tests on nailed and glued layered timber cylindrical shells
In: Journal of the Structural Division; Vol. 106 (1980), Nr.: ST 1, pp.: 247-263.
- [64] Natterer, J.:
Flächentragwerke in Brettstapelbauweise
In: Bauen mit Holz; Nr.: 12/1972, Seiten: 688-693.
- [65] Otzen, R.:
Die statische Berechnung der Zollbau-Lamellendächer
In: Der Industriebau; 9 (1923), Nr.: 8.
- [66] Pflüger, A.:
Stabilitätsprobleme der Elastostatik
2. Aufl. Berlin: Springer, 1964.
- [67] Pohlmann, J.; Mohr, B.:
Innovativer Plattenbalkenquerschnitt – Holzbrücke als Ortsumgehung bei Ruderting
In: Bauen mit Holz; 1999, Nr.: 12, Seiten: 14-19.
- [68] Rattasepp, T. / Mang, H. A.:
Zur Stabilität flacher eckgestützter Hyparschalen aus Holz mit geradlinigen Randträgern
In: Bauingenieur, 64 (1989), Seiten: 255-266.
- [69] Roik, K.-H.; Sedlacek, G.:
Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen
In: Die Bautechnik; 1, 1970, Seiten: 20-32.
- [70] Rüsche, H.:
Der Begriff der Schubspannung und der Torsionsspannung bei mehrachsiger Beanspruchung
In: Beton und Stahlbetonbau; 53 (1958), Nr.: 10, Seiten: 249-250.
- [71] Ruske, W.; Hellriegel, S.:
Historische Bauweise in moderner Technik – Das Dach des neuen Schulungsgebäudes „Ökozentrum NRW“ wurde mit modernen Methoden nach altem Konzept gebaut
In: Bauen mit Holz; Nr.: 11/1996, Seiten: 845-849.

- [72] Scheer, C.; Pornomo, J.:
Weiterentwicklung der Zollinger-Lamellenbauweise mit Ermittlung von vereinfachten
Berechnungsverfahren und statischen Nachweisen
In: Bauen mit Holz; Nr.: 6/1981, Seiten: 374-377.
- [73] Schelling, W.:
*Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im
Ingenieurholzbau*
Dissertation; Universität (TH) Karlsruhe; 1968.
- [74] Schelling, W.:
Zur Berechnung nachgiebig zusammengesetzter Biegeträger aus beliebig vielen
Einzelquerschnitten
In: Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis; 1. Aufl. Karlsruhe: Bruderverlag, 1982; Seiten
163-169.
- [75] Scherberger, M.:
Über hyperbolische Paraboloiden am Beispiel Faulerbad Freiburg
In: Bauen mit Holz; Nr.: 12/1986, Seiten: 842-846.
- [76] Schickhofer, G.:
Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten flächenhaften Holzstrukturen
Dissertation; Technische Universität Graz; 1994.
- [77] Schickhofer, G.:
Straßenbrücken aus Holz - ausgeführte Beispiele
Informationsdienst Holz: Brücken aus Holz; 1999; Seiten 79-93.
- [78] Schleeh, W.:
Bauteile im zweiachsigen Spannungszustand
In: Betokalendar, 1983, Teil II, Seiten: 715-848.
- [79] Schnell, W.; Gross, D.; Hauger, W.
Technische Mechanik 2, Elastostatik
Springerverlag, 1998.
- [80] Scholz, A.:
Schub beim Brettspertholz
In: Bauen mit Holz; Nr.: 5/2001, Seiten: 60-66.
- [81] Scholz, A.:
Structural analysis of wooden plate structures;
4th international Ph. D. Symposium in Civil Engineering; Munich; September 2002; Volume 2,
pp. 255-261.
- [82] Scholz, A.:
Eigenspannungszustände an Verbundquerschnitten infolge von Dehnungsunterschieden
In: Die Bautechnik; Voraussichtlich erstes Quartal 2004.
- [83] Scholz, G.:
Hölzernes Hängedach über dem Ausstellungspavillon der Bundesgartenschau in Dortmund
In: Detail; Nr.: 4/1969, Seiten: 803-814.
- [84] Siebert, G.:
Zum Einsatz von Glas als tragendes Bauteil im konstruktiven Ingenieurbau
Dissertation; Technische Universität München; 1999.
- [85] Spengler, R.:
Nadelholz-Feinstruktur bei „Rollschub“
In: Bauen mit Holz; Nr.: 5/2001, Seiten: 54-59.
- [86] Stamm, K.; Witte, H.:
Sandwich Konstruktionen
1. Aufl. Wien: Springer Verlag, 1974.

- [87] Steuerwald, T.:
Messedach übernimmt tragende Rolle
In: Mikado; 2002, Nr.: 9.
- [88] Stüssi, F.:
Über den verdübelten Balken
In: Schweizerische Bauzeitung; 1943, Band: 122, Heft. 21, Seiten 271-274.
- [89] Suess, K.:
Sakrales Rätsel – Die Aussegnungshalle von Gräfelfing: Ein Spiel von Formen, Farben und Baustoffen
In: Bauen mit Holz; 2000, Nr.: 1, Seiten: 8-15.
- [90] Szalai, J.:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der herstellungsbedingten Eigenspannungen von gekrümmten Brettstapelträgern
In: Holz als Roh- und Werkstoff 44; 1986; Seiten 69-75.
- [91] Szalai, J.:
Indirekte Bestimmung der Scherfestigkeit des Holzes mit Hilfe der anisotropen Festigkeitstheorie
In: Holz als Roh und Werkstoff, 50 (1992), Seiten: 233-238.
- [92] Szalai, J.:
Holz in Baukonstruktionen - Statische Bemessung von Holzkonstruktionselementen unter zusammengesetztem Spannungszustand auf Grund der Ashkenasi'schen Festigkeitstheorie
Konferenciakiadvány, Kocovce, Szlovákia. (17-21 Oktober 1995), Seiten: 24-34.
- [93] Timoshenko, S.; Goodier, J. N.:
Theory of elasticity;
2.Aufl. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [94] Timoshenko, S.; Gere, J. M.:
Theory of elastic stability
2.Aufl. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [95] Trabert, J.; Hellrigel, S.:
Erstarnte Welle – Eine frei geformte Holzrippenschale für die Dachkonstruktion der Toscana-Therme in Bad Sulza
In: Bauen mit Holz; Nr.: 04/2000, Seiten: 14-20.
- [96] Wagner, R.:
Berechnung von gekrümmten Brettstapelträgern
Diplomarbeit an der EPFL-IBOIS, Lausanne und der TU- München; September 2002.
- [97] Waller, H.:
Beitrag zur Berechnung dünner, elastischer, isotroper Platten nach dem Gitterrostverfahren
Dissertation; Technische Hochschule Hannover; 1966.
- [98] Wenzel, F.; u. a.:
Schalenförmiges Holzgitterdach – Bundesgartenschau Mannheim
In: Der Bauingenieur (49); Nr.: 06/1975, Seiten: 278-291.
- [99] Wenzel, F.; Frese, B.; Barthel, R.:
Die Holzrippenschale in Bad Dürkheim – Entwurf und Konstruktion des Daches über dem neuen Solebad
In: Bauen mit Holz; Nr.: 5/1987, Seiten: 282-287.
- [100] Werkle, H.:
Finite Elemente in der Baustatik
2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 2001.

- [101] Zimmermann, F. et al:
Das Dach der Zukunft, Zollinger Lamellendächer der 20er Jahre.
 Katalogbroschüre zur Ausstellung in der Fachhochschule München im Juli 2003, Fachbereich
 Architektur, FH-München, 2003.
- [102] Straßenbrücke über den „sausenden Graben“
In: Bauen mit Holz; Nr.: 10/1997, S. 708-712.
(Namen der Verfasser nicht genannt)
- [N1] DIN 1151: *(Anm.: zurückgezogen!)*
Drahtstifte rund
 Berlin: Beuth-Verlag, 1973.
- [N2] DIN 1052:
Holzbauwerke
 04.88. Berlin: Beuth-Verlag, 1988.
- [N3] EN V 1995-1:
Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holztragwerken
- [N4] Blaß, H. J.; Ehlbeck, J.; Kreuzinger, H.; Steck, G.:
 Schlussentwurf Bemessungsnorm Holzbau BEKS-2002
In: Ingenieurholzbau Karlsruher Tage-Forschung für die Praxis
 Tagungsband, Karlsruhe: Bruderverlag; Oktober 2002, S. 1-174.
- [N5] prEN 1995-2:
Eurocode 5-Design of timber structures-part 2 bridges
 Stand 2003-05-21.
- [N6] DIN 4421:
 Traggerüste - Berechnung Konstruktion und Ausführung
 08.82. Berlin: Beuth-Verlag, 1982.

10 Verzeichnis der Abbildungen

Bild 2.1-1: Ausschnitt einer Schichtplatte mit Bezeichnungen	6
Bild 3.2-1: Straßenbrücke Ruderting; links: Ansicht, rechts: Untersicht. Quelle:[67]	10
Bild 3.2-2: Aussegnungshalle Gräfelfing; Quelle:[89]	11
Bild 3.2-3: Luftaufnahme Sporthallen bei Jenbach (Tirol); Quelle: [34]	12
Bild 3.2-4: Zollinger Bauweise; links: Gesamttragwerk, schematisch (aus [15]), rechts Knotenpunkt [58]	12
Bild 3.2-5: Neue Messe Rimini, Kuppel über der zentralen Rotunde. Links: Innenansicht; rechts: Grundriss und Schnitt (Quelle: [41])	13
Bild 3.2-6: Toscana-Therme Bad Sulza; links: Innenansicht (Quelle: [25]), rechts Montagevorgang (Quelle: [95])	14
Bild 3.2-7: „Tacoma Dome“: Innenansicht (Quelle: [34])	15
Bild 3.2-8: Innenansicht Solebad Bad Dürheim (Quelle: [4])	16
Bild 3.2-9: Pavillon für die Bundesgartenschau in Dortmund (Bauzustand)	17
Bild 3.2-10: Aufbau der Schalenmembran, links (a) real, rechts (b) FE-Modell; (Quelle [68])	18
Bild 3.2-11: Multihalle Mannheim: links: Grundriss und Randträgertypen, rechts: Innenansicht. (Quellen: [98] bzw. [34])	19
Bild 3.2-12: Knotenpunkt Brettrippenbauweise, Explosionszeichnung. (Quelle: [15])	20
Bild 3.2-13: Struktur des Stabwerksmodells zur Berechnung der Schirmschalen in der Perspektive (Quelle: [15])	21
Bild 4.2-1: Transformation eines Verbundquerschnitts aus n nachgiebig verbundenen Teilquerschnitten zum ideellen Rechenquerschnitt	27
Bild 4.2-2: Verformung eines exemplarischen Verbundquerschnitts mit unterschiedlich steifen Schichten unter konstantem Schubfluss; linke Seite: infinitesimaler Ausschnitt mit Belastung, rechte Seite: Verdeutlichung der Verschiebung der Schichten.	28
Bild 4.2-3: Ausschnitt aus einem genagelten Brettsperrholzelement.	29
Bild 4.3-1: Schematische Darstellung der Spannungsermittlung am Beispiel eines Schichtquerschnitts	30
Bild 4.4-1: Kopplung der Konten KA und KB im Raum; Realisierung durch Federn	32
Bild 4.4-2: Schematische Darstellung der Transformation, der Koppelkräfte und der Lastaufteilung am infinitesimal kleinem Balkenelement mit n Lagen unter der äußeren Last $p(x)$	33
Bild 4.5-1: Ideelles System mit Belastung im Lastfall „gegenseitig orientierte Randmomente“, schematische Darstellung	38
Bild 4.5-2: Lastfall „gegenseitige Randmomente“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	40
Bild 4.5-3: Lastfall „gegenseitige Randmomente“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve)	41
Bild 4.5-4: Ideelles System mit Belastung im Lastfall „Randmoment an Ebene B“, schematische Darstellung	41
Bild 4.5-5: Lastfall „Randmomente an Ebene B“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	43
Bild 4.5-6: Lastfall „Randmomente an Ebene B“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve)	44
Bild 4.5-7: Lastfall „sinusförmige Streckenlast“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	45
Bild 4.5-8: Lastfall „sinusförmige Streckenlast“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)	45

Bild 4.5-9: Lastfall „Gleichlast“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	46
Bild 4.5-10: Lastfall „Gleichlast“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)	47
Bild 4.5-11: Ersatzsystem für die Herleitung der Beziehungen im den Lastfall „Einzellast in Feldmitte“	47
Bild 4.5-12: Lastfall „Einzellast in Feldmitte“. Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie (jeweils über die gesamte Trägerlänge).....	49
Bild 4.5-13: Lastfall „Einzellast in Feldmitte“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet, jeweils über die gesamte Trägerlänge).....	49
Bild 4.5-14: Lastfall „Gleichlast am Kragträger“. links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	51
Bild 4.5-15: Lastfall „Gleichlast am Kragträger“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)	51
Bild 4.5-16: Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“: Links: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Koppellasten $p^A(x)$ (gestrichelt) und $p^B(x)$; rechts: Biegelinie	52
Bild 4.5-17: Lastfall „Einzellast am Ende eines Kragträgers“: Beispielhafter, qualitativer Verlauf der Schnittgrößen (Ebene A gestrichelt, Ebene B durchgezogene Kurve, Summe gepunktet)	52
Bild 4.6-1: Dreiebenenmodell am Beispiel eines Knickstabes (Euler-Fall II)	54
Bild 4.6-2: Analogie: Stütze mit nachgiebig verbundenem Querschnitt, Fachwerkrahmenkonstruktion und Schubanalogie	54
Bild 4.6-3: Links: System Testbeispiel; rechts: zugehöriger Stabquerschnitt.	55
Bild 4.6-4: Ergebnisse der Traglastiteration in Abhängigkeit von der gewählten Unterteilung	56
Bild 4.6-5: Statisches System und Querschnitt für die Vergleichsrechnung „einhüftiger Rahmen“ ..	57
Bild 4.6-6: Detail „Erfassung der Eckkonstruktion im Drei-Ebenen-Modell“, links Variante V1, rechts Variante V2	57
Bild 4.6-7: Scheibenrechnung, verschobene Struktur (Auflagerdetail „Stützenfußpunkt“ vergrößert) unter $P=54$ kN, Darstellung überhöht.	58
Bild 4.6-8: Vergleich der Last Verschiebungskurven aus Scheibenrechnung und nach Schubanalogie (Varianten V1 und V2) für den einhüftigen Rahmen.....	58
Bild 4.6-9: links: Ideelles System für den Knickstab Eulerfall 2 mit einmal unterteilter Knicklänge; rechts: Das zugehörige Ersatzsystem.....	59
Bild 4.6-10: Verlauf der analytisch ermittelten Abweichung des Dreistabsystems bei einfacher Unterteilung zur exakten Lösung für den nachgiebig verbundenen Knickstab in Abhängigkeit von der Systemlänge ℓ und der Schubsteifigkeit S	61
Bild 4.6-11: Schnitt durch den in Bild 4.6-10 dargestellten Funktionsverlauf an der Stelle $\ell=5m$	61
Bild 4.6-12: Diagramme für den Fehlerfaktor in Abhängigkeit von $\tilde{\alpha}$ [m^{-1}], β [-] und n	63
Bild 4.6-13: Durchschlagproblematik: Beispielsystem ungestützte Stabkonstruktion (verschoben System gestrichelt).....	64
Bild 4.6-14: Last – Verschiebungsbeziehung für die ungestützte Sparrenkonstruktion.....	66
Bild 4.6-15: Last – Verschiebungsbeziehung für die gestützte Sparrenkonstruktion in Abhängigkeit von der Federkonstante C	67
Bild 4.6-16: Sparrensystem, Drei-Ebenen-Modell, schematische Darstellung	67
Bild 4.6-17: Last-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet.....	68
Bild 4.6-18: Normalkraft-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet	68

Bild 4.6-19: Last-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion mit nachgiebig verbundenem Querschnitt; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet	69
Bild 4.6-20: Normalkraft-Verschiebungs-Kurve Sparrenkonstruktion mit nachgiebig verbundenem Querschnitt; Ergebnisse Iteration Drei-Ebenen-Modell mit $\times$ gekennzeichnet	69
Bild 4.7-1: Einseitig belasteter Verbundquerschnitt, Transformation zum ideellen Rechensystem..	71
Bild 4.7-2: Verschiedene Endlagerungen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und die Umsetzung im ideellen System.....	71
Bild 4.7-3: Beispielhafte Übergangssituationen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und ihre Umsetzung im ideellen System.....	72
Bild 4.7-4: Lastfälle des Gedankenmodells zur Erfassung von Dehnungsänderungen. Schematische Darstellung am Beispiel eines Holz-Beton-Verbundquerschnitts	72
Bild 5.2-1: Geometrische Beziehungen für zwei nachgiebig zusammengesetzte (schubstarre) Einzelquerschnitte.....	76
Bild 5.2-2: Geometrische Beziehungen am ideellen Rechenquerschnitt.....	77
Bild 5.2-3: Geometrische Beziehungen für zwei schubstarre Einzelquerschnitte (1 und 2) mit schubweicher Zwischenschicht (3')	77
Bild 5.2-4: Aus mehreren beliebigen, nachgiebig verbundenen, schubstarren Teilquerschnitten zusammengesetzter Querschnitt, schematische Darstellung der geometrischen Beziehungen.	79
Bild 5.2-5: Verlauf des über Energieäquivalenz abgeleiteten Korrekturwertes κ für einen Querschnitt aus n identischen, mit identischen Verbindungen nachgiebig zusammengesetzten Schichten	82
Bild 5.2-6: Aus mehreren beliebigen, nachgiebig verbundenen, schubweichen Teilquerschnitten zusammengesetzter Querschnitt, schematische Darstellung der geometrischen Beziehungen.	85
Bild 5.5-1: Normalspannungsverlauf am Verbundquerschnitt des Beispielträgers für verschiedene Fugensteifigkeiten [MPa]. Vergleich der Lösung gemäß der Schubanalogie mit dem Referenzwert (γ -Verfahren, gestrichelt).	91
Bild 5.5-2: Vergleich der maximalen Biege normalspannung [MPa] und der maximalen Durchbiegung [m]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert).....	91
Bild 5.5-3: Abweichungen der Schubanalogie bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert).....	92
Bild 5.5-4: Vergleich der Ergebnisse für den maximalen Fugenschub [MN/m] und Verlauf der auf die Referenzwerte bezogenen Abweichung [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse, logarithmisch skaliert).....	93
Bild 5.5-5: Absolutwerte für die Abweichungen [%] bezogen auf den maximalen Fugenschub und die maximale Biegespannung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit [MPa] (Abszisse logarithmisch skaliert).....	93
Bild 5.5-6: In ihre Anteile aufgegliederte Schubspannungsverläufe am Verbundquerschnitt des Beispielträgers für verschiedene Fugensteifigkeiten [MPa]. Vergleich der Lösung gemäß der Schubanalogie mit dem Referenzwert (γ -Verfahren, gestrichelt).....	94
Bild 5.5-7: Absolutwerte der Abweichungen [%] für den maximalen Fugenschub in Abhängigkeit vom Verhältnis V_{EI} [-]	96
Bild 5.5-8: Absolutwerte der Abweichungen [%] für die maximale Biegespannung und die maximale Durchbiegung in Abhängigkeit vom Verhältnis V_{EI} [-]	96
Bild 5.5-9: Statisches System und Querschnitt des Beispiels „vierteiliger verdübelter Balken“.....	98
Bild 5.5-10: Schnittgrößen am ideellen System für das Beispiel „verdübelter Balken“	99
Bild 5.5-11: Ausschnitt, Erfassung eines zweiteiligen Verbundträgers mit dem kombinierten Fachwerkmodell (Quelle [29])	99
Bild 5.5-12: Vergleich der Ergebnisse für die Normalspannungsverteilung am verdübelten Balken in Feldmitte. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.	100

Bild 5.5-13: Vergleich der Ergebnisse für die Schubspannungsverteilung am verdübelten Balken im Auflagerbereich. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.....	100
Bild 5.5-14: Programmausdruck der Ergebnisse gemäß dem kombinierten Modell für den vierteiligen verdübelten Balken bei einer Last von $P=1000$ kN	101
Bild 5.5-15: Vergleich der Spannungsverteilungen an den bemessungsrelevanten Stellen. Gestrichelt: Werte gemäß dem kombinierten Modell. Werte in [MPa] pro [kN] Last.	103
Bild 5.5-16: Vergleich der Maximalwerte für die Normal- und Schubspannungen [MPa] (oben); darunter: Abweichungen bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit (Abszisse, logarithmisch skaliert)	104
Bild 5.5-17: Vergleich der Maximalwerte für den Schubfluss in den Verbundfugen [MPa] und die Durchbiegung w [m] (oben); darunter: Abweichungen bezogen auf den Referenzwert [%]. Darstellung in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit (Abszisse, logarithmisch skaliert).....	104
Bild 5.5-18: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 1:10; 10:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	105
Bild 5.5-19: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 1:10; 10:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	105
Bild 5.5-20: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis V der Fugensteifigkeiten (Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.....	106
Bild 5.5-21: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge.....	106
Bild 5.5-22: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 10:1; 100:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	107
Bild 5.5-23: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=c_{23}/c_{12}=\{1:100; 10:1; 100:1\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	107
Bild 5.5-24: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.....	108
Bild 5.5-25: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge.....	108
Bild 5.5-26: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=\{2,10,1000\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	109
Bild 5.5-27: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=\{2; 10; 100\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	109
Bild 5.5-28: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.....	109
Bild 5.5-29: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge.....	110
Bild 5.5-30: Normalspannungsverläufe (in Feldmitte) am verdübelten Balken für $V=\{2, 10, 100\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	110
Bild 5.5-31: Schubspannungsverläufe (Auflagerbereich) am verdübelten Balken für $V=\{2; 10; 100\}$ (bei einer Last von $P=1000$ kN)	111
Bild 5.5-32: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximalen Schub- und Normalspannungen.....	111

Bild 5.5-33: Abweichung [%] (Ordinate) der Schubanalogie zum Fachwerkmodell in Abhängigkeit vom Verhältnis der Fugensteifigkeiten (V , Abszisse, logarithmisch skaliert) in Bezug auf die maximale Durchbiegung w und den maximalen Schubfluss in der Verbundfuge.....	111
Bild 6.1-1: Träger für die Beispielrechnung, Schnitt für die Spannungsanalyse gestrichelt	115
Bild 6.1-2: Ergebnisse einer Scheibenrechnung des Beispielbalkens für ausgewählte Verhältnisse $V_{E,G}$: Normalspannung (links), Schubspannung (rechts), verschobene Struktur im betrachteten Ausschnitt. *An den Querschnittsrändern muss die Schubspannung den Wert Null annehmen. Die davon abweichende Ausgabe rührt von den Eigenheiten des programminternen Nachlaufes zur Spannungsermittlung her.	116
Bild 6.2-1: Holzstück unter Rollschubbelastung; links Schubspannung, rechts zugehörige Verzerrung des Elementes	117
Bild 6.2-2: Holzelement (Darstellung in der r-t-Ebene) unter Rollschub; Rückführung der Schubspannung auf Hauptspannungen durch Drehung des Bezugssystems	117
Bild 6.2-3: Brettspertholzplatte unter Last mit Darstellung der Schubbelastung im Ausschnitt. Die an der freien Kante fehlende Schubspannung ist gestrichelt eingezeichnet.	118
Bild 6.2-4: Gedankenmodell zur Veranschaulichung des Entstehens von Normalspannungen in den Querlagen infolge einer Schubbelastung.....	119
Bild 6.2-5: Rechnerische Untersuchung am „Schubblockmodell“; links System“ mit Belastung, rechts vektorielle Darstellung der Hauptspannungen am rechten Rand; $\leftrightarrow$ Zug, $>$ < Druck.	119
Bild 6.2-6: Rollschubversagen, Ausschnitt aus einer Versuchsanordnung im Bruchzustand. Quelle [8] (Ausschnittvergrößerung).....	120
Bild 6.3-1: Dreiachsiger Spannungszustand am Holzelement, Bezeichnungen.....	121
Bild 6.3-2: Schematische Darstellung der auftretenden Spannungen an einer Kragplatte (Dreischichtplatte) bei unsymmetrischer Belastung.....	121
Bild 6.3-3: Darstellung der Festigkeitsfunktion auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] gemäß der linearen Interaktion für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa]	123
Bild 6.3-4: Darstellung der Festigkeitsfunktion auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] gemäß der quadratischen Interaktion für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa].....	123
Bild 6.3-5: Darstellung der Festigkeitsfunktion gemäß (6-5) auf Basis charakteristischer Werte nach [N4] für Druck- und Schubbeanspruchungen in der ℓ -t-Ebene, Werte in [MPa]... ..	123
Bild 6.3-6: Vergleich der Ansätze für den Anwendungsfall „Druck unter einem Winkel zur Faser“. Bestimmung der charakteristischen Festigkeit $f_{c,\alpha,k}$ auf Basis der charakteristischen Festigkeiten für NH CD24 nach [N4] ($f_{c,0,k}=21$ MPa, $f_{c,90,k}=2,2$ MPa, $f_{v,k}=2,7$ MPa).....	124
Bild 6.4-1: Schubfluss infolge Torsionsbeanspruchung am Sandwichelement (Schubschicht ohne Eigentragwirkung) (Quelle: [86])	125
Bild 6.4-2: FE-Modell mit Volumenelementen zur Erfassung der Torsion eines nachgiebig verbundenen Schichtbalkens, perspektivische Darstellung der verformten Struktur. ...	126
Bild 6.4-3: Dreiteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GIt' zur Torsionssteifigkeit GIt bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von aussen zur Querschnittsmitte). * Die geringfügige Überschreitung des maximal möglichen Verhältniswertes 1 wird auf numerische Probleme wie z.B. Rundungsungenauigkeiten zurückgeführt	127
Bild 6.4-4: Vierteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GIt' zur Torsionssteifigkeit GIt bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von aussen zur Querschnittsmitte).	127
Bild 6.4-5: Fünfteiliger Verbundquerschnitt: Verhältnis von effektiver Torsionssteifigkeit GIt' zur Torsionssteifigkeit GIt bei starrem Verbund in Abhängigkeit von der Anzahl der Verbindungsreihen (Reduzierung von außen zur Querschnittsmitte).....	127

Bild 6.4-6: Torsion am Schichtbalken, für den starren Verbund, drei mittige Verbindungsmittelreihen und eine Verbindungsmittelreihe (von oben nach unten); jeweils links: Betrag der Schubspannung in Querrichtung als Füllfläche, rechts: Orientierung der Hauptspannung.....	129
Bild 7.1-1: Querschnitt und System des Brettstapelbogens [cm].....	131
Bild 7.1-2: Ausschnitt, Biegung des Brettstapelbogens durch ein Randmoment, Erfassung mit der Schubanalogie	133
Bild 7.1-3: Ermittlung des Spannungszustandes „verleimter Bogen nach dem Lösen der Fixierung“ (1+2).....	134
Bild 7.1-4: Querkraftverlauf [kN] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B	135
Bild 7.1-5: Biegemomentverlauf [kNm] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B.....	136
Bild 7.1-6: Schubspannungsverlauf [MPa] für den verschraubten Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte	137
Bild 7.1-7: Normalspannungsverlauf [MPa] für den verschraubten Bogen im Lastfall „Aufatmen“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte	138
Bild 7.1-8: Programmausdruck: Verformungsfigur und Knotenverschiebungen [mm] des verschraubten Bogens, Lastfall „Aufatmen“, Darstellung der Ebene B≡Gruppe 2	139
Bild 7.1-9: Programmausdruck: Querkraftverlauf [kN] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B	140
Bild 7.1-10: Programmausdruck: Biegemomentverlauf [kNm] am ideellen System, Lastfall „Aufatmen“; Gruppe 1 ≡ Ebene A, Gruppe 2 ≡ Ebene B.....	141
Bild 7.1-11: Programmausdruck: Verformungsfigur [mm] und Knotenverschiebungen des verschraubten Bogens, Lastfall „Aufatmen“; Darstellung der Gruppe 2 ≡ Ebene B.	142
Bild 7.1-12: Schubspannungsverlauf [MPa] am Trägerende für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte.....	143
Bild 7.1-13: Schubspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte.....	143
Bild 7.1-14: Normalspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte.....	144
Bild 7.1-15: Normalspannungsverlauf [MPa] in Trägermitte für den verschraubten, mit Lagermessdosen gehaltenen Bogen im Lastfall „Rückstellmoment am nachgiebig verbundenen Querschnitt“+ „Biegen der Bretter“; Abbildung der oberen Querschnittshälfte	144
Bild 7.2-1: Zylinderförmige Holzschale in der Ansicht nach [76].....	145
Bild 7.2-2: Zylinderförmige Holzschale im Schnitt nach [76]; rechts: Belastung.....	145
Bild 7.2-3: Ideelles System der Zylinderschale im Drei-Ebenen-Modell. Struktur in der Perspektive, Kopplungen nicht dargestellt.....	146
Bild 7.2-4: Trägerrostsystem der Schale, Abbildung der Ebene A in der Perspektive. Rechts: ergänzter Programmausdruck; Detail Anschluss der Schale an den Randträger im Auflagerbereich mit Andeutung des Randträgerquerschnitts (Darstellung des Details im Schnitt).	148
Bild 7.2-5: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der geklebten Schale und in Mitte der Randträger (Messwerte Randträger: „west edge beam“). Vergleichswerte aus [76] bzw. [62].....	149
Bild 7.2-6: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der geklebten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=11,23 \text{ kN/m}^2$) in der Perspektive.....	149
Bild 7.2-7: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der geklebten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=11,23 \text{ kN/m}^2$) in der Ansicht (oben) in im Grundriss (unten).....	150

Bild 7.2-8: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.	150
Bild 7.2-9: Querschnitt in Schalenmitte, Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.	150
Bild 7.2-10: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.	150
Bild 7.2-11: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] und Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.	151
Bild 7.2-12: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$.	151
Bild 7.2-13: Normalspannungen [MPa] in Querrichtung (mittlerer Schnitt) . Links: Am Rand; rechts: in der Mitte.	152
Bild 7.2-14: Schubspannungen [MPa] am Längsschnitt. Links: Schnitt 2 cm vor dem Randträger; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor dem Randträger.	152
Bild 7.2-15: Normalspannungen [MPa] in Längsrichtung. Links: im Bereich der Querscheibe; rechts: in Schalenmitte.	153
Bild 7.2-16: Schubspannungen [MPa] am Schnitt quer zur Längsrichtung. Links: Schnitt 2 cm vor der der Endquerscheibe; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor der Endquerscheibe.	153
Bild 7.2-17: Querkräfte [kN] der quer orientierten Roststäbe in Schalenebene bei einer Last von $p=11,23 \text{ kN/m}^2$. Darstellung in der Draufsicht in Form eines in Graustufen abgestuften Linienabtrags mit begrenztem Maximalabtrag.	154
Bild 7.2-18: Angenommenes Nagelbild bezüglich der Vernagelung der einzelnen Lagen. Darstellung als Ausschnitt im Grundriss.	155
Bild 7.2-19: Vergleich der vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der genagelten Schale und in Mitte der Randträger (Messwerte nach [62], betrachteter Randträger: „west edge beam“).	156
Bild 7.2-20: Vergleich der Verhältnisswerte V für die Durchsenkung im Schalenzentrum zur Durchsenkung in Mitte der Randträger.	157
Bild 7.2-21: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der genagelten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=3,81 \text{ kN/m}^2$) in der Perspektive.	157
Bild 7.2-22: Verschobene Struktur (Darstellung überhöht) der genagelten Schale bei Erreichen der Traglast ($p=3,81 \text{ kN/m}^2$) in der Ansicht (oben) in im Grundriss (unten).	158
Bild 7.2-23: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.	158
Bild 7.2-24: Querschnitt in Schalenmitte, Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.	158
Bild 7.2-25: Querschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.	158
Bild 7.2-26: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Biegemomente [kNm/Roststab] und Normalkraft [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.	159
Bild 7.2-27: Längsschnitt in Schalenmitte, ideale Querkräfte [kN/Roststab] bei einer Last von $p=3,81 \text{ kN/m}^2$.	159
Bild 7.2-28: Normalspannungen [MPa] in Querrichtung (mittlerer Schnitt). Links: Am Rand; rechts: in der Mitte.	160
Bild 7.2-29: Schubspannungen [MPa] am Längsschnitt. Links: Schnitt 2 cm vor dem Randträger; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor dem Randträger.	160
Bild 7.2-30: Normalspannungen [MPa] in Längsrichtung. Links: im Bereich der Querscheibe; rechts: in Schalenmitte.	161
Bild 7.2-31: Schubspannungen [MPa] am Schnitt quer zur Längsrichtung. Links: Schnitt 2 cm vor der der Endquerscheibe; rechts: Schnitt ca. 6 cm vor der Endquerscheibe.	161
Bild 7.2-32: Querkräfte [kN] der quer orientierten Roststäbe in Schalenebene. Darstellung in der Draufsicht in Form eines in Graustufen abgestuften Linienabtrags mit begrenztem Maximalabtrag.	162

ANHANG A

Ausdrucke ausgewählter „Maple worksheets“

Anhang A-1

„Maple worksheet“ zu Kapitel 4.5.1

Lösung der DGL für einen zweiteiligen gekoppelten Einfeldträger mit der Koppelkraft $p_k(x)$

Lastfall "gegenseitig orientierte Randmomente "

> **restart;**

Koppelkraft

> **pk:=x->Par1*exp(-(alpha^(1/2))*x)+Par2*exp((alpha^(1/2))*x);**

Par1:=350: Par2:=6e-5: alpha:=4:

> **alpha:=(BA+BB)*S/(BA*BB);**

$$p_k := x \rightarrow \text{Par1} e^{(-\sqrt{\alpha} x)} + \text{Par2} e^{(\sqrt{\alpha} x)}$$

$$\alpha := \frac{(BA + BB) S}{BA BB}$$

Ebene A, DGL (nur Biegeanteil)

> **pA:=x->pk(x);**

> **DGA := diff(yA(x), x\$4) = -pk(x)/BA;**

$$p_A := p_k$$

$$DGA := \frac{\partial^4}{\partial x^4} y_A(x) = - \frac{\text{Par1} e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} + \text{Par2} e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)}}{BA}$$

Ebene B, DGL Biegeanteil

> **pB:=x->-pk(x);**

> **DGMB := diff(yMB(x), x\$4) = pk(x)/BB;**

$$p_B := x \rightarrow -p_k(x)$$

$$DGMB := \frac{\partial^4}{\partial x^4} y_{MB}(x) = \frac{\text{Par1} e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} + \text{Par2} e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)}}{BB}$$

Ebene B, DGL Schubanteil

> **DGQB := diff(yQB(x), x\$2) = -pk(x)/S;**

$$DGQB := \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_{QB}(x) = - \frac{\text{Par1} e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} + \text{Par2} e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)}}{S}$$

Gleichungssystem

> **sys1 := [DGQB, DGMB, DGA];**

> **dsolve(sys1):**

> **assign(%):**

> **yQB:=unapply(yQB(x), x);**

> **yMB:=unapply(yMB(x), x);**

> **yB:=yQB+yMB:**

> **yB:=unapply(yB(x), x):**

> **yA:=unapply(yA(x), x);**

Anhang A-1

$$\begin{aligned}
 sysI &:= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} y_{QB}(x) = - \frac{Par1 \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)} + Par2 \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{S}, \right. \\
 \frac{\partial^4}{\partial x^4} y_{MB}(x) &= \frac{Par1 \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)} + Par2 \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{BB}, \\
 \frac{\partial^4}{\partial x^4} y_A(x) &= - \frac{Par1 \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)} + Par2 \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{BA} \left. \right] \\
 y_{QB} &:= x \rightarrow \left(-Par1 \, BA \, BB \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)} - Par2 \, BA \, BB \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)} \right. \\
 &\quad \left. + _C1 \, x \, S^2 \, BA + _C1 \, x \, S^2 \, BB + _C2 \, S^2 \, BA + _C2 \, S^2 \, BB \right) / (S^2 (BA + BB)) \\
 y_{MB} &:= x \rightarrow \frac{BB \, Par1 \, BA^2 \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{(BA + BB)^2 \, S^2} + \frac{BB \, Par2 \, BA^2 \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{(BA + BB)^2 \, S^2} + \frac{1}{6} _C3 \, x^3 \\
 &\quad + \frac{1}{2} _C4 \, x^2 + _C5 \, x + _C6 \\
 y_A &:= x \rightarrow - \frac{BA \, Par1 \, BB^2 \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{(BA + BB)^2 \, S^2} - \frac{BA \, Par2 \, BB^2 \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \, BB}} x\right)}}{(BA + BB)^2 \, S^2} + \frac{1}{6} _C7 \, x^3 \\
 &\quad + \frac{1}{2} _C8 \, x^2 + _C9 \, x + _C10
 \end{aligned}$$

Beide Anteile

> **yB:=yQB+yMB:**

> **yB:=unapply(yB(x), x):**

Lösung für die Randbedingungen "Einfeldträger"

> **eq1:=yQB(0)=0:**

> **eq2:=yMB(0)=0:**

> **eq3:=(D@@2)(yMB)(0)-MR/BB=0: #Randmoment bei x=0**

> **eq4:=yQB(L)=0:**

> **eq5:=yMB(L)=0:**

> **eq6:=(D@@2)(yMB)(L)-MR/BB=0: #Randmoment bei x=L**

> **eq7:=yA(0)=0:**

> **eq8:=(D@@2)(yA)(0)+MR/BA=0:**

> **eq9:=yA(L)=0:**

> **eq10:=(D@@2)(yA)(L)+MR/BA=0:**

> **eq11:=yA(x)-yB(x)=0: #wA=wB**

> **eq12:=pk(0)-pk(L)=0: #Symmetrie von pk**

>

solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10,eq11,eq12},{_C1,_C2,_C3,_C4,_C5,_C6,_C7,_C8,_C9,_C10,Par1,Par2}):

simplify(%):

> **assign(%);**

Anhang A-1

```
> KC1:=_C1; KC2:=_C2; KC3:=_C3; KC4:=_C4; KC5:=_C5; KC6:=_C6;
KC7:=_C7; KC8:=_C8;
> KC9:=_C9; KC10:=_C10; KPar1:=Par1; KPar2:=simplify(Par2);
```

$$KC1 := 0$$

$$KC2 := \frac{MR}{S}$$

$$KC3 := 0$$

$$KC4 := 0$$

$$KC5 := 0$$

$$KC6 := -\frac{BA \, MR}{S (BA + BB)}$$

$$KC7 := 0$$

$$KC8 := 0$$

$$KC9 := 0$$

$$KC10 := \frac{BB \, MR}{S (BA + BB)}$$

$$KPar1 := \frac{MR \, S (BA + BB) \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)}}{BA \, BB \left(e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1\right)}$$

$$KPar2 := \frac{MR \, S (BA + BB)}{BA \, BB \left(e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1\right)}$$

```
> wA:=yB(x);
```

```
> wB:=yA(x);
```

$$wA := \left(-\frac{MR \, S (BA + BB) \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} x\right)}}{e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1} - \frac{MR \, S (BA + BB) \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} x\right)}}{e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1} + MR \, S \, BA + MR \, S \, BB \right) / (S^2 (BA + BB))$$

$$+ \frac{MR \, BA \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} \, e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} x\right)}}{S (BA + BB) \left(e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1\right)} + \frac{MR \, BA \, e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} x\right)}}{S (BA + BB) \left(e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA \, BB}} L\right)} + 1\right)}$$

$$- \frac{BA \, MR}{S (BA + BB)}$$

Anhang A-1

$$w_B := - \frac{MR \cdot BB \cdot e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} L\right)} e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} x\right)} - \frac{MR \cdot BB \cdot e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} x\right)}}{S(BA+BB) \left(e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} L\right)} + 1\right)} - \frac{MR \cdot BB \cdot e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} L\right)} + 1}{S(BA+BB)} + \frac{BB \cdot MR}{S(BA+BB)}$$

Schnittgrößenverläufe

> QB:=simplify(-diff(yMB(x)*BB,x\$3)):

> MB:=simplify(-diff(yMB(x)*BB,x\$2));

$$MB := - \frac{\left(e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} (-L+x)\right)} + e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} x\right)} \right) MR}{e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA \cdot BB}} L\right)} + 1}$$

> QA:=-diff(yA(x)*BA,x\$3): QA:=unapply(QA(x),x):

> MA:=-diff(yA(x)*BA,x\$2): MA:=unapply(MA(x),x):

Grafische Ausgabe der Zustandslinien (Beispielhaft)

> L:=10: BB:=5.268: BA:=1.917: MR:=-1: S:=2.803: #Werte
Beispiel HBV

Ebene B

> macro(andygreen=COLOR(RGB, 0.6, 0.85, 0.7));

> with(plots):

> PpB:=plot(pB(x), x=0..L, title='pB', linestyle=1, colour=andygreen, axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):

> PwB:=plot(yB(x), x=0..L, colour=magenta, linestyle=1, axesfont=[HELVETICA, 1]):

> PwQB:=plot(yQB(x), x=0..L, colour=andygreen, linestyle=1):

> PwMB:=plot(yMB(x), x=0..L, colour=andygreen, linestyle=1):

> PQB:=plot(QB(x), x=0..L, linestyle=1, colour=andygreen, axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):

> PMB:=plot(MB(x), x=0..L, colour=andygreen, axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):

Ebene A

> PpA:=plot(pA(x), x=0..L, title='Koppellasten', linestyle=4, colour=blue, axesfont=[HELVETICA, 1]):

> PwA:=plot(yA(x), x=0..L, title='Biegelinie', colour=black, linestyle=1, axesfont=[HELVETICA, 1]):

> PQA:=plot(QA(x), x=0..L, linestyle=4, title='Querkräfte', colour=blue, axesfont=[HELVETICA, 1]):

> PMA:=plot(MA(x), x=0..L, linestyle=4, title='Biegemomente', colour=blue, axesfont=[HELVETICA, 1]):

Grafik beide Ebenen

> PQ:=plot(Q(x), x=0..L, colour=black, linestyle=2):

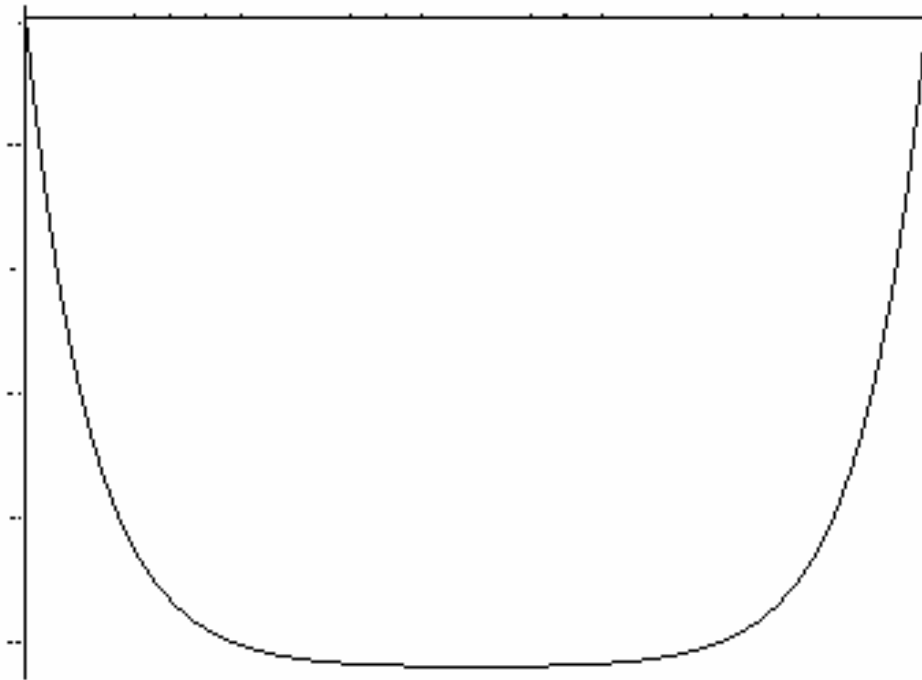
> PM:=plot(M(x), x=0..L, colour=black, linestyle=2):

> display([PwA]);

Anhang A-1

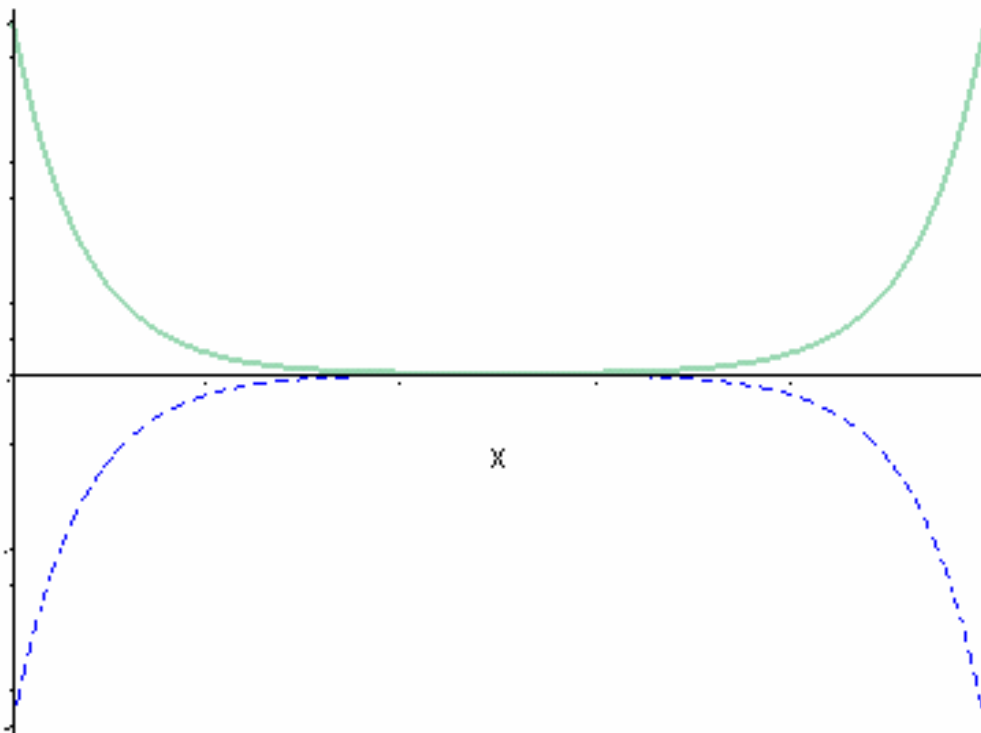
Biegelinie

x



```
> display([PpA, PpB]);
```

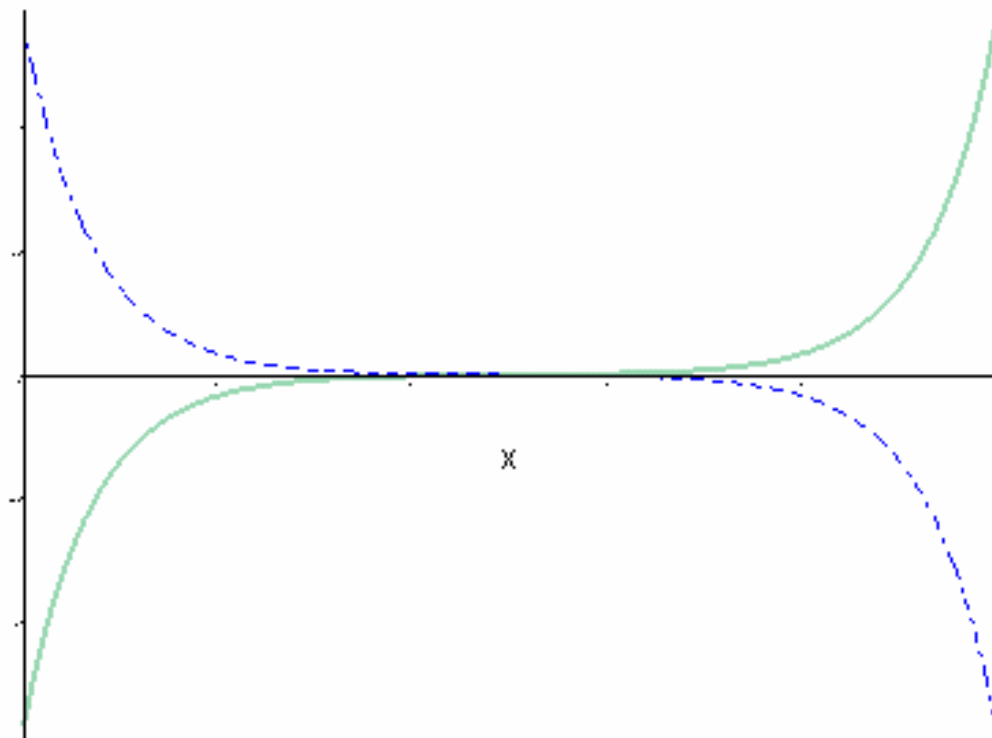
Koppellasten



```
> display([PQA, PQB]);
```

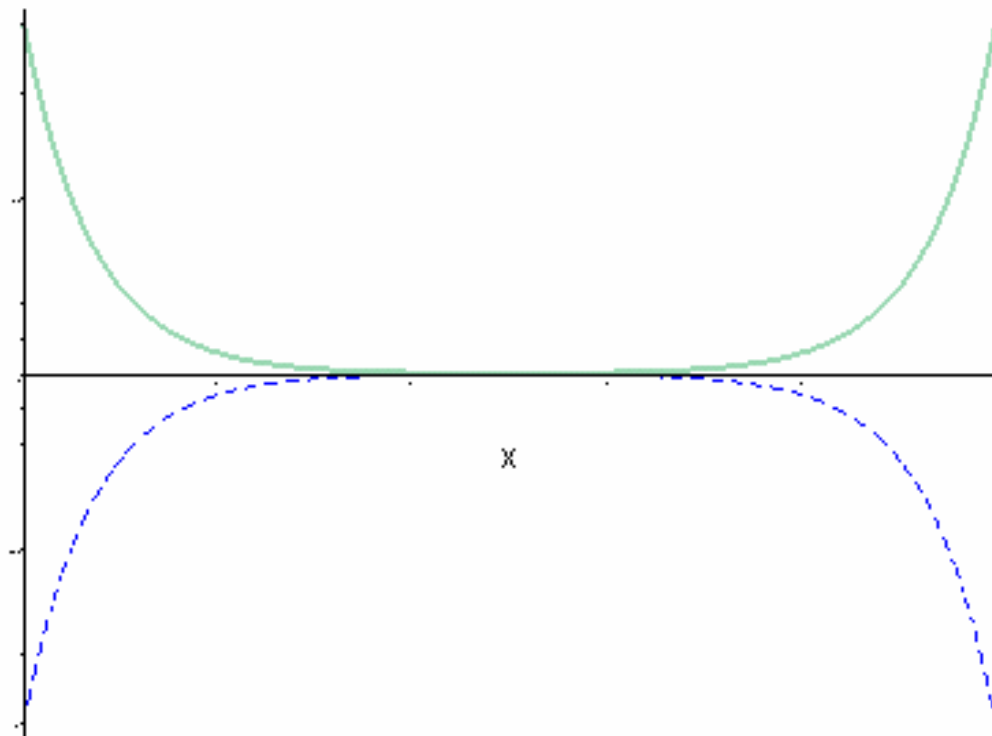
Anhang A-1

Querkräfte



```
> display([PMA, PMB]);
```

Biegemomente



Anhang A-2

„Maple worksheet“ zu Kapitel 4.5.5

Lastfall "Einzellast in Feldmitte" unter Ausnutzung der Symmetrie

> **restart;**

Koppelkraft

> **pk:=x->Par1*exp(-(alpha^(1/2))*x)+Par2*exp((alpha^(1/2))*x);**

> **alpha:=(BA+BB)*S/(BA*BB);**

> **pA:=-pk(x): pA:=unapply(pA, x);**

> **pB:=pk(x): pB:=unapply(pB, x);**

$$pk := x \rightarrow Par1 e^{(-\sqrt{\alpha} x)} + Par2 e^{(\sqrt{\alpha} x)}$$

$$\alpha := \frac{(BA + BB) S}{BA BB}$$

$$pA := x \rightarrow -Par1 e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)} - Par2 e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)}$$

$$pB := x \rightarrow Par1 e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)} + Par2 e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)}$$

Ebene A DGL (nur Biegeanteil)

> **QA:=int(-pA, 0..x)+QA0:**

> **QA:=unapply(QA, x):**

> **MA:=int(QA, 0..x)+MA0:**

> **MA:=unapply(MA, x):**

> **phiA:=int(-MA, 0..x)/BA+phiA0:**

> **phiA:=unapply(phiA, x):**

> **wA:=int(phiA, 0..x)+wA0:**

> **wA:=unapply(wA, x);**

$$\begin{aligned} wA := x \rightarrow & -\frac{1}{6} \left(-6 \phi A0 x S^2 BA^3 + 6 BA^2 Par2 BB^2 e^{\left(\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)} \right. \\ & + BA^2 Par1 x^3 S BB \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} - BA^2 Par2 x^3 S BB \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} \\ & - 3 S BA^2 Par1 x^2 BB - 3 S BA^2 Par2 x^2 BB + QA0 x^3 S^2 BA^2 \\ & - 12 \phi A0 x S^2 BA^2 BB + 3 MA0 x^2 S^2 BA^2 + 6 BA^2 Par1 BB^2 e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} x\right)} \\ & - 6 BA^2 Par2 x BB^2 \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} + 6 BA^2 Par1 x BB^2 \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} \\ & - 6 Par2 BA^2 BB^2 - 6 Par1 BA^2 BB^2 - BA Par2 x^3 S BB^2 \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} \\ & + BA Par1 x^3 S BB^2 \sqrt{\frac{(BA + BB) S}{BA BB}} - 3 S BA Par1 x^2 BB^2 - 3 S BA Par2 x^2 BB^2 \\ & \left. - 6 \phi A0 x S^2 BA BB^2 + 2 QA0 x^3 S^2 BA BB + 6 MA0 x^2 S^2 BA BB \right. \\ & \left. + 3 MA0 x^2 S^2 BB^2 + QA0 x^3 S^2 BB^2 \right) / (S^2 (BA + BB)^2 BA) + wA0 \end{aligned}$$

Anhang A-2

Ebene B DGL (Biegeteil)

```

> QB:=int(-pB, 0..x)+QB0:
> QB:=unapply(QB, x):
> MB:=int(QB, 0..x)+MB0:
> MB:=unapply(MB, x):
> phiB:=int(-MB, 0..x)/BB+phiB0:
> phiB:=unapply(phiB, x):
> wMB:=int(phiB, 0..x)+wMB0:
> wMB:=unapply(wMB, x);

```

$$\begin{aligned}
 wMB := x \rightarrow & -\frac{1}{6} \left(BA^2 Par2 x^3 S BB \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} + 3 S BA^2 Par1 x^2 BB \right. \\
 & - 6 BA^2 Par2 BB^2 e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} + 6 Par2 BA^2 BB^2 \\
 & - 6 BA^2 Par1 BB^2 e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} - BA^2 Par1 x^3 S BB \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} \\
 & - 6 BA^2 Par1 x BB^2 \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} + 6 Par1 BA^2 BB^2 + 3 S BA^2 Par2 x^2 BB \\
 & + 3 MB0 x^2 S^2 BA^2 + QB0 x^3 S^2 BA^2 - 6 phiB0 x S^2 BA^2 BB \\
 & + 6 BA^2 Par2 x BB^2 \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} - BA Par1 x^3 S BB^2 \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} \\
 & + BA Par2 x^3 S BB^2 \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} + 6 MB0 x^2 S^2 BA BB + 3 S BA Par1 x^2 BB^2 \\
 & + 3 S BA Par2 x^2 BB^2 - 12 phiB0 x S^2 BB^2 BA + 2 QB0 x^3 S^2 BA BB \\
 & \left. + 3 MB0 x^2 S^2 BB^2 + QB0 x^3 S^2 BB^2 - 6 phiB0 x S^2 BB^3 \right) / (S^2 (BA+BB)^2 BB) \\
 & + wMB0
 \end{aligned}$$

Ebene B DGL (Schubanteil)

```

> QB:=int(-pk, 0..x)+QB0:
> QB:=unapply(QB, x):
> wQB:=int(QB, 0..x)/S+wQB0:
> wQB:=unapply(wQB, x);

```

$$\begin{aligned}
 wQB := x \rightarrow & - \left(BA Par1 e^{\left(-\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} BB + BA Par1 x \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} BB \right. \\
 & + BA Par2 e^{\left(\sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} x\right)} BB - Par1 BA BB - QB0 x S BA - Par2 BA BB \\
 & \left. - BA Par2 x \sqrt{\frac{(BA+BB)S}{BA BB}} BB - QB0 x S BB \right) / (S^2 (BA+BB)) + wQB0
 \end{aligned}$$

Ebene B beide Anteile

```

> wB:=wQB(x)+wMB(x):
> wB:=unapply(wB, x):

```

Summe beide Ebenen

```

> M:=MB(x)+MA(x): M:=unapply(M, x):

```


Anhang A-2

```

> Q:=QB(x)+QA(x): Q:=unapply(Q, x):
Randbedingungen
Bei x=0:
> eq1:=wMB(0)=0:
> eq2:=wQB(0)=0:
> eq3:=MB(0)=0:
> eq4:=wA(0)=0:
> eq5:=MA(0)=0:
Bei x=L:
> eq6:=QB(L)=0:      #Kein Schub ohne Relativverschiebung
> eq7:=phiB(L)=0:
> eq8:=Q(L)=P:
> eq9:=phiA(L)=0:
Allgemein:
> eq10:=wA(x)=wB(x):
> eq11:=pk(0)=0:      #maximaler Schubfluss am Freien
Ende

> #TestEbeneA:=solve({eq2, eq7, eq8, eq9, eq21, eq22}, {wA0,
MA0, phiA0, QA0, Par1, Par2});
> #TestEbeneB:=solve({eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq12, eq13,
eq21, eq22}, {wMB0, wQB0, MB0, phiB0,
> EbeneAB:=solve({eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, eq9,
eq10, eq11}, {wMB0, MB0, phiB0, QB0, wQB0, wA0, MA0, phiA0,
QA0, Par1, Par2}):

> assign(%);
> with(student):
> KwMB0:=wMB0; KMB0:= MB0; KphiB0:=powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB))
= Alpha, phiB0);
> KQB0:=powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, QB0);
KwQB0:=wQB0; KwA0:=wA0;
> KMA0:= MA0; KphiA0:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) =
Alpha, phiA0));
> KQA0:=powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, QA0);
> KPar1:=powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, Par1);
> KPar2:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, Par2));
>

```

$$KwMB0 := 0$$

$$KMB0 := 0$$

$$\begin{aligned}
 KphiB0 := & \frac{1}{2} P (L^2 S BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + L^2 S BA + L^2 S BB (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + L^2 S BB \\
 & - 2 BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 BB - 2 BA BB + 4 BA e^{(-\sqrt{A} L)} BB) / (\\
 & (BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BA + BB (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BB) S (BA + BB))
 \end{aligned}$$

Anhang A-2

$$KQB0 := \frac{BB P((e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + 1 - 2 e^{(-\sqrt{A} L)})}{BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BA + BB (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BB}$$

$$KwQB0 := 0$$

$$KwA0 := 0$$

$$KMA0 := 0$$

$$KphiA0 := \frac{1}{2} P(2 BB^2 + 2 BB^2 e^{(-2\sqrt{A} L)} - 4 BB^2 e^{(-\sqrt{A} L)} + L^2 S BB + L^2 S BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + L^2 S BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + L^2 S BA) / ((BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB) (BA + BB) S)$$

$$KQA0 := \frac{P(2 e^{(-\sqrt{A} L)} BB + BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BA)}{BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BA + BB (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BB}$$

$$KPar1 := - \frac{\sqrt{A} e^{(-\sqrt{A} L)} BB P}{BA (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BA + BB (e^{(-\sqrt{A} L)})^2 + BB}$$

$$KPar2 := \frac{\sqrt{A} e^{(-\sqrt{A} L)} BB P}{BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB}$$

```
> KpA:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, pA(x)));
> KpB:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, pB(x)));
> KQA:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, QA(x)));
> KQB:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, QB(x)));
> KMA:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, MA(x)));
> KMB:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, MB(x)));
> w:=simplify(powsubs(( (BA+BB)*S/(BA*BB)) = Alpha, wA(x)));
```

$$KpA := - \frac{\sqrt{A} e^{(-\sqrt{A} L)} BB P(-e^{(-\sqrt{A} x)} + e^{(\sqrt{A} x)})}{BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB}$$

$$KpB := \frac{\sqrt{A} e^{(-\sqrt{A} L)} BB P(-e^{(-\sqrt{A} x)} + e^{(\sqrt{A} x)})}{BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB}$$

$$KQA := \frac{P(e^{(-\sqrt{A} (L+x))} BB + e^{(-\sqrt{A} (L-x))} BB + BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA)}{BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB}$$

$$KQB := \frac{BB P(-e^{(-\sqrt{A} (L+x))} - e^{(-\sqrt{A} (L-x))} + e^{(-2\sqrt{A} L)} + 1)}{BA e^{(-2\sqrt{A} L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A} L)} + BB}$$

Anhang A-2

$$KMA := -P BA (\sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L+x))} BB^2 - \sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L-x))} BB^2 - x S BA e^{(-2\sqrt{A}L)} - x S BA - x S BB e^{(-2\sqrt{A}L)} - x S BB) / ((BA e^{(-2\sqrt{A}L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A}L)} + BB) S (BA + BB))$$

$$KMB := BB P (BA \sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L+x))} BB - BA \sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L-x))} BB + x S BA e^{(-2\sqrt{A}L)} + x S BA + x S BB e^{(-2\sqrt{A}L)} + x S BB) / ((BA e^{(-2\sqrt{A}L)} + BA + BB e^{(-2\sqrt{A}L)} + BB) S (BA + BB))$$

$$w := \frac{1}{6} (3 BA^2 S^2 x L^2 e^{(-2\sqrt{A}L)} + 3 BA^2 S^2 x L^2 - BA^2 x^3 S^2 e^{(-2\sqrt{A}L)} - x^3 S^2 BA^2 - 2 x^3 S^2 BA BB + 6 BA S^2 x L^2 BB e^{(-2\sqrt{A}L)} + 6 BA S^2 x L^2 BB + 6 S x BA BB^2 + 6 BA S x BB^2 e^{(-2\sqrt{A}L)} + 6 BA \sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L+x))} BB^3 - 2 BA x^3 S^2 e^{(-2\sqrt{A}L)} BB - 6 BA \sqrt{A} e^{(-\sqrt{A}(L-x))} BB^3 + 6 S x BB^3 + 6 S x BB^3 e^{(-2\sqrt{A}L)} - x^3 S^2 BB^2 + 3 S^2 x BB^2 L^2 + 3 S^2 x BB^2 L^2 e^{(-2\sqrt{A}L)} - x^3 S^2 BB^2 e^{(-2\sqrt{A}L)}) P / (S^2 (BA + BB)^3 (e^{(-2\sqrt{A}L)} + 1))$$

```
> QA2:=x->-QA ( (1-x/L) *L+L) :
> MA2:=x->MA ( (1-x/L) *L+L) :
> QB2:=x->-QB ( (1-x/L) *L+L) :
> MB2:=x->MB ( (1-x/L) *L+L) :
> wA2:=x->wA ( (1-x/L) *L+L) :
> pA2:=x->pA ( (1-x/L) *L+L) :
> pB2:=x->pB ( (1-x/L) *L+L) :
> Q2:=x->-Q ( (1-x/L) *L+L) :
> M2:=x->M ( (1-x/L) *L+L) :
```

Grafische Ausgabe der Zustandslinien (Beispielhaft)

```
> L:=10: BB:=5.268: BA:=1.917: P:=1/2: S:=2.803: #Werte
Beispiel HBV
```

Ebene B

```
> macro (andygreen=COLOR (RGB, 0.6, 0.85, 0.7));
> with (plots) :
> PpB:=plot (pB (x), x=0..L, title=`pB`, linestyle=1,
colour=andygreen, axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):
> PpB2:=plot (pB2 (x), x=L..L*2, title=`pB`, linestyle=1,
colour=andygreen, axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):
> PwB:=plot (yB (x), x=0..L, colour=magenta, linestyle=1,
axesfont=[HELVETICA, 1]):
> PwQB:=plot (yQB (x), x=0..L, colour=andygreen, linestyle=1):
> PwMB:=plot (yMB (x), x=0..L, colour=andygreen, linestyle=1):
> PQB:=plot (QB (x), x=0..L, linestyle=1, colour=andygreen,
axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):
> PQB2:=plot (QB2 (x), x=L..L*2, linestyle=1, colour=andygreen,
axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):
```

Anhang A-2

```
> PMB:=plot(MB(x), x=0..L, colour=andygreen,  
axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):  
> PMB2:=plot(MB2(x), x=L..L*2, colour=andygreen,  
axesfont=[HELVETICA, 1], thickness=2):
```

Ebene A

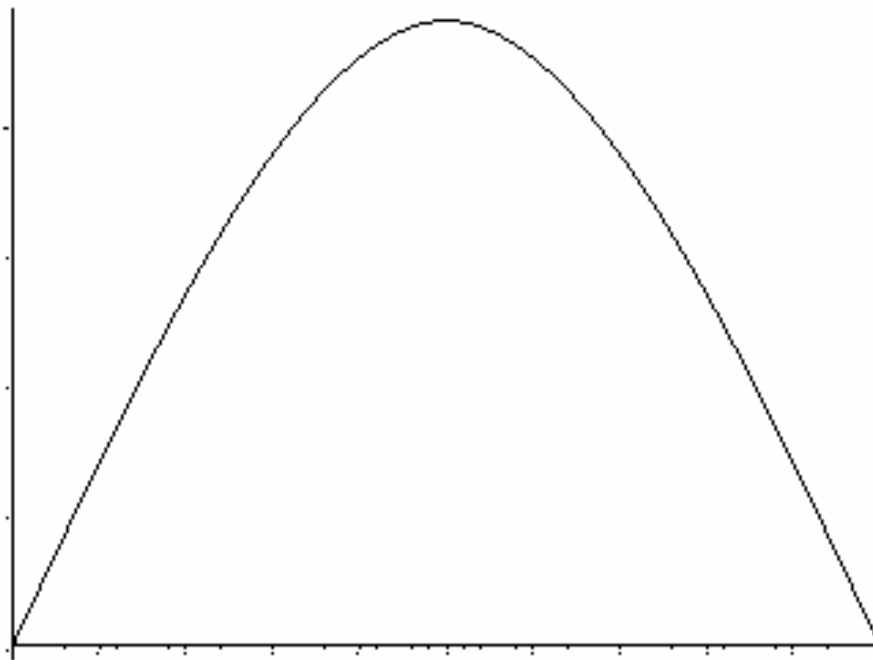
```
> PpA:=plot(pA(x), x=0..L, title=`Koppellasten`, linestyle=4,  
colour=blue, linestyle=4, axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PpA2:=plot(pA2(x), x=L..L*2, title=`Koppellasten`,  
linestyle=4, colour=blue, linestyle=4, axesfont=[HELVETICA,  
1]):  
> PwA:=plot(wA(x), x=0..L, title=`Biegelinie`, colour=black,  
linestyle=1, axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PwA2:=plot(wA2(x), x=L..L*2, title=`Biegelinie`,  
colour=black, linestyle=1, axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PQA:=plot(QA(x), x=0..L, linestyle=4, title=`Querkräfte`,  
colour=blue, linestyle=4, axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PQA2:=plot(QA2(x), x=L..L*2, linestyle=4,  
title=`Querkräfte`, colour=blue, linestyle=4,  
axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PMA:=plot(MA(x), x=0..L, linestyle=4, title=`Biegemomente`,  
colour=blue, linestyle=4, axesfont=[HELVETICA, 1]):  
> PMA2:=plot(MA2(x), x=L..2*L, linestyle=4,  
title=`Biegemomente`, colour=blue, linestyle=4,  
axesfont=[HELVETICA, 1]):
```

Grafik beide Ebenen

```
> PQ:=plot(Q(x), x=0..L, colour=black, linestyle=2):  
> PM:=plot(M(x), x=0..L, colour=black, linestyle=2):  
> PM2:=plot(M2(x), x=L..L*2, colour=black, linestyle=2):  
> PQ2:=plot(Q2(x), x=L..L*2, colour=black, linestyle=2):  
> display([PwA, PwA2]);
```

Anhang A-2

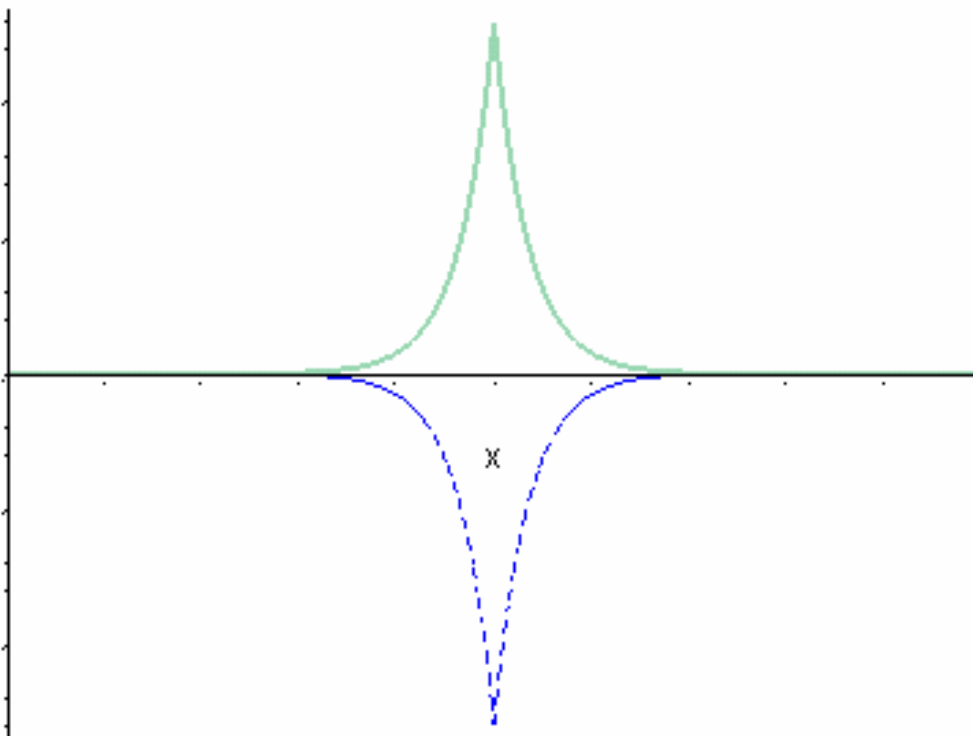
Biegelinie



x

```
> display([PpA, PpA2, PpB2, PpB]);
```

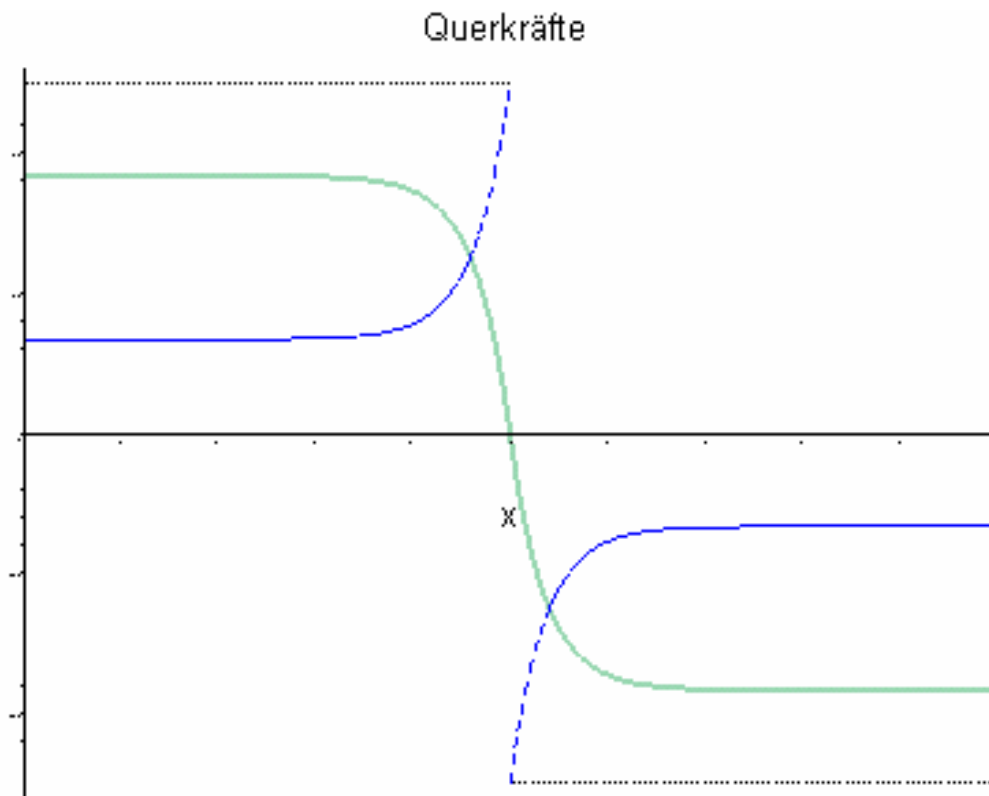
Koppellasten



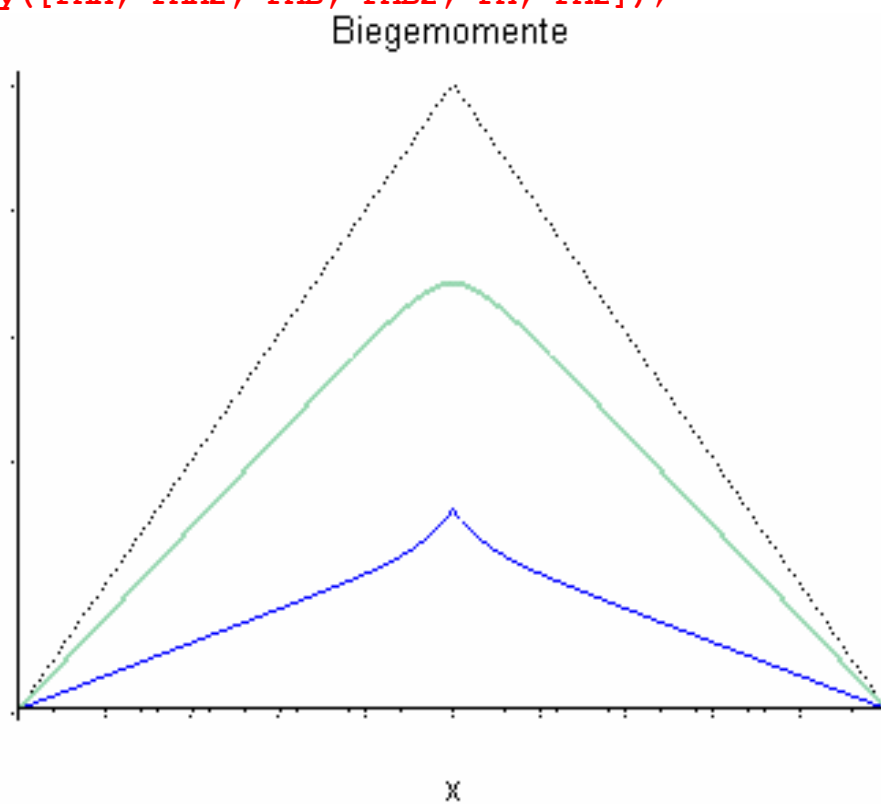
x

```
> display([PQA, PQB, PQA2, PQB2, PQ, PQ2]);
```

Anhang A-2



> display([PMA, PMA2, PMB, PMB2, PM, PM2]);



>

ANHANG B

Ausdrucke ausgewählter „Sofistik“ Eingabedateien

Anhang B-1

Eingabedateien zu Kapitel 4.6

Nachgiebig verbundener Stab, Drei-Ebenen-Modell:

```
+prog aqua urs:1
let#la 0.243e-3
let#lb 1.089e-3
let#S 0.384e-3
let#D 400e-3
mate nr e g gam
      1 1e3 1e3 0
quer nr mnr A Ay Az lt ly lz bez
      1 1 1e-3 1e3 1e3 10 #la #la TrägerA
      2 1 1e-3 #S #S 10 #lb #lb TrägerB
      3 1 #D 1e3 1e3 1e3 1e3 TrägerC
ende

+prog genf urs:2
syst raum
let#n 95
let#e 5/#n

knot (201 #n+201 1) x 0 y 0 z (0 #e)
knot (101 #n+101 1) kref (201 1) y -0.1 fix kpx
knot (101 #n+101 1) kref (201 1) fix kpy
knot (301 #n+301 1) kref (201 1) y 0.1 fix kpx
knot (301 #n+301 1) kref (201 1) fix kpy

knot nr fix
      201 ppxy
      #n+101,#n+201,#n+301 ppmz

stab (101 100+#n 1) (101 1) (102 1) qnr 1
stab (201 200+#n 1) (201 1) (202 1) qnr 2
fach (301 300+#n 1) (301 1) (302 1) qnr 3

ende

+prog ase urs:6
syst prob thii iter 20 $plf 999 fakv 1
trag ntra eg prim
      60 nein ja
If 1
kl 301 pz 1
ende
```

Nachgiebig verbundener Stab, Scheibenrechnung:

```
h1=0.09
t1=0.2
h2=$(h1)
t2=$(t1)
h3=0.02 $Mittelschicht
t3=$(t1)
$
L=5
$
+prog sofimshb urs:1
echo mat voll
mate nr 1 e 10000 g 1e5
mate nr 2 e 1 g 3.1736
syst raum gdiv 1000

Let#dr $(L)/30
let#dh2 $(h1)+$(h3)
gpt nr x z fix
$ Scheibe 1 = Stab1
101 0 0 -
102 $(L) 0 -
103 $(L) $(h1)/2 ppmx
104 $(L) $(h1) -
105 $(L)/2 $(h1) -
106 0 $(h1) -
107 0 $(h1)/2 -
```


Anhang B-1

```
$ Scheibe 2 = Stab2
201 0 0+#dh2 -
202 $(L) 0+#dh2 -
203 $(L) $(h2)/2+#dh2 -
204 $(L) $(h2)+#dh2 -
205 $(L)/2 $(h2)+#dh2 -
206 0 $(h2)+#dh2 -
207 0 $(h2)/2+#dh2 xp
```

\$ Scheibe 3 = Schubschicht

```
gln nr npa npe
$ Scheibe 1
1 101 102
(2 6 1) (102 1) (103 1)
7 107 101
$ Scheibe 2
21 201 202
(22 26 1) (202 1) (203 1)
27 207 201
$ Scheibe 3 = Schubschicht
31 106 201
32 202 104
```

```
gar nr 1 mnr 1 t $(t1)
garb aus 1,2,3,4,5,6,7
gar nr 2 mnr 1 t $(t2)
garb aus 21,22,23,24,25,26,27
gar nr 3 mnr 2 t $(t3)
garb aus 4,5,31,21,32
```

```
steu mesh 1
steu hmin 0.05
steu fein 0.01
```

ende

```
-prog ase urs:7 $ Primärlastfall
syst prob thii iter 30
lf 999
kl 5 pz 0.01
kl 3 pz -0.005
kl 7 pz -0.005
ende
```

```
-prog ase urs:6
syst prob thii iter 20 $plf 999 fakv 1
trag ntra eg prim
25 nein ja
```

```
let#h $(h1)+$(h2)
lf 1
llas nkb 101 dz $(h1) typ ppx pa 1/#h
llas nkb 201 dz $(h1) typ ppx pa 1/#h
llas nkb 102 dz $(h2) typ ppx pa -1/#h
llas nkb 202 dz $(h2) typ ppx pa -1/#h
```

```
$let#h $(h1)+$(h2)+$(h3)
$lf 1
$ llas nkb 101 dz #h typ ppx pa 1/#h
$ llas nkb 102 dz #h typ ppx pa -1/#h
```

ende

```
-prog ase urs:8
syst prob thii iter 20 $plf 999 fakv 1
```

```
let#h $(h1)+$(h2)
lf 1
llas nkb 101 dz #h1 typ ppx pa 1/#h
llas nkb 201 dz #h1 typ ppx pa 1/#h
llas nkb 102 dz #h1 typ ppx pa -1/#h
llas nkb 202 dz #h1 typ ppx pa -1/#h
ende
```

Anhang B-1

Einhüftiger Rahmen, Drei-Ebenen-Modell:

\$ Endgültige Version mit korrigierter Drucksteifigkeit

Kopf Berechnung Rahmen als Dreistabsystem

ns=40 \$Unterteilung Stütze

+prog aqua urs:1

let#la 0.243e-3

let#lb 1.089e-3

let#S 0.384e-3

let#D 360e-3

mate nr e g gam

1 1e3 1e3 0

quer nr mnr A Ay Az lt ly lz bez

1 1 1e-3 1e3 1e3 10 #la #la TrägerA

2 1 1e-3 #S #S 10 #lb #lb TrägerB

3 1 #D 1e3 1e3 1e3 1e3 1e3 TrägerC

4 1 1e3 1e3 1e3 1e3 1e3 1e3 Eckverbindung

ende

+prog genf urs:2

syst raum

let#abst 0.01

let#ls 5 \$Länge Stütze

let#n \$(ns) \$Unterteilung Stütze

let#e (-#ls/#n)

let#lr 7 \$Länge Riegel

let#nr \$(ns) \$Unterteilung Riegel

let#er #lr/#nr

\$Stütze

knot (301 #n+301 1) x 0 y 0 z (0 #e)

knot (101 #n+101 1) kref (301 1) y -#abst fix kpx

knot (101 #n+101 1) kref (301 1) fix kpy

knot (201 #n+201 1) kref (301 1) y -#abst fix kpx

knot (201 #n+201 1) kref (301 1) fix kpy

stab (101 100+#n 1) (101 1) (102 1) qnr 1

stab (201 200+#n 1) (201 1) (202 1) qnr 2

fach (301 300+#n 1) (301 1) (302 1) qnr 3

\$Riegel

knot (#n+301 #nr+#n+301 1) x 0 y (0 #er) z (#e*#n)

knot (#n+102 #nr+#n+102 1) kref (#n+301 1) z -#abst fix kpx

knot (#n+102 #nr+#n+102 1) kref (#n+301 1) fix kpz

knot (#n+202 #nr+#n+202 1) kref (#n+301 1) z -#abst fix kpx

knot (#n+202 #nr+#n+202 1) kref (#n+301 1) fix kpz

fach (301+#n 300+#n+#nr 1) (301+#n 1) (302+#n 1) qnr 3

Stab (101+#n 100+#n+#nr 1) (102+#n 1) (103+#n 1) qnr 1

Stab (201+#n 200+#n+#nr 1) (202+#n 1) (203+#n 1) qnr 2

\$Kopplung Ecke

Stab 1001 101+#n 102+#n qnr 1

Stab 2001 201+#n 202+#n qnr 2

\$ knot #n+102 kref #n+101 fix kmx; knot #n+102 kref #n+101 fix kmy; knot #n+102 kref #n+101 fix kmz

\$ knot #n+202 kref #n+201 fix kmx; knot #n+202 kref #n+201 fix kmy; knot #n+202 kref #n+201 fix kmz

\$Lager

knot (301 301+#n+#nr 1) fix px

\$ knot nr fix

\$ 101,201,301 ppmz

\$ #n+301 px

\$ #n+#nr+301 pxpz

\$ #n+#nr+202 my

\$ #n+#nr+102 my

knot nr fix

101,201,301 ppmz

#n+#nr+301 pxpz

#n+#nr+202 my

#n+#nr+102 my

ende

-prog ase urs:6

syst prob thii iter 50

echo knot

if 1

kl 301+\$(ns) pz 1

Anhang B-1

ende

```
+prog ase urs:7
syst prob thii iter 20
trag ntra eg prim
    60  nein ja
If 1
    kl 301+$(ns) pz 1
```

ende

Einhüftiger Rahmen, Scheibenrechnung:

\$ Rahmen als Scheibe endgültige Version, delthq=0, damit Achslängen passen

```
h1=0.09
t1=0.2
h2=$(h1)
t2=$(t1)
h3=0.02 $Mittelschicht
t3=$(t1)
delthq=0 $ (($h1)+$(h2)+$(h3))/2)
$
L=(7-$(delthq))
H=(5-$(delthq))
$
+prog sofinshb urs:1 M 50
echo mat voll
mate nr 1 e 10000 g 1e5
mate nr 2 e 1 g 3.1736
mate nr 3 e 1e10 g 1e5
syst raum gdiv 10000

Let#dr $(L)/30
let#dh2 $(h1)+$(h3)
gpt nr      x      z      fix
$ Scheibe 1 = Stab1 (Querrigel)
    101      0      0+0.002      -
    102      $(L)      0      -
    103      $(L)      $(h1)/2      -
    104      $(L)      $(h1)      xp
    105      $(L)/2      $(h1)      -
    106      0      $(h1)      -
    107      0      $(h1)/2      -
$ Scheibe 2
    201      0      0+#dh2      -
    202      $(L)      0+#dh2      xpmx
    203      $(L)      $(h2)/2+#dh2      -
    204      $(L)      $(h2)+#dh2      -
    205      $(L)/2      $(h2)+#dh2      -
    206      0      $(h2)+#dh2      -
    207      0      $(h2)/2+#dh2      -
$ Scheibe 4 = Eckknoten
    306      -$(h1)+$(h2)+$(h3))/2      $(h1)+$(h2)+$(h3))/2      py
gpt nr      z      x      fix
$ Scheibe 21 = Stab21 (Stütze)
    2101      0      0-0.002      -
    2102      -$(H)      0      -
    2103      -$(H)      -$(h1)/2      -
    2104      -$(H)      -$(h1)      -
    2105      -$(H)/2      -$(h1)      -
    2106      0      -$(h1)      -
    2107      0      -$(h1)/2      -
$ Scheibe 2 = Stab22 (Stütze Teilquerschnitt2)
    2201      0      -#dh2      -
    2202      -$(H)      -#dh2      ppmz
    2203      -$(H)      -$(h2)/2+#dh2      -
    2204      -$(H)      -$(h2)+#dh2      -
    2205      -$(H)/2      -$(h2)+#dh2      -
    2206      0      -$(h2)+#dh2      -
    2207      0      -$(h2)/2+#dh2      -

gln nr      npa      npe
$ Scheibe 1
    1      101      102
```

Anhang B-1

```

(2 6 1) (102 1) (103 1)
7      107      101
$ Scheibe 2
21      201      202
(22 26 1) (202 1) (203 1)
27      207      201
$ Scheibe 3 = Schubschicht
31      106      201
32      202      104
$ Scheibe 4 = Eckknoten
401      206      306
402      306      2206
403      2101      101
$ Scheibe 201
201      2101      2102
(202 206 1) (2102 1) (2103 1)
207      2107      2101
$ Scheibe 202
221      2201      2202
(222 226 1) (2202 1) (2203 1)
227      2207      2201
$ Scheibe 203 = Schubschicht2
231      2106      2201
232      2202      2104

$vertikaler Stab
gar nr 1 mnr 1 t $(t1)
garb aus 1,2,3,4,5,6,7
gar nr 2 mnr 1 t $(t2)
garb aus 21,22,23,24,25,26,27
gar nr 3 mnr 2 t $(t3)
garb aus 4,5,31,21,32
$horizontaler Stab
gar nr 21 mnr 1 t $(t1)
garb aus 201,202,203,204,205,206,207
gar nr 22 mnr 1 t $(t2)
garb aus 221,222,223,224,225,226,227
gar nr 23 mnr 2 t $(t3)
garb aus 204,205,231,221,232
$Eckknoten
gar nr 4 mnr 3 t $(t1)
garb aus 401,402,226,227,231,206,207,403,7,6,31,27,26

steu mesh 1
steu hmin 0.03
steu fein 0.01

ende

-prog ase m 100 urs:12
Kopf Traglastiteration
syst prob thii iter 50
trag ntra eg prim
25 nein ja

```

```

let#h ($(h1)+$(h2))
If 1
llas nkb 2101 dx -$(h1)-0.002 typ pzp pa -1/$(h-0.002)
llas nkb 2201 dx -$(h1) typ pzp pa -1/$(h)
llas nkb 2102 dx -$(h2) typ pzp pa 1/$(h)
llas nkb 2202 dx -$(h2) typ pzp pa 1/$(h)

ende

```

Anhang B-1

Durchschlagen ungestützte Sparrenkonstruktion:

```
-prog genf urs:1
holz 1 g 1e7
qb 1 0.2 0.2 mnr 1
syst raum
let#h 0.2
let#dz #h/10
let#dx 2.5/10
knot nr      x      y z
      (1 11 1) (0  #dx) 0 (0  -#dz)
      (12 21 1) (2.5+#dx #dx) 0 (-#h+#dz +#dz)
Stab nr      ka      ke      qnr ende
      (1 9 1) (1 1) (2 1) 1  -
      10      10      11  =  my
      (11 20 1) (11 1) (12 1) =  -
knot nr fix
      1 pp
      11 py
      21 ppmx
ende
```

```
-prog ase urs:3
syst prob thii iter 50
trag ntra 150 eg nein pro 1.285 fake 200
If 10
  kl 11 pz 1
ende
```

```
-prog ase urs:7
syst prob thii iter 50
trag ntra 150 eg nein fak1 1 dfak 1 pro 1
If 10
  kl 11 pz 1
ende
```

ENDE

Durchschlagen: ungestützte Sparrenkonstruktion, Fachwerkstäbe:

\$Testrechnung mit Fachwerkstäben

```
+prog aqua urs:1
let#la 1.333/2
let#lb 1.333/2
let#S 1e5
let#D 400
mate nr e g gam
      1 1 1 0
quer nr mnr A      Ay Az lt ly lz bez
      3 1  #D 1e5 1e5 1e5 #la #lb TrägerC
ende
```

```
+prog genf urs:10
syst raum
let#h 0.2
let#dx 2.5 $ "-" in x- Richtung
knot nr      x      y z      fix
      301      0      0 0 pp
      302      #dx      0 -#h py
      303      #dx*2 0 0 pp
fach nr      ka      ke      qnr
      (301 302 1) (301 1) (302 1) 3
ende
```

```
+prog ase urs:7
syst prob thii iter 90
trag ntra 100 eg nein $fak1 1 dfak 1 pro 1
If 10
  kl 302 pz 1
ende
```

ENDE

Anhang B-1

Durchschlagen: ungestützte Sparrenkonstruktion, Drei-Ebenen-Modell:

\$290303: Durchschlagen 3-Stab, Test mit neuer Programmversion (ASE 11.32)

```
$
n=15
$

+prog Aqua urs:12
let#lb 1.089e-3
let#la 0.243e-3
let#S 1e5 $1e-7 $0.384e-3
let#D 400e-3
mate nr e g $gam
1 1e3 1e3 $1
quer nr mnr A Ay Az It ly lz bez
1 1 #D*1e-5 1e3 1e3 10 #la #la Träger_A
2 1 #D*1e-5 #S #S 10 #lb #lb Träger_B
3 1 #D 1e3 1e3 1e3 1e3 1e3 Träger_C

ende

+prog genf urs:10
syst raum
let#h 0.2
let#deltz #h/100
let#b 2.5
let#dz #h/$ (n) $ Unterteilung in z-Richtung
let#dx #b/$ (n) $ -" in x- Richtung
let#dkx (#deltz*#h/#b)
knot nr x y z fix
(301 301+$(n) 1) (0 #dx) 0 (0 -#dz) py
(302+$(n) 301+$(n)*2) 1) (2.5+#dx #dx) 0 (-#h+#dz +#dz) =
knot nr x z kref FIX
(201 201+$(n) 1) -#dkx -#deltz (301 1) KPx
(202+$(n) 202+$(n)*2) 1) #dkx -#deltz (301+$(n) 1) KPx
(201 201+$(n) 1) -#dkx -#deltz (301 1) KPy
(202+$(n) 202+$(n)*2) 1) #dkx -#deltz (301+$(n) 1) KPy
(201 201+$(n) 1) -#dkx -#deltz (301 1) KPz
(202+$(n) 202+$(n)*2) 1) #dkx -#deltz (301+$(n) 1) KPz
(101 101+$(n) 1) #dkx #deltz (301 1) KPx
(102+$(n) 102+$(n)*2) 1) -#dkx #deltz (301+$(n) 1) KPx
(101 101+$(n) 1) #dkx #deltz (301 1) KPy
(102+$(n) 102+$(n)*2) 1) -#dkx #deltz (301+$(n) 1) KPy
(101 101+$(n) 1) #dkx #deltz (301 1) KPz
(102+$(n) 102+$(n)*2) 1) -#dkx #deltz (301+$(n) 1) KPz

Stab nr ka ke qnr
(201 200+$(n) 1) (201 1) (202 1) 2
(202+$(n) 201+$(n)*2) 1) (202+$(n) 1) (203+$(n) 1) 2
(101 100+$(n) 1) (101 1) (102 1) 1
(102+$(n) 101+$(n)*2) 1) (102+$(n) 1) (103+$(n) 1) 1

fach nr ka ke qnr
(301 300+$(n)*2) 1) (301 1) (302 1) 3

knot nr fix
101 ppym
201 ppym
301 ppym
301+$(n)*2 ppym
102+$(n)*2 ppym
202+$(n)*2 ppym

ende

+prog ase urs:15
syst prob thii iter 140
trag ntra 150 eg nein fak1 1 dfak 1 pro 1
If 100
kl 301+$(n) pz 1
ende
```

Anhang B-2

Eingabedatei zu Kapitel 5.5.2

Berechnung des Beispielträgers mit dem „kombinierten Fachwerkmodell“:

```
L=6      $ Trägerlänge
n=90     $ Unterteilungen <98

h1=0.14  $ Höhe Teilquerschnitt 1
h2=0.14
h3=0.14
h4=0.14

b1=0.12  $ Breite Teilquerschnitt 1
b2=0.12
b3=$(b2)
b4=$(b2)

c12=(112.5e3*$L)/$(n)
c34=$(c12)
c23=$(c34)

+prog aqua urs:1
mate nr e g gam bez
  100 1e6 5e5 0 ideel_diag
holz 1 ep 10000 g 1e4 gam 0
qb nr h b mnr bez
  1 $(h1) $(b1) 1 Teilquerschnitt_1
  2 $(h2) $(b2) 1 Teilquerschnitt_2
  3 $(h3) $(b3) 1 Teilquerschnitt_3
  4 $(h4) $(b4) 1 Teilquerschnitt_4

quer nr mnr A lt ly bez
  11 100 1 10 100 FW_Diagonale
ende

+prog genf urs:2
syst rahm

let#dx ($(L)/$(n))
let#dx0 0
let#dz12 (($h1)+$(h2))/2
let#dz23 (($h2)+$(h3))/2
let#dz34 (($h3)+$(h4))/2

knot nr (101 101+$(n) 1) x (0 #dx)
knot nr kref y x
  (201 (201+$(n)) 1) (101 1) #dz12 0
  (301 (301+$(n)) 1) (201 1) #dz23 0
  (401 (401+$(n)) 1) (301 1) #dz34 0
  (1301 1300+$(n) 1) (101 1) #dz12/2 (#dx-#dxc)/2
  (2101 2100+$(n) 1) (201 1) -#dz12/2 (#dx+#dxc)/2
  (2301 2300+$(n) 1) (201 1) #dz23/2 (#dx-#dxc)/2
  (3101 3100+$(n) 1) (301 1) -#dz23/2 (#dx+#dxc)/2
  (3301 3300+$(n) 1) (301 1) #dz34/2 (#dx-#dxc)/2
  (4101 4100+$(n) 1) (401 1) -#dz34/2 (#dx+#dxc)/2

knot nr fix
  (101 401 100) py
  (101+$(n) 401+$(n) 100) py
  101+$(n)/2 px

let#i 1
loop 4 $ Stäbe Teilquerschnitte
let#hund (#i*100)
Stab nr ka ke qnr
  (#hund+1 #hund+$(n) 1) (#hund+1 1) (#hund+2 1) #i
let#i #i+1
endloop

let#i 1
let#hund (#i*100)
let#taus (#i*1000)
Fach nr ka ke qnr
  (#taus+301 #taus+300+$(n) 1) (#hund+1 1) (#taus+301 1) 11
  (#taus+401 #taus+400+$(n) 1) (#hund+2 1) (#taus+301 1) 11
```

Anhang B-2

```

let#i 2
loop 2      $ Fachwerkstäbe
  let#hund (#i*100)
  let#taus (#i*1000)
  Fach nr          ka          ke          qnr
    (#taus+101 #taus+100+$ (n) 1) (#hund+1 1) (#taus+101 1) 11
    (#taus+201 #taus+200+$ (n) 1) (#hund+2 1) (#taus+101 1) 11
    (#taus+301 #taus+300+$ (n) 1) (#hund+1 1) (#taus+301 1) 11
    (#taus+401 #taus+400+$ (n) 1) (#hund+2 1) (#taus+301 1) 11
  let#i #i+1
endloop

let#hund (#i*100)
let#taus (#i*1000)
  Fach nr          ka          ke          qnr
    (#taus+101 #taus+100+$ (n) 1) (#hund+1 1) (#taus+101 1) 11
    (#taus+201 #taus+200+$ (n) 1) (#hund+2 1) (#taus+101 1) 11

  Fede nr          ka          k2          dx dy          cp          cq
    (1201 1200+$ (n) 1) (1301 1) (2101 1) 1 0          $(c12) 1e10
    (2301 2300+$ (n) 1) (2301 1) (3101 1) 1 0          $(c23) 1e10
    (3401 3400+$ (n) 1) (3301 1) (4101 1) 1 0          $(c34) 1e10
ende

+prog star urs:3
steu l
let#p 1000
If 1 bez Einzellast_Feldmitte
  kl (101+$ (n)/2 401+$ (n)/2 100) py #p/4
ende

+prog dbprin urs:6
If 1
echo ausw nein; echo If nein
text .
text .
text .
text .
item knot vers uy
druc mamz
text .
text _____
text Quer- und Federkräfte bei x=0
item Stab Schn
ausw (101 401 100) x $(L)/$(n)
druc
item fede schn
ausw (1201 3401 1100)
druc
text .
text _____
text M und N in Feldmitte
item Stab Schn
ausw (101+$ (n)/2 401+$ (n)/2 100) x 0
druc

ende

-prog aqup urs:4
S If 1 nr 101 x $(L)/$(n)
quer nr art
  1 sig
  1 tau
ende
ENDE

```


Anhang B-3

Eingabedatei zu Kapitel 6.1

Scheibenrechnung des Beipielträgers:

```
b=10      $Trägerlänge
h=1
$


---


+prog aqua urs:1
  mate 1 e 10000 g 0.0500 gam 0 e90 10000
ende

+prog genf urs:2
  syst raum
  Let#1 200      $Längsunterteilung
  Let#uvert abs(#1*($h)/$(b))) $vertikale Unterteilung
  knot nr      x      z
    1          0      0
  1+#1        $(b)    0
  10001        0      $(h)
  10001+#1    $(b)    $(h)

  rast 1 10001 10001+#1 #1+1 m #uvert n #1 mnr 1 d1 ($h)/3

  knot nr      fix
    1          pzpy
    201        pypz
    10001       pp
    10201      PYPZ
ende

+prog ase urs:3
  lf 1 bez einzellast
  kl 101 pz p1 500
  kl 10101 pz p1 500
ende

ENDE
```

Anhang B-4

Eingabedatei zu Kapitel 7.1

Beispiel "Eigenspannungszustände Brettstapelbogen" (Zwei-Ebenen-Modell)

Kopf Brettstapelbogen räumlich

```
phi=90 $ Öffnungswinkel, Stützweite des Bogens=2*R*sin(phi/2)
R=4.95 $ Biegeradius
n=90 $ Unterteilungen
$Parameterbestimmung_____
deltaphi=$(phi)/$(n))
```

```
+prog aqua urs:1
let#la 7.2171e-6
let#lb 1.7321e-4
$ let#S 1e5 $Starr
$ let#S 2.997e-5 $nachgiebig Schraube d=5
$ let#S 1e-6 $sehr nachgiebig
let#S 1e-9 $lose
let#D 1.188e-1
mate nr e g gam
1 1000 1000 0
quer nr mnr A Ay Az lt ly lz bez
1 1 #D 10 10 10 #la #la TrägerA
2 1 #D/1000 #S #S 10 #lb #lb TrägerB
ende
```

```
+prog genf urs:10
syst raum
let#dr $(R)/10)
```

```
let#i 1
let#phi (-90-$(phi)/2)
Loop $(n)+1
knot nr x y koor
100+#i $(R)#phi zy

knot nr z kref
200+#i #dR 100+#i
knot nr kref fix
200+#i 100+#i kpx
= = kpy
= = kpz
```

```
let#phi #phi+$(deltaphi)
let#i #i+1
Endloop
```

```
let#i 1
Loop $(n)
Stab nr ka ke qnr
100+#i 100+#i 101+#i 1
200+#i 200+#i 201+#i 2
let#i #i+1
Endloop
```

```
knot nr fix
101+$(n)/2 F
ende
```

```
+prog ase urs:13
syst prob line
If 1 bez Aufatmen
kl nr typ p1
101 mz 1.458
101+$(n) mz -1.458
ende
```

ENDE

Anhang B-5

Eingabedatei zu Kapitel 7.2

Beispiel "genagelte Holzschale" (Drei-Ebenen-Modell)

R=1.2764 \$ Krümmungsradius
 phi=57.1589 \$ Öffnungswinkel, Stützweite des Bogens=2*R*sin(phi/2) Schale S achse=1270
 L=2.4562 \$ Länge der Schale
 n=32 \$ Unterteilungen Bogen

\$Parameterbestimmung
 B=(2*(R)*3.14*(phi)/360) \$Bogenlänge
 deltaphi=(phi)/(n)
 nLang=((((L)/div\$(B)*(n)*2)))) \$Anzahl Bögen: Unterteilung Längs
 e=(L)/(nLang)
 equer=\$(B)/(n) \$ Projiziert auf Grundfläche
 Lastfak=\$(e)*(equer))

+prog aqua urs:1
 \$ Achtung: Längssteifigkeiten mit Querbreite multiplizieren!

```
let#laL (5.42423E-8*(equer))
let#laQ (0.000102808e-3*(e))
let#ltaL (1.778e-8*(equer))
let#ltaQ (1.778e-8*(e))
let#lbtL (4.54122E-8*(equer))
let#lbtQ (0.00120991e-3*(e))
let#lzl ((0.33e-3*(e)*(equer)^2)/6)
let#lzl ((0.33e-3*(e)^2*(equer))/6)
let#lbtL (1.42e-7*(equer))
let#lbtQ (1.42e-7*(e))
let#SL (0.022e-3*(equer))
let#SQ (0.022e-3*(e))
let#DL (36.378e-3*(equer))
let#DQ (68.947e-3*(e))
```

Holz 2 BS 14 gam 0 bez BSH_Randträger

```
mate nr e g gam bez
1 1e3 1e3 0 ideel
3 5000 500 0 Randscheibe
```

Qnr 41 mnr 2 Bez Randbalken_links

```
QPol
QP 1 0 0
2 -0. 0.508
3 = -0.0762
4 0 -0.0486
```

Qnr 42 mnr 2 Bez Randbalken_rechts

```
QPol
QP 1 0 0
2 0.0508 0
3 = -0.0762
4 0 -0.0486
```

quer nr	mnr	A	Ay	Az	lt	ly	lz	bez
12	1	#DL*1e-5	1	1	#ltaL	#laL	#lzl	Ebene_A_L
11	1	#DQ*1e-5	1	1	#ltaQ	#laQ	#lzl	Ebene_A_Quer
22	1	#DL*1e-5	1	1	#SL	#lbtL	#lbtL 1e-11	Ebene_B_L
21	1	#DQ*1e-5	1	1	#SQ	#lbtQ	#lbtQ 1e-11	Ebene_B_Quer
32	1	#DL	1	1	1	1	1	Ebene_C_L
31	1	#DQ	1	1	1	1	1	Ebene_C_Quer
5	1	1	1	1	1	1	1	AnschlRand

ende

+prog Aquap urs:2
 seit nrst 1
 quer 41
 quer 41 text
 quer 41 schn \$bild
 quer 41 w
 ende

+prog genf m50 urs:10
 syst raum
 let#E1 100000 \$Nummerierung Ebenen
 let#E2 200000

Anhang B-5

```

let#E3 300000
let#NQ 10000 $Numerisierung Quer
let#NL 20000

let#dr 2 $ ($R)/10) $Abstand der Ebenen
let#e ($e)) $Abstand der Bögen
let#z 0

$ _____ Bögen
let#z 0
let#j 1
Loop $(nLang)+1
let#N #j*100 $ Bogennummer
let#i 1
let#phi (-90-$(phi)/2)
Loop $(n)+1
knot nr      x      y      z      koor
  #N+#E1+#i $(R)    #phi #z  zy
knot nr      x      y      z      kref      koor
  #N+#E3+#i #dr     0      0  #N+#E1+#i ka
  #N+#E2+#i -#dr    =      =      =
knot nr      kref      fix
  #N+#E2+#i  #N+#E1+#i kpx
  =          =          kpy
  =          =          kpz
  #N+#E3+#i  #N+#E1+#i kpx
  =          =          kpy
  =          =          kpz
let#phi #phi+$(deltaphi)
let#i #i+1
Endloop
let#i 1
Loop $(n)
Stab nr      ka      ke      qnr kr
  #N+#E1+#i+#NQ #N+#E1+#i #N+1+#E1+#i 11 -90
  #N+#E2+#i+#NQ #N+#E2+#i #N+1+#E2+#i 21 -90
Fach nr      ka      ke      qnr
  #N+#E3+#i+#NQ #N+#E3+#i #N+1+#E3+#i 31
let#i #i+1
Endloop

let#j #j+1
let#z #z+#e
Endloop

$ _____ Randträger
let#j 1
Loop $(nLang)+1
let#N #j*100 $ Bogennummer
knot nr      y      x      kref      koor $Stummelstäbe für Ausmitte Randbalken
  10001+#N 0.04982 -0.0208 #N+#E1+1 ka
  20001+#N =      0.0208 #N+#E1+$(n)+1 ka
Stab nr      ka      ke      qnr
  300+#j 10001+#N #N+#E1+1 5
  400+#j 20001+#N #N+#E1+$(n)+1 5

let#j #j+1
let#z #z+#e
Endloop

let#j 1
Loop $(nLang)
let#N #j*100 $ Bogennummer
let#i 1
Stab nr      ka      ke      qnr
  100+#j 10001+#N 10001+#N+100 42 $Randbalken
  200+#j 20001+#N 20001+#N+100 41
let#j #j+1
Endloop

$ _____ Längsträger
let#j 1
Loop $(nLang)
let#phiS $(phi)/2) $ Winkel zur Orientierung der Elementachsen (lokal)
let#N #j*100 $ Bogennummer
let#i 1
Loop $(n)/2
Stab nr      ka      ke      qnr kr

```

Anhang B-5

```

#N+#E1+#i+#NL #N+#E1+#i #N+#E1+#i+100 12 -#phiS
#N+#E2+#i+#NL #N+#E2+#i #N+#E2+#i+100 22 =
Fach nr ka ke qnr
#N+#E3+#i+#NL #N+#E3+#i #N+#E3+#i+100 32
let#i #i+1
let#phiS abs(#phiS-$(deltaphi))
Endloop
let#phiS 360

Loop $(n)/2+1
Stab nr ka ke qnr kr
#N+#E1+#i+#NL #N+#E1+#i #N+#E1+#i+100 12 -#phiS
#N+#E2+#i+#NL #N+#E2+#i #N+#E2+#i+100 22 =
Fach nr ka ke qnr
#N+#E3+#i+#NL #N+#E3+#i #N+#E3+#i+100 32
let#i #i+1
let#phiS abs(#phiS-$(deltaphi))
Endloop
let#j #j+1
Endloop
let#knotend $(nLang)+1

knot nr y kref
10102 0.032 10101
20102 = 20101
#Knotend*100+10002 = #Knotend*100+10001
#Knotend*100+20002 = #Knotend*100+20001
stab nr ka ke qnr
501 10102 10101 5
502 20102 20101 =
503 #Knotend*100+10002 #Knotend*100+10001 =
504 #Knotend*100+20002 #Knotend*100+20001 =

$ _____ Randscheibe
Let#FL $(nLang)*100
knot nr x y z koor
(1 $(n) 1) (-1.27/2 1.27/$(n)) -1.07 0 ka
(101 101+$(n) 1) (-1.27/2 1.27/$(n)) -1.07 $(L) ka
QUAD Nr k1 k2 k3 k4 mnr d
101 10101+#FL 102 #Knotend*100+#E1+2 #Knotend*100+#E1+1 3 0.0178
(102 99+$(n) 1) (102 1) (103 1) (#Knotend*100+#E1+3 1) (#Knotend*100+#E1+2 1) = =
100+$(n) 100+$(n) 20101+#FL #Knotend*100+#E1+$(n)+1 #Knotend*100+#E1+$(n) = =
1 10101 2 101+#E1+1 101+#E1 = =
(2 $(n)-1 1) (2 1) (3 1) (100+#E1+3 1) (100+#E1+2 1) = =
$(n) $(n) 20101 100+#E1+$(n)+1 100+#E1+$(n) = =

$ _____ Lager
knot nr fix
10102 PP
20102 PP
#Knotend*100+10002 pxpy
#Knotend*100+20002 pxpy
ende

+prog ase m 50 urs:15
syst prob th2 iter 35
If 100 bez Iteration_th2
let#P (1*$(Lastfak))
trag ntra 20 fak1 1 dfak 1 pro 1
let#bogen 100
let#phi0 (90-$(phi)/2)
let#deltaphi $(phi)/$(n)
loop $(nLang)+1
let#punkt 1
let#phi #phi0
loop $(n)+1
kl nr typ p1
300000+#bogen+#punkt py #P*sin(#phi)
= px #P*cos(#phi)
let#punkt #punkt+1
let#phi #phi+#deltaphi
endloop
let#bogen #bogen+100
endloop
ende
ENDE

```