ZENTRUM MATHEMATIK
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ÜBER BEWERTETE DICKSONSCHE FASTKÖRPER

CHRISTIAN KARPFINGER

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. K. Ritter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. H. Wähling
2. Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. H. Karzel, em.
3. Univ.-Prof. Dr. H. Wefelscheid, Gerhard-Mercator Universität Duisburg (schriftliche Beurteilung)

Die Dissertation wurde am 26. März 2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 5. Juli 2002 angenommen.

Но полуденный зной проходит, и настает вечер и ночь, а там и возвращение в тихое убежище, где сладко спится измученным и усталым ...

Иван Сергеевич Тургенев, "Отцы и дети"

Inhaltsverzeichnis

Abstract

After an introduction to the valuation theory of nearfields, we give criteria for when a valuation of a skewfield F is also a valuation of the Dickson nearfield F^κ which is derived from F by the coupling κ on F. For the construction of examples, a rational function field $F = K(t)$ is given. The set $W(v)$ of all prolongations of a valuation v on K to F is well known. We determine all strong t- resp. K-couplings of the field F and extend this two classes of couplings to the class P of the $(K \cdot t)$-couplings. Moreover, sufficient conditions are given which guarantee that elements $\kappa \in P$ and $w \in W(v)$ are in this sense compatible so that w is a valuation of the Dickson nearfield F^κ. Examples demonstrate the results.

Einleitung

W. Krull verallgemeinerte in [18] anläßlich des durch Artin und Schreier in [5] rein algebraisch eingeführten Begriffes der allgemeinen reellen Körper die Bewertungstheorie: Er ersetzte die reelle Wertegruppe der nicht-archimedischen Bewertungen durch eine angeordnete abelsche Gruppe. Mit diesem Begriff der *allgemeinen* Bewertung (Krullschen Bewertung) wurde die Theorie auf eine ausschlaggebend größere Klasse von Körpern ausgedehnt.

Ist v eine (Krullsche) Bewertung eines Körpers F mit der Wertegruppe Γ_v, deren neutrales Element mit 1 bezeichnet sei, so beschreibt die Menge $A_v := \{x \in F \mid v(x) \leq 1\}$ einen Teilring von F mit der Eigenschaft $(*)$: $x \in F \setminus \{0\} \Rightarrow x \in A_v$ oder $x^{-1} \in A_v$ – es heißt A_v der *Bewertungsring von* v. Ist andererseits ein Bewertungsring A von F, d.h. A ist ein Teilring von F mit der Eigenschaft $x \in F \setminus \{0\} \Rightarrow x \in A$ oder $x^{-1} \in A$, gegeben, so gibt es eine (Krullsche) Bewertung v von F mit $A_v = A$.

Dieser Zusammenhang zwischen Bewertungsringen und zu Bewertungen gehörigen Ringen sowie die meisten Ergebnisse von Krull bleiben ohne Modifikation für Schiefkörper gültig, sofern man für die Definition eines Bewertungsringes A eines Schiefkörpers F die zusätzliche Forderung $x \cdot A \cdot x^{-1} = A$ für alle $x \in F \setminus \{0\}$ stellt.

Dieser *Schillingsche* Begriff einer Schiefkörperbewertung wurde durch F. Radó in [23] verallgemeinert: Er ersetzte die angeordnete abelsche Gruppe durch eine geordnete Menge und forderte anstatt der Multiplikativität $v(x \cdot y) = v(x) \cdot v(y)$ für alle $x, y \in F$ einer Bewertung v von F das schwächere Axiom $v(x) \leq v(y) \Rightarrow v(a \cdot x) \leq v(a \cdot y)$ für jedes $a \in F$. Ist v eine (Radó-)Bewertung eines Schiefkörpers F mit Einselement 1, so ist $A_v := \{x \in F \,|\, v(x) \leq v(1)\}$ ein *totaler* Teilring von F, d.h.: Es ist A_v ein Teilring von F mit der Eigenschaft $(*)$. Und umgekehrt existiert zu jedem totalen Teilring A eines Schiefkörpers F eine (Radó-)Bewertung v von F mit $A_v = A$.

Erfüllt ein totaler Teilring A eines Schiefkörpers F darüber hinaus die Eigenschaft $x \cdot A \cdot x^{-1} = A$ für alle $x \in F \setminus \{0\}$, so ist jede zu diesem Teilring A existierende Bewertung (man nennt sie *invariante* Bewertung) von F im wesentlichen eine Bewertung im Sinne Schillings: Es läßt sich in der Wertemenge derart eine (wohldefinierte) Multiplikation erklären, daß die Wertemenge dadurch eine Gruppenstruktur erhält. Der Radósche Bewertungsbegriff stimmt in diesem Fall mit dem Schillingschen überein, falls sich diese Gruppe als abelsch erweist.

K. Mathiak entwarf in [19] ausgehend vom Radóschen Bewertungsbegriff ein allgemeines Konzept einer Bewertungstheorie für Schiefkörper und unterschied zwischen *invarianten* und *nicht-invarianten* Schiefkörperbewertungen.

Bei den bisher betrachteten bewerteten Fastkörpern wurden im wesentlichen die Schillingschen Axiome einer Bewertung zugrunde gelegt (vgl. [11], [12], [28], [30], [31], aber auch [33] – hier werden Bewertungen im Sinne Radós betrachtet).

Wir gehen in der vorliegenden Arbeit vom Radóschen Bewertungsbegriff aus und entwickeln im ersten Kapitel, K. Mathiak entsprechend, die Grundzüge einer Bewertungstheorie für Fastkörper. Es gibt eine weitere Verfeinerung der durch K. Mathiak angegeben Aufteilung zwischen invarianten und nicht-invarianten Bewertungen: Die nicht-invarianten Bewertungen können *multiplikativ* oder *nicht-multiplikativ* sein. Wir führen Beispiele vor.

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion zahlreicher Beispielsklassen bewerteter Fastkörper. Kriterien dafür, wann eine Bewertung eines Schiefkörpers F auch eine Bewertung eines durch eine Kopplung κ auf F gewonnenen Dicksonschen Fastkörpers F^κ ist, werden angegeben: Es ist eine Bewertung v des Schiefkörpers F mit dem Bewertungsring A_v genau dann eine Bewertung des Fastkörpers F^κ, wenn jedes Element δ der Dicksongruppe Δ_κ von κ die Eigenschaft $\delta(A_v) = A_v$ erfüllt. Erfüllen die Automorphismen $\delta \in \Delta_\kappa$ darüber hinaus für eine invariante Bewertung v von F die Eigenschaft $v \circ \delta = v$, so ist v auch eine invariante Bewertung von F^κ.

Für die eigentliche Konstruktion von Beispielen ist dann ein rationaler Funktionenkörper $F = K(t)$ gegeben. Es ist die Menge $\mathfrak{F}(v_0)$ aller Bewertungsfortsetzungen einer Bewertung v_0 von K auf F vollständig bekannt – es sind dies die *Rella-* bzw. *Ostrowskifortsetzungen* von v_0 auf F. Diese Tatsachen werden im 2. Kapitel zur Verfügung gestellt.

Eine zufriedenstellende Beschreibung derjenigen Automorphismen φ von F, die $\varphi(A_v) = A_v$ für den Bewertungsring A_v einer Bewertung v von F erfüllen, gelingt im allgemeinen nicht. Durch die zusätzliche Forderung $\varphi(K) = K$ ist hingegen eine Beschreibung möglich: Im Kapitel 3 bestimmen wir diejenigen Automorphismengruppen von F, deren Elemente φ die Eigenschaften $\varphi(K) = K$ und $\varphi(A_v) = A_v$ bzw. $\varphi(K) = K$ und $v \circ \varphi = v$ erfüllen.

Um dann eine möglichst umfangreiche Klasse von Kopplungen auf F als Ausgangspunkt für die Konstruktion zur Verfügung zu haben, bestimmen wir im Kapitel 6 die sogenannten starken $(K \cdot t)$-Kopplungen. Dies sind starke Kopplungen auf F, die sich als *Produkte* von starken K- und starken t-Kopplungen gewinnen lassen. Hierbei werden vorab die Klassen der starken t-Kopplungen (Kapitel 4) und starken K-Kopplungen (Kapitel 5) beschrieben.

Im Kapitel 7 geben wir dann notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, wann eine Bewertung v von F auch eine Bewertung des durch eine K- bzw. t-Kopplung κ gewonnenen Fastkörpers F^κ ist. Schließlich werden für die Konstruktion von Beispielen hinreichende Bedingungen angegeben und bewertete Fastkörper mit Hilfe von $(K \cdot t)$-Kopplungen auf F gebildet.

An dieser Stelle gehört es sich, dem Doktorvater für seine Unterstützung zu danken. Herr Prof. Dr. Heinz Wähling gewährte mir diese Unterstützung in jeder Phase der Entstehung dieser Arbeit in einem außerordentlichen Umfang – und das auch sehr freundschaftlich. Den Dank würde ich gerne in seinem Heimatdialekt abfassen; weil es aber bei mir mit dem Plattdeutschen nicht so arg weit her ist: Vergelt's Gott!

Kapitel 1

Grundlagen der Theorie der bewerteten Fastkörper

In diesem Kapitel entwerfen wir die Grundlagen einer Bewertungstheorie für Fastkörper. Dabei legen wir den Bewertungsbegriff von F. Radó [23] zugrunde: Anstelle einer linear angeordneten abelschen Gruppe mit kleinstem Element 0, wie sie im Krullschen Sinne einer Körperbewertung vorgegeben ist, legen wir eine linear geordnete Menge Γ mit einem kleinstem Element 0 zugrunde und nennen eine Abbildung v von F in Γ eine Bewertung des Fastkörpers F, wenn (B1), (B2), (B3) [1] erfüllt sind.

Als Pedant des Bewertungsringes (wie etwa bei Krull) erhalten wir einen Bewertungsfastring A_v der Bewertung v in F. Durch zusätzliche Forderungen an den Bewertungsfastring A_v läßt sich in der Menge $\Gamma_v := v(F \setminus \{0\})$ eine Multiplikation $\cdot$ erklären: Es ist $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ genau dann eine linksangeordnete Gruppe, wenn die Einheitengruppe von A_v ein Normalteiler in $F \setminus \{0\}$ ist (1.7) – die Bewertung v nennen wir in diesem Fall *multiplikativ*. Und es ist $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ genau dann eine angeordnete Gruppe, wenn A_v invariant in F ist (1.8) – es heißt die Bewertung v in diesem Fall *invariant*. Dieser Begriff der invarianten Bewertung stimmt mit dem Begriff der Fastkörperbewertung im Sinne von H. Wefelscheid [30] überein.

Einen Aufschluß darüber, wie man mit Hilfe von Kopplungen aus bewerteten Schiefkörpern bewertete Fastkörper gewinnen kann, gibt der Abschnitt 1.1.3.

Und im Abschnitt 1.2 werden schließlich Beispiele für bewertete, multiplikativ bewertete und invariant bewertete Fastkörper angegeben.

[1] Vgl. Abschnitt 1.1.1.

1.1 Definitionen und Eigenschaften

1.1.1 Fastkörper und Bewertungen

Fastkörper

Eine Menge F zusammen mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$ heißt **Fastkörper**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(F1) $(F,+)$ ist eine Gruppe (mit neutralem Element 0).

(F2) $(F \setminus \{0\},\cdot)$ ist eine Gruppe (mit neutralem Element 1).

(F3) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x,y,z \in F$.

(F4) $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in F$.

Vereinbarungen:

• Es bezeichnet $F := (F,+,\cdot)$ stets einen Fastkörper.

• Wir schreiben oft xy statt $x \cdot y$ für $x,y \in F$, wie auch $\varphi\psi$ statt $\varphi \circ \psi$ für Abbildungen φ und ψ.

• Wir setzen $A^* := A \setminus \{0\}$ für jede additiv geschriebene Gruppe A.

• Körper sind kommutativ; einen Fastkörper, der kein Schiefkörper ist, nennen wir **eigentlich**.

Folgende Eigenschaften sind in [29] bewiesen:

(1.1) *Für alle $x,y \in F$ gilt:*

(a) $x \cdot 0 = 0$

(b) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

(c) $(F,+)$ *ist kommutativ.*

Der erste eigentliche Fastkörper wurde von L.E.Dickson konstruiert. Seine Methode, eine Abänderung der Multiplikation in Körpern mit Hilfe von Körperautomorphismen, wurde von H. Karzel axiomatisiert und wird hier als **Dickson-Prozeß** bezeichnet.

Eine Abbildung

$$\kappa : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}(F) \\ x & \to \quad \kappa_x \end{cases}$$

heißt **Kopplung** auf F, wenn $\kappa_{x\kappa_x(y)} = \kappa_x \circ \kappa_y$ für alle $x,y \in F^*$ erfüllt ist.

Ist zusätzlich $\kappa_{xy} = \kappa_x \circ \kappa_y$ für alle $x,y \in F^*$ erfüllt – d.h. κ ist zudem ein Homomorphismus von $(F^*,\cdot)$ in $\mathrm{Aut}(F)$ –, so nennen wir κ eine **starke Kopplung.**

Mit $\mathfrak{K}(F)$ bezeichnen wir die Menge aller Kopplungen auf F und mit $\mathfrak{K}_s(F)$ die der starken Kopplungen.

Nach H. Karzel [16] gilt:

(1.2) *Es sei κ eine Kopplung auf F.*
Führt man durch

$$x \circ y := \begin{cases} 0, & \textit{falls } x = 0 \\ x\kappa_x(y), & \textit{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

eine weitere Verknüpfung ein, so ist auch $(F, +, \circ)$ ein Fastkörper.

Es folgen Bezeichnungen und einfache Tatsachen:

Es sei κ eine Kopplung auf F, und $(F, +, \circ)$ sei der gemäß (1.2) gebildete Fastkörper.

(a) Der Fastkörper $F^\kappa := (F, +, \circ)$ heißt die **κ-Ableitung** von F, und (F, F^κ) bezeichnet man als **gekoppeltes Fastkörperpaar.** Ist F ein Schiefkörper, so wird F^κ **Dicksonscher Fastkörper** und (F, F^κ) **Dicksonsches Fastkörperpaar** genannt.

(b) Die n-te Potenz ($n \in \mathbf{Z}$) von $x \in F^*$ bzgl. $\cdot$ wird mit x^n bezeichnet und bzgl. $\circ$ mit $x^{\underline{n}}$.

(c) Bei der trivialen Kopplung $\iota : x \to \mathrm{Id}_F$ stimmen $\cdot$ und $\circ$ überein.

(d) Es ist κ ein Homomorphismus von $(F^*, \circ)$ in $\mathrm{Aut}(F)$.

(e) Die Gruppe $\Delta_\kappa := \{\kappa_x \,|\, x \in F^*\}$ bezeichnen wir als die **Dicksongruppe** von κ.

(f) Es ist $P_\kappa := \{a \in F \,|\, \forall x \in F : x \circ a = xa\} = \{a \in F \,|\, \forall \delta \in \Delta_\kappa : \delta(a) = a\}$ ein Teilfastkörper von F, der **Fixfastkörper** von Δ_κ.

(g) Es ist $\kappa : F^* \to \mathrm{Aut}(F)$ genau dann eine starke Kopplung auf F, wenn $\kappa_{xy} = \kappa_x \circ \kappa_y$ und $\kappa_{\kappa_x(y)} = \kappa_y$ für alle $x, y \in F^*$ gilt.

(h) Es sei κ eine Kopplung auf F. Es ist κ ist genau dann eine starke Kopplung, wenn $\kappa_{\delta(x)} = \kappa_x$ für alle $x \in F^*$ und $\delta \in \Delta_\kappa$ gilt.

Bewertungen

Wir behandeln Bewertungen im Sinne von F.Radó [23], wie sie für Schiefkörper von K. Mathiak [19] ausführlich diskutiert worden sind.

Es sei $(\Gamma, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit kleinstem Element 0. Eine Abbildung $v : F \to \Gamma, x \to v(x)$ heißt **Bewertung** von F, und (F, v) heißt dann **bewerteter Fastkörper**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(B1) $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(B2) $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in F$

(B3) $v(x) \leq v(y) \Rightarrow v(ax) \leq v(ay)$ für jedes $a \in F$.

In Beispielen benutzen wir gelegentlich die duale Ordnung in Γ:

Statt eines kleinsten Elementes 0 ist dann ein größtes Element ∞ gegeben. (B1), (B2) und (B3) lauten dann:

(B1') $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

(B2') $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in F$

(B3') $v(x) \leq v(y) \Rightarrow v(ax) \leq v(ay)$ für jedes $a \in F$.

Folgende Eigenschaften werden fortlaufend ohne Erwähnung benutzt:

(1.3) *Für jede Bewertung v von F und $x, y \in F$ sowie $a \in F^*$ gilt:*

(a) $v(-x) = v(x)$

(b) $v(x) \neq v(y) \Rightarrow v(x+y) = \max\{v(x), v(y)\}$

(c) $v(x) < v(y) \Leftrightarrow v(ax) < v(ay)$

Die Aussagen (a) bzw. (b) werden wörtlich wie die Bemerkungen e) und f) in [23], S. 313 bewiesen, und (c) gewinnt man mit (B3).

Ein Teilfastring A von F wird ein **Bewertungsfastring** von F genannt, wenn $F^* = A^* \cup (A^*)^{-1}$ gilt. Offenbar ist dann jeder A umfassende Teilfastring von F ebenfalls ein Bewertungsfastring.

Es sei A ein Bewertungsfastring von F. Jede $A \cdot U \subset U$ bzw. $U \cdot A \subset U$ erfüllende Untergruppe U von $(F, +)$ heißt ein **A-Rechtsmodul** bzw. **A-Linksmodul** von F. Im Fall $U \subset A$ sprechen wir von einem **Ideal** [2] von A, wenn U A-Rechts- und A-Linksmodul ist.

(1.4) *Für jeden Bewertungsfastring A von F gilt:*

(a) $M_A := \{x \in F \,|\, x^{-1} \notin A\} \cup \{0\}$ ist ein Ideal von A, das jedes echte Ideal von A umfaßt, und in A das Komplement der Einheitengruppe U_A von A.

(b) Die Menge aller A-Linksmoduln und die aller A-Rechtsmoduln von F sowie die Menge $\mathfrak{B}(A)$ aller A umfassenden Teilfastringe von F sind bzgl. der Inklusion $\subset$ linear geordnet.

(c) Es ist $\Gamma_A := \{x \cdot A \,|\, x \in F\}$ eine durch $\leq := \subset$ linear geordnete Menge mit kleinstem Element $\Theta := 0 \cdot A$. Und $v = v_A : x \to x \cdot A$ ist eine Bewertung von F.

[2] Genau dann gilt – wie üblicherweise gefordert – statt $UA \subset U$ sogar $(x+u)y - xy \in U$ für alle $u \in U$ und $x, y \in A$, wenn die additive Gruppe A/U durch die (wohldefinierte) Vorschrift $(x+U) \cdot (y+U) := xy + U$ zu einem Fastring wird.

Die Aussage (a) beweist man wie Proposition 1.5. in [19], und der Beweis von (b) erfolgt wörtlich wie der von Theorem 1.2 in [19]. Zu (c) vgl. man schließlich den Beweis von Theorem 2.3.2.) in [19].

Wir nennen M_A das **maximale Ideal**, die additive Faktorgruppe $F_A := A/M_A$ die **Restklassengruppe** von A und bezeichnen den Epimorphismus $x \to x+M_A$ von $(A,+)$ auf $(F_A,+)$ mit π_A.

Wir bezeichnen v_A für jeden Bewertungsfastring A von F als die **von A induzierte Bewertung** von F.

Bemerkung. Genau dann wird durch

$$(x + M_A) \cdot (y + M_A) := xy + M_A$$

eine (wohldefinierte) Multiplikation $\cdot$ in F_A gegeben, wenn $(x + a)y - xy \in M_A$ für alle $x, y \in A, a \in M_A$ gilt.

Es sind $F_A = (F_A, +, \cdot)$ dann ein Fastkörper (der **Restklassenfastkörper** von A) und π_A ein Fastringepimorphismus.

Bedeutsam ist folgende Umkehrung von (1.4); man vgl. den Beweis zu Theorem 2.3.1.) in [19].

(1.5) *Für jede Bewertung v von F ist $A_v := \{x \in F \,|\, v(x) \leq v(1)\}$ ein Bewertungsfastring mit maximalen Ideal $M_v = \{x \in F \,|\, v(x) < v(1)\}$ und Einheitengruppe $U_v = \{x \in F \,|\, v(x) = v(1)\}$.*

Für jede Bewertung v von F nennen wir A_v den (Bewertungs-)**Fastring**, M_v das (maximale Bewertungs-) **Ideal**, U_v die **Einheitengruppe**, $F_v := A_v/M_v$ die **Restklassengruppe** und $\Gamma_v := v(F^*)$ die **Wertemenge** von v. Ferner wird $\pi_v : x \to x + M_v$ gesetzt. Im Fall $A_v = F$ nennen wir v **trivial**.

Zwei Bewertungen v, v' von F heißen **äquivalent** (in Zeichen $v \sim v'$), wenn ihre Fastringe übereinstimmen. Bewertete Fastkörper (F, v) und (F', v') nennen wir **bewertungsisomorph** (oder kürzer **isomorph**), wenn es einen Fastkörperisomorphismus $\varphi : F \to F'$ gibt, so daß $v \sim v' \circ \varphi$ gilt – in dieser Situation schreiben wir $(F, v) \cong (F', v')$.

Wir halten drei einfache Tatsachen über Bewertungen v von F fest:

(1) Es gilt: v ist trivial $\Leftrightarrow$ $M_v = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $v(x) = v(1)$ für alle $x \in F^*$.

(2) $v(x) \to x \cdot A_v$ ist eine isotone Bijektion von $(\Gamma_v, \leq)$ auf $(\Gamma_{A_v}, \subset)$ (vgl. (1.4.c)).

(3) Wenn v und v' äquivalent sind, ist $v(x) \to v'(x)$ eine (wohldefinierte) isotone Bijektion von $(\Gamma_v, \leq)$ auf $(\Gamma_{v'}, \leq')$.

Einfach zu zeigen ist:

(1.6) Lemma. *Wenn v eine nichttriviale Bewertung von F ist, hat Γ_v weder ein größtes noch ein kleinstes Element.*

Beweis. Angenommen Γ_v besitzt ein kleinstes Element $v(a)$. Für jedes $x \in F^*$ folgt $v(a) \leq v(ax^{-1})$ und damit $v(x) = v(xa^{-1} \cdot a) \leq v(xa^{-1} \cdot ax^{-1}) = v(1)$. Somit wäre v trivial. Analog schließt man, wenn Γ_v ein größtes Element hätte. □

1.1.2 Multiplikative und invariante Bewertungen

Schon bei bewerteten Schiefkörpern (F, v) läßt sich Γ_v i.a. nicht so zu einer angeordneten Gruppe machen, daß v multiplikativ ist (vgl. [19]).

Die nächsten Aussagen behandeln dieses Problem.

(1.7) *Für eine Bewertung v von F sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) U_v ist ein Normalteiler von F^*.

(2) $v(x) = v(y) \Rightarrow v(xa) = v(ya)$ für jedes $a \in F^*$.

(3) Durch $v(x) \cdot v(y) := v(xy)$ wird in Γ_v eine (wohldefinierte) Verknüpfung $\cdot$ gegeben, so daß $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ eine linksangeordnete Gruppe [3] ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Aus $v(x) = v(y) \neq 0$ folgt $y^{-1}x \in U_v$ und damit – nach Voraussetzung – $(ya)^{-1}xa \in U_v$, d.h. $v(xa) = v(ya)$, für jedes $a \in F^*$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Aufgrund der Voraussetzung und (B3) ist $\cdot$ wohldefiniert. Es ist $(\Gamma_v, \cdot)$ als epimorphes Bild von $(F^*, \cdot)$ eine Gruppe; und (B3) hat das linksseitige Monotoniegesetz zur Folge.

(3) $\Rightarrow$ (1): Für $x \in U_v$ und $a \in F^*$ folgt mit (3):

$$v(axa^{-1}) = v(a) \cdot v(x) \cdot v(a^{-1}) = v(a) \cdot v(1) \cdot v(a^{-1}) = v(1),$$

so daß $axa^{-1} \in U_v$. □

Wir nennen die Bewertung v von F **multiplikativ**, wenn die Bedingungen aus (1.7) erfüllt sind. Und $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ heiße dann die **Wertegruppe** von v. Die Multiplikation werde durch $0 \cdot \alpha := 0 =: \alpha \cdot 0$ für jedes $\alpha \in \Gamma_v \cup \{0\}$ auf $\Gamma_v \cup \{0\}$ fortgesetzt.

[3] D.h. es sind $(\Gamma_v, \cdot)$ eine Gruppe, $\leq$ eine lineare Ordnung auf Γ_v, und aus $\alpha \leq \beta$ folgt $\gamma \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \beta$ für jedes $\gamma \in \Gamma_v$.

(1.8) *Für eine Bewertung v von F sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) A_v *ist invariant in* F *(d.h.* $xA_v = A_v x$ *für jedes* $x \in F$*).*

(2) M_v *ist invariant in* F*.*

(3) $v(x) \leq v(y) \Rightarrow v(xa) \leq v(ya)$ *für jedes* $a \in F^*$*.*

(4) Durch $v(x) \cdot v(y) := v(xy)$ *wird in* Γ_v *eine (wohldefinierte) Verknüpfung* $\cdot$ *gegeben, so daß* $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ *eine angeordnete Gruppe ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es ist $M_v = A_v \setminus U_v$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Mit M_v ist wegen $F^* \setminus A_v = (M_v^*)^{-1}$ auch A_v invariant in F. Aus $v(x) \leq v(y)$, d.h. $y^{-1}x \in A_v$, folgt daher für jedes $a \in F^* : (ya)^{-1}(xa) = a^{-1}y^{-1}xa \in A_v$, so daß $v(xa) \leq v(ya)$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Mit (3) ist die Bedingung (2) aus (1.7) gültig, so daß $\cdot$ wohldefiniert und $(\Gamma_v, \cdot, \leq)$ eine linksangeordnete Gruppe ist. Und (3) impliziert das rechtsseitige Monotoniegesetz.

(4) $\Rightarrow$ (1): Für $x \in F^*$ und $a \in A_v^*$ gilt $v(a) \leq v(1)$ und daher – nach Voraussetzung – $v(ax) \leq v(x)$. Das zeigt mit (B3): $x^{-1}ax \in A_v$. □

Wir nennen eine Bewertung v von F mit den Eigenschaften aus (1.8) **invariant**. Jede invariante Bewertung ist multiplikativ.

1.1.3 Gekoppelte Fastkörperpaare und Bewertungen

Wir diskutieren die Frage, wie man mit Hilfe von Kopplungen aus bewerteten Schiefkörpern bewertete Fastkörper gewinnen kann.

(1.9) *Es sei* κ *eine Kopplung auf dem Fastkörper* F *mit der Dicksongruppe* Δ_κ*.*
(a) Für jede Bewertung v *von* F *sind gleichwertig:*

(1) v *ist eine Bewertung von* F^κ*.*

(2) A_v *ist* κ*-invariant (d.h.* $\delta(A_v) = A_v$ *für alle* $\delta \in \Delta_\kappa$*).*

(3) M_v *ist* κ*-invariant.*

(b) Für jede multiplikative Bewertung v *von* F *sind gleichwertig:*

(1) v *ist eine multiplikative Bewertung von* F^κ*.*

(2) A_v *ist* κ*-invariant, und* $v\kappa_u = v$ *für alle* $u \in U_v$*.*

(c) Für jede Bewertung v *von* F *sind gleichwertig:*

(1) v *ist eine invariante Bewertung von* F^κ*.*

(2) A_v *ist* κ*-invariant, und* $v(a\kappa_a(x)) \leq v(x)$ *für alle* $a \in A_v$ *und* $x \in F^*$*.*

Wenn v eine invariante Bewertung von F ist und $v\delta = v$ für alle $\delta \in \Delta_\kappa$ gilt, dann ist v eine invariante Bewertung von F^κ.

Beweis. Wir beachten im folgenden, daß mit A_v wegen (1.4) auch M_v und U_v κ-invariant sind. Es sei $F^\kappa = (F, +, \circ)$. Die Inversen von $x \in F^*$ bzgl. $\cdot$ bzw. $\circ$ werden x^{-1} bzw. $x^{\underline{-1}}$ geschrieben.

(a) (1) $\Rightarrow$ (2): Wegen (B3) ist $v(x \circ a) \leq v(x)$ für alle $a \in A_v$ und $x \in F^*$ erfüllt, also auch $v(\kappa_x(a)) \leq v(1)$; analog folgt $v(\kappa_x^{-1}(a)) = v(\kappa_{x^{\underline{-1}}}(a)) \leq v(1)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Das ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Es ist nur (B3) für die Verknüpfung $\circ$ nachzuweisen. Aus $v(x) \leq v(y)$ für $x, y \in F$ (o. E. sei $y \neq 0$) folgt $y^{-1}x \in A_v$, wegen der Voraussetzung gilt also $\kappa_a(y^{-1}x) \in A_v$ für jedes $a \in F^*$. Und wegen (B3) für die Verknüpfung $\cdot$ gilt somit $v(a\kappa_a(x)) \leq v(a\kappa_a(y))$, d.h. $v(a \circ x) \leq v(a \circ y)$.

(b) Nach (1.7) ist U_v Normalteiler von $(F^*, \cdot)$. Und (1) bedeutet wegen (a) und (1.7): A_v ist κ-invariant, und U_v ist Normalteiler von $(F^*, \circ)$. Für $x \in F^*$ und $u \in U_v$ gilt aber:

$$x^{\underline{-1}} \circ u \circ x \in U_v \;\Leftrightarrow\; u\kappa_u(x) \in x \circ U_v = x \cdot U_v \;\Leftrightarrow\; \kappa_u(x) \in x \cdot U_v.$$

Die Gleichung $x \circ U_v = x \cdot U_v$ folgt dabei aus (a) (wenn (1) vorausgesetzt ist) oder aus der κ-Invarianz von A_v (wenn (2) vorausgesetzt ist).

(c) Wegen (a) und (1.8) gilt (1) genau dann, wenn A_v κ-invariant und invariant in F^κ ist.

Für $a, x \in F^*$ ist nun $v(a \cdot \kappa_a(x)) \leq v(x)$ mit $x^{-1} \cdot a \cdot \kappa_a(x) \in A_v$ gleichwertig; und dies besagt wegen der κ-Invarianz von A_v: $x^{\underline{-1}} \circ a \circ x = \kappa_x^{-1}(x^{-1} \cdot a \cdot \kappa_a(x)) \in A_v$.

Wenn v eine invariante Bewertung von F ist, so folgt offenbar (2) aus der Bedingung $v\delta = v$ für alle $\delta \in \Delta_\kappa$. □

1.2 Beispiele

Eine nicht-invariante Bewertung v eines Schiefkörpers K ist wegen (1.7) und (1.8) auch nicht-multiplikativ: Aus der Invarianz von U_v folgt nämlich die von M_v, denn man erhält für jedes $m \in M_v$ und für alle $x \in F^*$:

$$1 + m \in U_v \;\Rightarrow\; 1 + xmx^{-1} = x(1+m)x^{-1} \in U_v \;\Rightarrow\; xmx^{-1} \in M_v.$$

Die von F. Radó in [23] und K. Mathiak in [19] angegebenen Beispiele nicht-invariant bewerteter Schiefkörper liefern also Beispiele nicht-multiplikativ bewerteter Fastkörper.

Das folgende Beispiel zeigt, daß dieser Schluß bei Fastkörpern nicht mehr möglich ist:

Im folgenden seien $\Gamma := (\Gamma, +, \leq) \neq \{0\}$ eine angeordnete abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und E ein Körper. Es bezeichne $F := E((\Gamma))$ den Körper der formalen Potenzreihen auf Γ über E. Eine formale Potenzreihe $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma x_\gamma$ ist dabei eine Abbildung $x : \Gamma \to E$, $\gamma \to x_\gamma$ mit wohlgeordnetem Träger $\mathrm{Tr}(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}$.

Es ist dann $v : F \to \Gamma \cup \{\infty\}$, $x \to \min \mathrm{Tr}(x)$ für $x \neq 0$ und $0 \to \infty$ eine invariante Bewertung von F mit dem Bewertungsring $A_v = \{x \in F \mid v(x) \geq 0\}$. Wir nennen v die **Ordnungsbewertung** des Potenzreihenkörpers F.

Für die Konstruktion benötigen wir *Kopplungen* auf $(\Gamma, +, \leq)$. Dabei verstehen wir unter einer **Kopplung** auf $(\Gamma, +, \leq)$ eine Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \Gamma & \to \mathrm{Aut}(\Gamma, +, \leq) \\ \alpha & \to \quad \varphi_\alpha \end{cases}$$

derart, daß $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\varphi_\alpha(\beta)}$ für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ erfüllt ist.

Es bildet Γ mit der durch $\alpha \oplus \beta := \alpha + \varphi_\alpha(\beta)$ erklärten Verknüpfung $\oplus$ eine Gruppe $(\Gamma, \oplus)$ (vgl. [16]) – wir bezeichnen sie mit Γ^φ und nennen sie die **φ-Ableitung** von Γ. Aus $\alpha \leq \beta$ folgt $\gamma \oplus \alpha \leq \gamma \oplus \beta$ für alle $\gamma \in \Gamma$; also ist $(\Gamma, \oplus, \leq)$ linksangeordnet, jedoch nicht notwendig angeordnet. Wir nennen die Kopplung φ auf $(\Gamma, +, \leq)$ eine **o-Kopplung**, wenn Γ^φ mit der Anordnung von Γ eine angeordnete Gruppe ist.

Mit [13] gilt:

(1.10) *Es sei $\varphi : \alpha \to \varphi_\alpha$ eine Kopplung auf $(\Gamma, +, \leq)$ und $F = E((\Gamma))$ ein mit der Ordnungsbewertung v bewerteter Potenzreihenkörper. Bezeichnet κ_x den Automorphismus*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma x_\gamma \to \sum_{\gamma\in\Gamma} X^{\varphi_{v(x)}(\gamma)} x_\gamma$$

von F und wird $x \circ y := x \cdot \kappa_x(y)$ für $x, y \in F, x \neq 0$ und $x \circ y := 0$ für $x = 0$ gesetzt, so gilt:

(a) Für jedes $x \in F^*$ gilt $\kappa_x(A_v) = A_v$.

(b) $\kappa : x \to \kappa_x$ ist eine Kopplung auf F.

(c) $v(x \circ y) = v(x) \oplus v(y)$ für alle $x, y \in F^*$.

(d) v ist eine multiplikative Bewertung von F^κ.

(e) v ist genau dann eine invariante Bewertung von F^κ, wenn φ eine o-Kopplung ist.

Beweis. (a) Es seien $a \in A_v$ und $x \in F^*$. Aus $v(a) \geq 0$ folgt wegen der Isotonie von $\varphi_{v(x)}$, daß $v(\kappa_x(a)) = \varphi_{v(x)}(v(a)) \geq 0$.

(b) Vgl. Satz 1 in [13].

(c) Es seien $x, y \in F^*$. Wir erhalten

$$v(x \circ y) = v(x\kappa_x(y)) = v(x) + v(\kappa_x(y)) = v(x) + \varphi_{v(x)}(v(y)) = v(x) \oplus v(y).$$

(d) Wegen (a) folgt aus (1.9.a), daß v eine Bewertung von F^κ ist. Diese ist wegen (c) und (1.7) multiplikativ.

(e) Die Behauptung folgt mit (1.8) und (c). □

Kopplungen bzw. o-Kopplung auf $(\Gamma, +, \leq)$ erhält man nach [13] auf folgende Weise:

(1.11) *Es seien* $(\Gamma_1, +, \leq), (\Gamma_2, +, \leq)$ *angeordnete Gruppen und* $\Gamma := \Gamma_1 \times_{lex} \Gamma_2$ *ihr lexikographisches Produkt. Weiter seien* $\lambda : \Gamma_1 \to Aut(\Gamma_2, +, \leq)$, $\alpha \to \lambda_\alpha$ *bzw.* $\varrho : \Gamma_2 \to Aut(\Gamma_1, +, \leq)$, $\alpha \to \varrho_\alpha$ *Homomorphismen.*

Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \Gamma & \to \quad Aut(\Gamma, +, \leq) \\ (\alpha_1, \alpha_2) & \to \quad \varphi_{(\alpha_1,\alpha_2)} : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \Gamma \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \to \quad (\gamma_1, \lambda_{\alpha_1}(\gamma_2)) \end{cases} \end{cases}$$

eine o-Kopplung auf Γ *bzw.*

$$\psi : \begin{cases} \Gamma & \to \quad Aut(\Gamma, +, \leq) \\ (\alpha_1, \alpha_2) & \to \quad \psi_{(\alpha_1,\alpha_2)} : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \Gamma \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \to \quad (\varrho_{\alpha_2}(\gamma_1), \gamma_2) \end{cases} \end{cases}$$

eine Kopplung auf Γ.

Es seien $\Gamma := (\mathbf{R}, +, \leq) \times_{lex} (\mathbf{R}^{>0}, \cdot, \leq)$ und $\varrho : \mathbf{R}^{>0} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{R}, +, \leq)$, $\alpha \to \varrho_\alpha$ mit $\varrho_\alpha : \gamma \to \alpha \cdot \gamma$. Es bezeichne ψ die gemäß (1.11) gebildete Kopplung auf Γ und κ die nach (1.10) zu ψ konstruierte Kopplung auf $F = E((\Gamma))$.

Nach (1.10.d) ist (F^κ, v) ein multiplikativ bewerteter Fastkörper.

Die Bewertung v ist nicht invariant, da etwa $v(a\kappa_a(x)) < v(x)$ für $a := X^{(0,2)}$ und $x := X^{(-1,1)}$ gilt – man beachte, daß v die Eigenschaften (B1'), (B2') und (B3') erfüllt und daher die Bedingung (2) in (1.9.c) $v(a\kappa_a(x)) \geq v(x)$ für alle $a \in A_v$ und $x \in F^*$ lautet.

Im Kapitel 7 werden bewertete eigentliche Fastkörper konstruiert, die nicht-multiplikativ bewertet sind.

Kapitel 2

Die Bewertungen von $K(t)$

In diesem Kapitel sei ein kommutativer Körper K mit einer Bewertung v vorgegeben. Weiter seien ein algebraischer Abschluß $\overline{K}$ von K sowie eine transzendente Erweiterung $M := \overline{K}(t)$ von $\overline{K}$ gegeben; und es sei $F := K(t)$.

Wegen (1.8) können wir voraussetzen, daß sämtliche Bewertungen der Körper K, F, M invariant sind, insbesondere sind alle auftretenden Wertemengen angeordnete Gruppen, deren neutrale Elemente wir mit 1 bezeichnen.

Die Fortsetzungen w von v auf F hat schon A. Ostrowski [20] beschrieben. [1] Sind $\overline{w}$ eine Fortsetzung von w auf M und $\overline{v}$ die Restriktion von $\overline{w}$ auf $\overline{K}$, so liegt eine der folgenden beiden Situationen vor:

(A) Es ist $\overline{w}$ eine Rellafortsetzung $\overline{v}_{a,\mu}$ [2] von $\overline{v}$, wobei a ein Element von $\overline{K}$ und μ ein Element einer die Wertegruppe von $\overline{v}$ umfassenden angeordneten, abelschen Gruppe sind.

(B) Es wird $\overline{w}$ von einer Ostrowskifolge aus $\overline{K}$, die keinen Pseudolimes in $\overline{K}$ besitzt, induziert. In diesem Fall ist $\overline{w}$ eine unmittelbare Fortsetzung von $\overline{v}$. [3]

Bezeichnungen

Es sei $\overline{v}$ eine Fortsetzung von v auf $\overline{K}$. Eine **$\overline{v}$-Ostrowskifolge** [4] $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ ist eine Abbildung $i \to a_i$ von einer wohlgeordneten Menge $(I, <)$ ohne größtes Element in den Körper $\overline{K}$ mit der Eigenschaft:

$$i, j, k \in I, i < j < k \;\;\Rightarrow\;\; \overline{v}(a_k - a_j) < \overline{v}(a_j - a_i).$$

[1] Die Ergebnisse wurden in [20] zwar nur für reelle Bewertungen formuliert, sind aber – mit ihren Beweisen – für beliebige (Krullsche) Bewertungen gültig.

[2] Für die Definition von $\overline{v}_{a,\mu}$ siehe (2.1).

[3] D.h. $\Gamma_{\overline{w}} = \Gamma_{\overline{v}}$ und $M_{\overline{w}} = \overline{K}_{\overline{v}}$.

[4] Wir ziehen diesen Namen – einem Vorschlag Warners [32] folgend – der üblichen Bezeichnung *pseudokonvergente Folge* vor.

Die **Maßfolge** $\mu(\mathfrak{a}) := (\mu_i)_{i\in I} := (\overline{v}(a_{i+1} - a_i))_{i\in I}$ von $\mathfrak{a}$ ist dann streng antiton; und es gilt $\overline{v}(a_j - a_i) = \mu_i$, sobald $i < j$. Ist $\overline{w}$ eine Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M, so nennt man $x \in M$ einen **Pseudolimes** von $\mathfrak{a}$ (bzgl. $\overline{w}$), wenn $\overline{w}(x - a_i) = \mu_i$ für alle $i \in I$.

2.1 Die Fortsetzungstypen

Wir stellen hier einige bekannte Tatsachen über Rellafortsetzungen und von Ostrowskifolgen induzierte Fortsetzungen zusammen. Dabei sei eine Fortsetzung $\overline{v}$ von v auf $\overline{K}$ vorgegeben.

2.1.1 Rellafortsetzungen

Wohlbekannt (vgl. etwa [3], [20], [24]) ist der folgende Fortsetzungssatz: [5]

(2.1) Lemma *Es seien Δ eine angeordnete abelsche Gruppe, die $\Gamma_{\overline{v}}$ (als angeordnete Gruppe) enthält, sowie a ein Element von $\overline{K}$ und μ ein solches von Δ. Dann ist*

$$\overline{v}_{a,\mu} : \sum_{i=0}^{n} a_i(t-a)^i \to \max_{i\in\{0,\dots,n\}} \{\overline{v}(a_i)\cdot\mu^i\}$$

eine Bewertung von $\overline{K}[t]$, die $\overline{v}$ fortsetzt.

Man nennt die – ebenfalls mit $\overline{v}_{a,\mu}$ bezeichnete – Fortsetzung von $\overline{v}_{a,\mu}$ auf M eine **Rellafortsetzung** von $\overline{v}$.

Bekannt sind auch die nächsten Kennzeichnungen (vgl. etwa [3], [17], [20]):

(2.2) *Es sei $\overline{w}$ eine Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M und $w := \overline{w}|_F$. Dann sind die folgenden vier Bedingungen äquivalent:*
(1) $\overline{w}$ ist eine Rellafortsetzung von $\overline{v}$.
(2) $\Lambda_{\overline{w}} := \{\overline{w}(t-z) \mid z \in \overline{K}\}$ besitzt ein kleinstes Element.
(3) $\overline{w}$ ist keine unmittelbare Fortsetzung von $\overline{v}$.
(4) Γ_w/Γ_v ist keine Torsionsgruppe, oder F_w/K_v ist transzendent.
Unter diesen Bedingungen gilt genau dann $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$, wenn $\mu = \overline{w}(t-a)$ das kleinste Element von $\Lambda_{\overline{w}}$ ist. Und die in (4) formulierten beiden Eigenschaften treffen niemals gleichzeitig zu.

Wir nennen – Ostrowski [20], S.384 folgend – w eine **Fortsetzung 2.** bzw. **3. Art** von v, wenn F_w/K_v transzendent bzw. Γ_w/Γ_v keine Torsionsgruppe ist.

[5] Die algebraische Abgeschlossenheit von $\overline{K}$ wird hier nicht benötigt.

Wegen (2.2) gilt $\Gamma_{\overline{w}} = \Gamma_{\overline{v}}$ (falls w eine Fortsetzung 2. Art von v ist) oder $\Gamma_{\overline{w}} = \Gamma_{\overline{v}} \times \langle\mu\rangle$ mit $\mu \notin \Gamma_{\overline{v}}$ (im Falle, daß w eine Fortsetzung 3. Art von v ist).

Eine Übersicht über diese Gruppen gewinnt man mit den **Schnitten** von $\Gamma_{\overline{v}}$. Das sind die Teilmengen Σ von $\Gamma_{\overline{v}}$ mit der Eigenschaft: $\delta \in \Sigma,\ \ \delta \geq \gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \Rightarrow \gamma \in \Sigma$. Für jedes $\delta \in \Gamma_{\overline{v}} \times \langle\mu\rangle$ sei $\tilde{\Sigma}(\delta)$ der Schnitt $\{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \,|\, \gamma \leq \delta\}$.

Es sei $\mu \notin \Gamma_{\overline{v}}$ ein – festgehaltenes – Element einer abelschen Obergruppe von $\Gamma_{\overline{v}}$, und $\Delta := \Gamma_{\overline{v}} \cdot \langle\mu\rangle\ \ (= \Gamma_{\overline{v}} \times \langle\mu\rangle)$.

Dann zeigt eine elementare Betrachtung:

(2.3) Lemma. *Zu jedem Schnitt Σ von $\Gamma_{\overline{v}}$ gibt es genau eine Anordnung $\leq_\Sigma$ von Δ, die die Anordnung $\leq$ von $\Gamma_{\overline{v}}$ fortsetzt und $\tilde{\Sigma}(\mu) = \{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \,|\, \gamma \leq_\Sigma \mu\} = \Sigma$ erfüllt.*

Wir bezeichnen die gemäß (2.1) zu $(\Delta, \leq_\Sigma)$ und $a \in \overline{K}$ gehörende Rellafortsetzung $\overline{v}_{a,\mu}$ mit $\overline{v}_{a,\Sigma}$.

2.1.2 Von Ostrowskifolgen induzierte Fortsetzungen

Die nächste Aussage beschreibt eine weitere Art von Fortsetzungen – vgl. [14], [15].

(2.4) *Es sei $\mathfrak{a} = (a_i)_{i \in I}$ eine $\overline{v}$-Ostrowskifolge, die keinen Pseudolimes in $\overline{K}$ besitzt, mit der Maßfolge $\mu(\mathfrak{a}) = (\mu_i)_{i \in I}$. Dann gilt:*
Es ist $\mathfrak{a}$ von transzendentem Typ: Zu jedem $f \in M$ existiert ein Element $i(f) \in I$ derart, daß $\overline{v}(f(a_i)) = \overline{v}(f(a_{i(f)}))$ für alle $i \geq i(f)$ aus I. Und

$$\overline{v}_{\mathfrak{a}} : f \to \overline{v}(f(a_{i(f)}))$$

ist eine unmittelbare (Bewertungs-)Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M.

Wir nennen $\overline{v}_{\mathfrak{a}}$ bzw. $\overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ die von $\mathfrak{a}$ in M bzw. F **induzierte Fortsetzung** von $\overline{v}$ bzw. v. Außerdem bezeichnen wir eine $\overline{v}$-Ostrowskifolge ohne Pseudolimes in $\overline{K}$ wegen (2.4) kürzer als **transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge**.

Wir halten für spätere Zwecke fest – vgl. [15], S. 465:

(I) In $(M, \overline{v}_{\mathfrak{a}})$ ist t ein Pseudolimes von $\mathfrak{a}$.

(II) Es ist $\mu(\mathfrak{a})$ koinitial mit $\Lambda_{\overline{v}_{\mathfrak{a}}}$.

Wenn $\overline{w}$ eine unmittelbare Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M ist, so gibt es nach (2.2) eine mit $\Lambda_{\overline{w}}$ koinitiale, streng antitone Folge $(\lambda_i)_{i \in I}$ aus $\Lambda_{\overline{w}}$ mit einer wohlgeordneten Indexmenge I ohne größtes Element. Wählt man zu jedem $i \in I$ ein Element $a_i \in \overline{K}$ mit der Eigenschaft $\overline{w}(t - a_i) = \lambda_i$, so erhält man eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge $(a_i)_{i \in I}$, die $\overline{w}$ induziert – man vgl. etwa [22], Kap. II, §4, Lemma 14. Mit Rücksicht auf (2.2) und Theorem 2 in [14] gilt daher:

(2.5) *Für eine Fortsetzung $\overline{w}$ von $\overline{v}$ auf M und die Restriktion $w := \overline{w}|_F$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Es wird $\overline{w}$ von einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge induziert.

(2) $\Lambda_{\overline{w}}$ hat kein kleinstes Element.

(3) $\overline{w}$ ist eine unmittelbare Fortsetzung von $\overline{v}$.

(4) Es sind Γ_w/Γ_v eine Torsionsgruppe und F_w/K_v algebraisch.

Wenn die Bedingungen aus (2.5) erfüllt sind, nennen wir w eine **Fortsetzung 1. Art** von v.

Wir nennen zwei transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolgen $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{b} = (b_j)_{j\in J}$ mit den Maßfolgen $\mu(\mathfrak{a}) = (\mu_i)_{i\in I}$ und $\mu(\mathfrak{b}) = (\nu_j)_{j\in J}$ **äquivalent** (bzgl. $\overline{v}$) und schreiben $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn zu jedem $k \in J$ Elemente $i_0 \in I$ und $j_0 \in J$ derart existieren, daß $\overline{v}(a_i - b_j) < \nu_k$, sobald $i_0 \leq i \in I$ und $j_0 \leq j \in J$.

Wir bezeichnen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als K-**äquivalent** (bzgl. $\overline{v}$) und schreiben $\mathfrak{a} \overset{K}{\sim} \mathfrak{b}$, wenn es einen K-Automorphismus φ_0 von $\overline{K}$ mit $\overline{v}\varphi_0 = \overline{v}$ gibt, so daß $\varphi_0(\mathfrak{a}) := (\varphi_0(a_i))_{i\in I}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalent sind.

Weiterhin benötigen wir die folgenden zwei Aussagen, sie werden in [15] bewiesen:

(2.6) *Zwei transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolgen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ induzieren genau dann dieselbe Bewertung in F, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ K-äquivalent sind.*

(2.7) *Es sei $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge mit der Maßfolge $(\mu_i)_{i\in I}$. Ferner sei ein primitives Element $q(t) = c\cdot(t-b)$ (bzw. $q(t) = a + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$) der Erweiterung F/K gegeben, und $r := \min\{i \in I \mid \overline{v}(a_i - b) \neq \mu_i\}$ sowie $I_q := I$ (bzw. $I_q := \{i \in I \mid i > r\}$).*

Dann ist auch $q(\mathfrak{a}) := (q(a_i))_{i\in I_q}$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge.

Kapitel 3

w-Aut(F) und A_w-Aut(F)

Voraussetzungen in diesem Kapitel:

Es sei ein bewerteter Körper (K, v) und eine einfach-transzendente Erweiterung $F = K(t)$ vorgegeben, und w sei eine Bewertungsfortsetzung von v auf F. Es sei weiter $M := \overline{K}(t)$ für einen algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von K, und $\overline{w}$ sei eine Fortsetzung von w auf M sowie $\overline{v} := \overline{w}|_{\overline{K}}$. Mit $A_{\overline{w}}, A_w, A_{\overline{v}}$ und A_v seien die Bewertungsringe und mit $\Gamma_{\overline{w}}, \Gamma_w, \Gamma_{\overline{v}}$ und Γ_v die Wertegruppen der Bewertungen $\overline{w}, w, \overline{v}$ und v bezeichnet.

Ist κ eine Kopplung auf F, so ist w genau dann eine Bewertung des Dicksonschen Fastkörpers F^κ, wenn jedes Element $\delta \in \Delta_\kappa$ die Eigenschaft $\delta(A_w) = A_w$ erfüllt – vgl. (1.9.a). Wir bestimmen in diesem Kapitel die Gruppe der Automorphismen φ von F, welche die Eigenschaften $\varphi(K) = K$ und $\varphi(A_w) = A_w$ erfüllen – vgl. (3.16).

Gilt für die Automorphismen $\varphi \in \Delta_\kappa$ sogar $w\varphi = w$, so ist (F^κ, w) ein invariant bewerteter Fastkörper – vgl. (1.9.c). Eine Beschreibung der Automorphismen φ von F mit den Eigenschaften $\varphi(K) = K$ und $w\varphi = w$ wird in (3.13) angegeben.

Für die Konstruktion von Beispielen in Kapitel 7 sind Sonderfälle dieser allgemeinen Beschreibungen von besonderem Interesse. Es sind dies zum einen die Automorphismen φ von F mit $\varphi|_K = \mathrm{Id}_K$ und $\varphi(A_w) = A_w$ (3.18) bzw. $w\varphi = w$ (3.14), zum anderen die Automorphismen φ von F mit $\varphi(K) = K$, $\varphi(t) = t$ und $\varphi(A_w) = A_w$ (3.19) bzw. $w\varphi = w$ (3.15).

Die allgemeine Beschreibung der angegebenen Automorphismengruppen gelingt mit Hilfe eines algebraischen Abschlusses $\overline{K}$ von K: Wir bestimmen in einem ersten Schritt (Abschnitt 3.2) die interessierenden Automorphismengruppen von $M = \overline{K}(t)$ und führen das allgemeine Problem mit den in 3.3.1 zur Verfügung gestellten Fortsetzungssätzen auf die Ergebnisse des Abschnitts 3.2 zurück.

3.1 Bezeichnungen

Ein Automorphismus φ von F wird ein (K)**-Automorphismus** von F genannt (in Zeichen: $\varphi \in \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$), wenn $\varphi(K) = K$ gilt.

Einen Automorphismus φ_0 von K (bzw. einen (K)-Automorphismus φ von F), der $v\varphi_0 = v$ (bzw. $w\varphi = w$) erfüllt, bezeichnen wir als v**-Automorphismus** von K (bzw. w**-Automorphismus** von F) – in Zeichen: $\varphi \in v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$ (bzw. $\varphi \in w\text{-}\mathrm{Aut}(F)$).

Erfüllt der Automorphismus φ_0 von K (bzw. der (K)-Automorphismus φ von F) die Bedingung $\varphi_0(A_v) = A_v$ (bzw. $\varphi(A_w) = A_w$), so nennen wir φ_0 einen A_v**-Automorphismus** von K (bzw. φ einen A_w**-Automorphismus** von F) – in Zeichen: $\varphi_0 \in A_v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$ bzw. $\varphi \in A_w\text{-}\mathrm{Aut}(F)$).

Wir nennen eine Kopplung (bzw. starke Kopplung) κ auf (F, w) eine A_w**-Kopplung** (bzw. **starke** A_w**-Kopplung**), wenn die Dicksongruppe Δ_κ in $A_w\text{-}\mathrm{Aut}(F)$ enthalten ist – in dieser Situation schreiben wir $\kappa \in A_w\text{-}\mathfrak{K}$ (bzw. $\kappa \in A_w\text{-}\mathfrak{K}_s$). Nach (1.9.a) impliziert dies, daß w eine Bewertung von F^κ ist.

Eine Kopplung (bzw. starke Kopplung) κ auf (F, w) heiße w**-Kopplung** (bzw. starke w**-Kopplung**) – in Zeichen: $\kappa \in w\text{-}\mathfrak{K}$ (bzw. $\kappa \in w\text{-}\mathfrak{K}_s$) , wenn die Dicksongruppe Δ_κ in $w\text{-}\mathrm{Aut}(F)$ enthalten ist. Dies liefert nach (1.9.c), daß w eine invariante Bewertung von F^κ ist.

Bemerkung. J. M. Gamboa [10] und F. F. Rodriguez [25] gaben verschiedene Klassen von *EP-Körpern* an. Dabei nennt man einen Körper L einen EP**-Körper** (EP kürzt *extension property* ab), wenn jeder Automorphismus φ einer einfach-transzendenten Körpererweiterung $L(t)$ eine Fortsetzung eines Automorphismus von L ist. Für uns ist nur das folgende Ergebnis von Interesse:

Algebraisch abgeschlossene Körper sind EP-Körper.

Beweis. Es sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\varphi \in \mathrm{Aut}(L(t))$ und $a \in L$. Für alle natürlichen Zahlen n hat das Polynom $t^n - a \in L(t)$ eine Nullstelle $z \in L$. Damit gilt $\varphi(z)^n - \varphi(a) = 0$. Somit existieren auch alle n-ten Wurzeln von $\varphi(a)$ in $L(t)$. Also gilt $\varphi(a) \in L$. □

Es ist also jeder Automorphismus von M ein $(\overline{K})$-Automorphismus: $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}_{(\overline{K})}(M)$ – dies wird im folgenden ohne Erwähnung benutzt.

3.2 $\overline{w}$-Aut(M) und $A_{\overline{w}}$-Aut(M)

In diesem Abschnitt bestimmen wir $\overline{w}$-Aut(M) und $A_{\overline{w}}$-Aut(M) und führen in dem sich anschließenden Teil das allgemeine Problem auf diese Ergebnisse zurück.

3.2.1 Vorbereitungen

Den folgenden Betrachtungen schicken wir vier Lemmata voraus:

(3.1) *Es seien $a, a' \in \overline{K}$, μ, μ' Elemente einer $\Gamma_{\overline{v}}$ umfassenden angeordneten abelschen Gruppe. Für die Rellafortsetzungen $\overline{v}_{a,\mu}, \overline{v}_{a',\mu'}$ von $\overline{K}$ auf M gilt*

$$\overline{v}_{a,\mu} = \overline{v}_{a',\mu'} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{v}(a - a') \leq \mu \ \textit{und} \ \mu = \mu'.$$

Vgl. [1], Proposition 3 bzw. [15], (3.2).

(3.2) Lemma. *Es sei $\varphi \in Aut(F)$. Es gilt*

$$\varphi(A_w) = A_w \Leftrightarrow A_{w\varphi} = A_w \Leftrightarrow w\varphi \sim w.$$

Beweis. Für $a \in F$ gilt: $a \in A_{w\varphi} \Leftrightarrow w\varphi(a) \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(a) \in A_w \Leftrightarrow a \in \varphi^{-1}(A_w)$. Das zeigt $A_{w\varphi} = \varphi^{-1}(A_w)$, und es folgt: $A_w = \varphi(A_w) \Leftrightarrow A_{w\varphi} = A_w$. Die zweite Äquivalenz ist klar. □

(3.3) Lemma. *Es sei v_0 eine Bewertung eines Körpers L mit Bewertungsring A_{v_0} und $\psi \in Aut(L)$ mit $\psi(A_{v_0}) = A_{v_0}$. Für alle $p, q \in L$ gilt:*

$$v_0(p) \leq v_0(q) \quad \Leftrightarrow \quad v_0\psi(p) \leq v_0\psi(q).$$

Beweis. Es seien $p, q \in L$ und o. E. sei $q \neq 0$. Dann gilt $v_0(p) \leq v_0(q) \Leftrightarrow \frac{p}{q} \in A_{v_0} \Leftrightarrow \psi(\frac{p}{q}) \in A_{v_0} \Leftrightarrow v_0\psi(p) \leq v_0\psi(q)$. □

Für das folgende beachte man, daß sich jedes primitive Element von $M/\overline{K}$ auf genau eine Weise entweder als $c \cdot (t - b)$ oder $d + \frac{1}{c \cdot (t-b)}$, mit $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$ schreiben läßt.

Es ist für jedes $q \in \overline{K}[t]$ und $a \in \overline{K}$ der *Einsetzhomomorphismus* $q \to q(a)$ erklärt (*Einsetzen von a in q*).

Ist allgemein v_0 eine Bewertung eines Körpers L und ψ ein Automorphismus von L, so ist offenbar auch $v_0\psi$ eine Bewertung von L.

(3.4) Lemma. *Es sei $\varphi \in Aut(M)$, $\varphi_0 := \varphi|_{\overline{K}}$, $q := \varphi(t)$ und $\overline{v'} := \overline{v}\,\varphi_0$. Dann gilt:*

(a) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ *eine Rellafortsetzung von* $\overline{v}$ *auf* M.
(1) Falls $q = c \cdot (t-b)$, $c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, *so ist*

$$\overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),\overline{v}(c)\cdot\mu}.$$

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0, \mu \geq \overline{v}(a-b)$, *so ist*

$$\overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(d),(\overline{v}(c)\cdot\mu)^{-1}}.$$

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0, \mu < \overline{v}(a-b)$, *so ist*

$$\overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),(\overline{v}(c)\cdot\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\cdot\mu}.$$

(b) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{\mathfrak{a}}$ *eine von einer transzendenten* $\overline{v}$*-Ostrowskifolge* $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ *induzierte Fortsetzung von* $\overline{v}$ *auf* M.

Dann ist $\varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a})) := (\varphi_0^{-1}(q(a_i)))_{i\in I_q}$ [1] *eine transzendente* $\overline{v'}$*-Ostrowskifolge und es gilt* $\overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))}$.

Beweis. (a) Es ist $\varphi(t) = c\cdot(t-b)$ (Fall 1) oder $\varphi(t) = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$ (Fall 2), wobei $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$.

Fall 1: $q = c\cdot(t-b)$. Für jedes $z \in \overline{K}$ folgt

$$\overline{w}\,\varphi(t-z) = \overline{v}(c)\cdot\overline{w}(t-(b+c^{-1}\varphi_0(z))) = \overline{v}(c)\cdot\max\{\mu, \overline{v}(a-b-c^{-1}\varphi_0(z))\}.$$

Für $a - b - c^{-1}\varphi_0(z) = 0$, d.h. $z = \varphi_0^{-1}(q(a))$, wird das Minimum $\overline{v}(c)\cdot\mu$ dieser Werte angenommen. Mit (2.2) folgt daher:

$$(i) \qquad \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),\overline{v}(c)\cdot\mu}$$

Fall 2: $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$. Es gilt:

$$(ii) \qquad \overline{w}\,\varphi(t-\varphi_0^{-1}(d)) = \overline{w}(\frac{1}{c\cdot(t-b)}) = $$
$$= \begin{cases} (\overline{v}(c)\cdot\mu)^{-1}, & \text{wenn } \overline{v}(a-b) \leq \mu \\ (\overline{v}(c)\cdot\overline{v}(a-b))^{-1}, & \text{wenn } \overline{v}(a-b) > \mu \end{cases}$$

Für $z \neq \varphi_0^{-1}(d)$, d.h. $d' := d - \varphi_0(z) \neq 0$, gilt

$$(*) \quad \overline{w}\,\varphi(t-z) = \overline{v}(d')\cdot\overline{w}(t-b)^{-1}\cdot\overline{w}(t-(b-(cd')^{-1})) =$$
$$= \overline{v}(d')\cdot(\max\{\mu, \overline{v}(a-b)\})^{-1}\cdot\max\{\mu, \overline{v}(a-b+(cd')^{-1})\}.$$

[1] zu I_q vgl. (2.7)

Im Fall $\mu \geq \overline{v}(a-b)$ folgt:

$$\overline{w}\,\varphi(t-z) = \overline{v}(d') \cdot \mu^{-1} \cdot \max\{\mu, \overline{v}(cd')^{-1}\} =$$
$$= \begin{cases} \overline{v}(d') \geq (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}, & \text{wenn } \mu \geq \overline{v}(cd')^{-1} \\ (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}, & \text{wenn } \mu < \overline{v}(cd')^{-1} \end{cases}$$

Ein Blick auf (ii) zeigt, daß $\overline{w}\,\varphi(t-z)$ in diesem Fall für $z := \varphi_0^{-1}(d)$ den minimalen Wert $(\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}$ annimmt. Mit (2.2) folgt

$$(iii) \qquad \mu \geq \overline{v}(a-b) \Rightarrow \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(d),(\overline{v}(c)\cdot\mu)^{-1}}.$$

Im Fall $\mu < \overline{v}(a-b)$ gilt für $z \neq \varphi_0^{-1}(d)$:

$$\overline{w}\,\varphi(t-z) = \begin{cases} \overline{v}(d') > (\overline{v}(c)\overline{v}(a-b))^{-1}, & \text{wenn } \overline{v}(a-b) > \overline{v}(cd')^{-1} \\ (\overline{v}(c)\overline{v}(a-b))^{-1}, & \text{wenn } \overline{v}(a-b) < \overline{v}(cd')^{-1} \end{cases}$$

und aus $\overline{v}(a-b) = \overline{v}(cd')^{-1}$ resultiert

$$\overline{w}\,\varphi(t-z) \geq \overline{v}(d')\overline{v}(a-b)^{-1}\mu = (\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\mu < (\overline{v}(c)\overline{v}(a-b))^{-1},$$

so daß, mit Rücksicht auf (ii), gilt:

$$\overline{w}\,\varphi(t-z) \geq (\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\mu \text{ für alle } z \in \overline{K}.$$

Der Wert $(\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\mu$ wird aber wegen $(*)$ angenommen, falls $b-a = (cd')^{-1}$, d.h. für $z = \varphi_0^{-1}(q(a))$. Nach (2.2) besagt dies:

$$(iv) \qquad \mu < \overline{v}(a-b) \quad \Rightarrow \quad \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),(\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\mu}.$$

(b) Wäre $\overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi$ eine Rellafortsetzung von $\overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi|_{\overline{K}}$ auf M, so wäre – wegen (a) – auch $\overline{v}_{\mathfrak{a}} = \overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi\,\varphi^{-1}$ eine Rellafortsetzung von $\overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi\,\varphi^{-1}|_{\overline{K}} = \overline{v}$ auf M. Folglich gilt $\overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}$ mit einer transzendenten $\overline{v'}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}'$. Nach (2.7) ist $q(\mathfrak{a}) := (q(a_i))_{i\in I_q}$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge und somit $\varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a})) = (\varphi_0^{-1}(q(a_i)))_{i\in I_q}$ eine transzendente $\overline{v'}$-Ostrowskifolge. Die folgende Rechnung zeigt, daß $\overline{v'}_{\mathfrak{a}'} = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}q(\mathfrak{a})}$:

Es sei j hinreichend groß aus I gewählt. Für $z \in \overline{K}$ gilt $\overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi(t-z) = \overline{v}_{\mathfrak{a}}(q-\varphi_0(z)) = \overline{v}(q(a_j)-\varphi_0(z)) = \overline{v}\,\varphi_0(\varphi_0^{-1}(q(a_j))-z) = \overline{v'}_{\varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))}(t-z)$. □

Bemerkung. Es sei $\psi \in \mathrm{Aut}(M)$. Ist $\overline{w}$ eine Fortsetzung i-ter Art von $\overline{w}|_{\overline{K}}$ auf M für $i \in \{1,2,3\}$, so ist $\overline{w}\,\psi$ ebenfalls eine Fortsetzung i-ter Art von $\overline{w}\,\psi|_{\overline{K}}$ auf M.

3.2.2 $\overline{w}$-Aut(M)

Der folgende Satz ergibt sich auch aus (3.7):

(3.5) Satz. *Es sei $\varphi \in Aut(M)$, $\varphi_0 := \varphi|_{\overline{K}}$ und $q := \varphi(t)$.*

(a) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ eine Rellafortsetzung von $\overline{v}$ auf M.

(1) Falls $q = c \cdot (t-b), c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, so gilt:
Es ist φ genau dann ein $\overline{w}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und $\overline{v}(c) = 1$.

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0, \overline{v}(a-b) \leq \mu$, so gilt:
Es ist φ genau dann ein $\overline{w}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \leq \mu$ und $\overline{v}(c) = \mu^{-2}$.

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0, \overline{v}(a-b) > \mu$, so gilt:
Es ist φ genau dann ein $\overline{w}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und $\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2 = 1$.

(b) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{\mathfrak{a}}$ eine von einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ induzierte Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M.

Es ist φ genau dann ein $\overline{w}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$ und zudem $\mathfrak{a} \sim \varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))$.

Beweis. Wir beachten im folgenden: $\varphi \in \overline{w}$-Aut$(M) \Leftrightarrow \overline{w}\varphi = \overline{w} \Rightarrow \overline{v}\varphi_0 = \overline{v}$.

(a) Nach (3.4) gilt

$$\begin{cases} \text{1. Fall}: & q = c\cdot(t-b) & : & \overline{v}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),\overline{v}(c)\cdot\mu} = \overline{v}_{a,\mu} \\ \text{2. Fall}: & q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)} & : & \overline{v}_{\varphi_0^{-1}(d),(\overline{v}(c)\cdot\mu)^{-1}} = \overline{v}_{a,\mu} \\ \text{3. Fall}: & q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)} & : & \overline{v}_{\varphi_0^{-1}(q(a)),(\overline{v}(c)\overline{v}(a-b)^2)^{-1}\mu} = \overline{v}_{a,\mu} \end{cases} \overset{(3.1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \text{1. Fall}: & \mu = \overline{v}(c)\cdot\mu\,(\Leftrightarrow \overline{v}(c) = 1), & \overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu \\ \text{2. Fall}: & \mu = (\overline{v}(c)\cdot\mu)^{-1}\,(\Leftrightarrow \overline{v}(c) = \mu^{-2}), & \overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \leq \mu \\ \text{3. Fall}: & \mu = \overline{v}(c)\cdot\overline{v}(a-b)^2\cdot\mu\,(\Leftrightarrow \overline{v}(c)\cdot\overline{v}(a-b)^2 = 1), & \overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu \end{cases}$$

(b) Aus (3.4) und (2.6) erhalten wir $\overline{v}_{\mathfrak{a}} = \overline{v}_{\mathfrak{a}}\varphi = \overline{v}_{\varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \sim \varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))$ und $\overline{v}\varphi_0 = \overline{v}$. □

Bemerkungen. (I) Statt zu verlangen, daß φ_0 ein $\overline{v}$-Automorphismus ist, genügt es nach (3.10) zu fordern, daß $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-Aut$(\overline{K})$ und $\varphi_0|_K \in v$-Aut(K).

(II) Ist $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ eine Fortsetzung 3. Art von $\overline{K}$ auf M, so gibt es keine $\overline{w}$-Automorphismen φ von M mit $\varphi(t) = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}$, $c \neq 0$, $\overline{v}(a-b) \leq \mu$ – man beachte (3.5.a)(2).

3.2.3 $A_{\overline{w}}$-Aut(M)

Wir stellen ein Lemma voran:

(3.6) Lemma. *Es sei φ ein Automorphismus von M mit $\varphi|_{\overline{K}} =: \varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-Aut$(\overline{K})$, und es bezeichne $\overline{v'} := \overline{v}\,\varphi_0$. Dann gilt für eine Folge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$:*

(a) Es ist $\mathfrak{a}$ genau dann eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge, wenn $\mathfrak{a}$ eine transzendente $\overline{v'}$-Ostrowskifolge ist.

(b) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolgen, so gilt

$$\overline{v}_{\mathfrak{a}} = \overline{v}_{\mathfrak{b}} \;\Leftrightarrow\; \overline{v'}_{\mathfrak{a}} = \overline{v'}_{\mathfrak{b}}.$$

Beweis. (a) Es sei $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$. Für $i, j, k \in I$ mit $i < j < k$ ist nach (3.3) $\overline{v}(a_k - a_j) < \overline{v}(a_j - a_i)$ mit $\overline{v'}(a_k - a_j) < \overline{v'}(a_j - a_i)$ gleichwertig. Weiter gilt mit (3.3) für $z \in \overline{K}$, daß $\overline{v}(z - a_i) = \overline{v}(a_{i+1} - a_i)$ für alle $i \in I \Leftrightarrow \overline{v'}(z - a_i) = \overline{v'}(a_{i+1} - a_i)$ für alle $i \in I$. Also hat die Folge $\mathfrak{a}$ genau dann einen Pseudolimes bzgl. $\overline{v}$ in $\overline{K}$, wenn sie einen solchen bzgl. $\overline{v'}$ in $\overline{K}$ hat.

(b) Es seien $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{b} = (b_j)_{j\in J}$ transzendente $\overline{v}$-Ostrowsikfolgen, nach (a) sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch transzendente $\overline{v'}$-Ostrowskifolgen. Es gilt:
$\overline{v}_{\mathfrak{a}} = \overline{v}_{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow \overline{v}(q(a_i)) = \overline{v}(q(b_j))$ für jedes $q \in M$ und hinreichend große $i \in I, j \in J$ $\overset{(3.3)}{\Leftrightarrow}$ $\overline{v'}(q(a_i)) = \overline{v'}(q(b_j))$ für jedes $q \in M$ und hinreichend große $i \in I, j \in J \Leftrightarrow \overline{v'}_{\mathfrak{a}} = \overline{v'}_{\mathfrak{b}}$. □

Wir beweisen nun:

(3.7) Satz. *Es sei $\varphi \in Aut(M)$, $\varphi_0 := \varphi|_{\overline{K}}$ und $q := \varphi(t)$.*

(a) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ eine Rellafortsetzung von $\overline{v}$ auf M.

(1) Falls $q = c \cdot (t - b)$, $c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-Aut$(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und wenn für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq \overline{v}(c) \cdot \mu.$$

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, $\mu \geq \overline{v}(a - b)$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-Aut$(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \leq \mu$ und wenn für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}.$$

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, $\mu < \overline{v}(a - b)$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und wenn für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq (\overline{v}(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \mu.$$

(b) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{\mathfrak{a}}$ eine von einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ induzierte Fortsetzung von $\overline{v}$ auf M.

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$ und $\mathfrak{a} \sim \varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))$.

Beweis. Es bezeichne $\overline{v'} := \overline{v}\,\varphi_0$.

(a) Wir setzen: $\mu' := \overline{v}(c) \cdot \mu$, $a' := \varphi_0^{-1}(q(a))$, falls $q = c \cdot (t-b)$ (1. Fall); $\mu' = (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}$, $a' := \varphi_0^{-1}(d)$, falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $\mu \geq \overline{v}(a-b)$ (2. Fall); $\mu' = (\overline{v}(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \mu$, $a' := \varphi_0^{-1}(q(a))$, falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $\mu < \overline{v}(a-b)$ (3. Fall). Wegen (3.4) gilt dann

$$(*) \quad \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{a',\mu'}.$$

Es sei $\varphi \in A_{\overline{w}}$-Aut$(M)$. Es folgt $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-Aut$(\overline{K})$ und mit (2.2) $\mu = \overline{v}_{a,\mu}(t-a) = \overline{w}(t-a) \leq \overline{w}(t-z)$, nach (3.3) also $\overline{w}\,\varphi(t-a) \leq \overline{w}\,\varphi(t-z)$, für alle $z \in \overline{K}$, so daß

$$(**) \quad \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{a,\overline{w}\,\varphi(t-a)}$$

nach (2.2). Anwenden von (3.1) auf $(*)$ und $(**)$ liefert daher

$$(i) \quad \mu' = \overline{w}\,\varphi(t-a) \ \text{ und } \ (ii) \quad \overline{v'}(a'-a) \leq \mu'.$$

Ferner gilt nach (3.3) für $z \in \overline{K}$:

$$\overline{v}(z) \leq \mu = \overline{w}(t-a) \ \Leftrightarrow \ \overline{v'}(z) \leq \overline{w}\,\varphi(t-a) = \mu',$$

d.h.

$$(***) \quad \overline{v}(z) \leq \mu \ \Leftrightarrow \ \overline{v'}(z) \leq \mu'.$$

Aus (ii) und $(***)$ erhält man

$$(iii) \quad \overline{v}(a'-a) \leq \mu.$$

Damit sind alle Bedingungen in (1), (2), (3) begründet.

Nun seien umgekehrt die in (1) bzw. (2) bzw. (3) genannten Bedingungen erfüllt, insbesondere also $(***)$ und (iii). Es folgt (ii). Mit (3.1) und $(*)$ erhält man hieraus

$$(****) \quad \overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{a,\mu'}.$$

Für Polynome $p = \sum_{i=0}^{m} r_i(t-a)^i$ und $q = \sum_{j=0}^{n} s_j(t-a)^j \neq 0$ sind daher die folgenden drei Aussagen (A), (B) und (C) äquivalent:

(A) $\frac{p}{q} \in A_{\overline{w}}$, d.h. $\overline{v}_{a,\mu}(p) \leq \overline{v}_{a,\mu}(q)$.

(B) Es existiert ein $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ derart, daß für $i = 0, 1, \ldots, m$ gilt: [2]

$$\overline{v}(r_i) \cdot \mu^i \leq \overline{v}(s_k) \cdot \mu^k \neq 0, \text{ d.h. } \overline{v}(s_k^{-1} r_i) \leq \mu^{k-i}, \text{ d.h. } \overline{v}((s_k^{-1} r_i)^{\frac{1}{k-i}}) \leq \mu,$$
$$\text{d.h. wegen } (***) \ \overline{v'}((s_k^{-1} r_i)^{\frac{1}{k-i}}) \leq \mu', \text{ d.h. } \overline{v'}(r_i) \cdot (\mu')^i \leq \overline{v'}(s_k) \cdot (\mu')^k.$$

(C) $\overline{w}\varphi(p) = \overline{v'}_{a,\mu'}(p) \leq \overline{v'}_{a,\mu'}(q) = \overline{w}\varphi(q)$, d.h. $\overline{w}\varphi(\frac{p}{q}) \leq 1$, d.h. $\varphi(\frac{p}{q}) \in A_{\overline{w}}$.

Somit gilt $\varphi(A_{\overline{w}}) = A_{\overline{w}}$.

(b) Es bezeichne $\mathfrak{a}' := \varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))$.

Es sei φ ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M. Nach (3.4) ist $\overline{w}\,\varphi = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}$.

Offenbar ist φ_0 ein $A_{\overline{v}}$-Automorphismus von $\overline{K}$. Nach (3.6.a) ist somit $\mathfrak{a}$ eine transzendente $\overline{v'}$-Ostrowskifolge und $\mathfrak{a}'$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge. Wegen $\overline{v'}_{\mathfrak{a}}|_{\overline{K}} = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}|_{\overline{K}}$, (3.6.b) und (2.6) bleibt $\overline{v'}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-z)$ für alle $z \in \overline{K}$ nachzuweisen.

Es sei $(\mu_i')_{i \in I}$ die Maßfolge von $\mathfrak{a}' =: (a_i')_{i \in I}$ bzgl. $\overline{v'}$. Wir zeigen vorab:

($*$) Zu jedem $j \in I$ und $z \in \overline{K}$ gibt es ein $i \in I$ mit
$$\mu_j' = \overline{v'}(a_j' - a_i) \text{ und } \overline{v'}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v'}(a_i - z).$$

Es seien $j \in I$, $z \in \overline{K}$ gegeben.

Nach (2.4) gilt für hinreichend große $i \in I$:

(*i*) $\overline{v'}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v'}(a_i - z)$,

(*ii*) $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(t-a_i) < \overline{v}_{\mathfrak{a}}(t-a_j')$ – vgl. (II) nach (2.4).

Da φ ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus ist, gilt auch $\overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-a_i) < \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-a_j') = \mu_j'$. Aus $\mu_j' \neq \overline{v'}(a_j' - a_i)$ folgte der Widerspruch $\mu_j' > \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-a_i) = \max\{\mu_j', \overline{v'}(a_j'-a_i)\} \geq \mu_j'$.

Es sei $z \in \overline{K}$ gegeben. Wir wählen ein $j \in I$ so groß, daß $\mu_j' < \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-z) = \overline{v'}(a_j'-z)$ gilt – vgl. (2.4) und (II) nach (2.4). Zu diesem j und z wähle man nun ein $i \in I$ gemäß ($*$). Es folgt

$$\overline{v'}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v'}(a_i - z) = \overline{v'}((a_i - a_j') + (a_j' - z)) =$$
$$= \max\{\mu_j', \overline{v'}(a_j'-z)\} = \overline{v'}(a_j'-z) = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(t-z).$$

Es seien nun umgekehrt $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}\text{-Aut}(\overline{K})$ und $\mathfrak{a} \sim \varphi_0^{-1}(q(\mathfrak{a}))$, d.h. nach (2.6) und (3.6) $\overline{v'}_{\mathfrak{a}} = \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}$, vorausgesetzt und

$$\frac{p}{q} := r \cdot \frac{(t-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-x_k)^{m_k}}{(t-y_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (t-y_l)^{n_l}} \in M$$

[2] O. E. sei $k \neq i$, und für jedes $z \in \overline{K}$ und $r \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ sei $z^{\frac{1}{r}}$ ein Element $z_0 \in \overline{K}$ mit $z_0^r = z$.

gegeben, $r, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in \overline{K}, k, l, m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l \in \mathbf{N}$. Wir wählen ein $j \in I$ so groß, daß $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v}(a_j - z)$ und $\overline{v'}_{\mathfrak{a}}(t-z) = \overline{v'}(a_j - z)$ für alle $z \in \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l\}$ gilt. Dann erhalten wir (vgl. (3.3) und (3.4.b)):

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} \in A_{\overline{w}} \;&\Leftrightarrow\; \overline{v}_{\mathfrak{a}}(r(t-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-x_k)^{m_k}) \le \overline{v}_{\mathfrak{a}}((t-y_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (t-y_l)^{n_l}) \\
&\Leftrightarrow\; \overline{v}(r(a_j-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_j-x_k)^{m_k}) \le \overline{v}((a_j-y_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (a_j-y_l)^{n_l}) \\
&\Leftrightarrow\; \overline{v}\,\varphi_0(r(a_j-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_j-x_k)^{m_k}) \le \overline{v}\,\varphi_0((a_j-y_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (a_j-y_l)^{n_l}) \\
&\Leftrightarrow\; \overline{v'}_{\mathfrak{a}}(r(t-x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-x_k)^{m_k}) \le \overline{v'}_{\mathfrak{a}}((t-y_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (t-y_l)^{n_l}) \\
&\Leftrightarrow\; \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(p) \le \overline{v'}_{\mathfrak{a}'}(q) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\frac{p}{q}) \in A_{\overline{w}}.
\end{aligned}$$

□

Sonderfälle

Man erhält für die Bewertungsfortsetzungen 2. Art sowie für die Fortsetzungen $\overline{v}_{a,\emptyset}$ und $\overline{v}_{a,\Gamma_{\overline{v}}}$ 3. Art (vgl. die Bezeichnung nach (2.3)):

(3.8) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut(M)$, $\varphi_0 := \varphi|_{\overline{K}}$ und $q := \varphi(t)$.*

(a) Es seien $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ eine Fortsetzung 2. Art von $\overline{v}$ auf M und $\mu = \overline{v}(z_0)$ für ein $z_0 \in \overline{K}^*$.

(1) Falls $q = c \cdot (t-b)$, $c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \le \mu$ und $\varphi_0(z_0) \cdot c^{-1} \cdot z_0^{-1} \in U_{\overline{v}}$.

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, $\mu \ge \overline{v}(a-b)$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \le \mu$ und $\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot z_0 \in U_{\overline{v}}$.

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, $\mu < \overline{v}(a-b)$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$, $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \le \mu$ und $\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot (a-b)^2 \cdot z_0^{-1} \in U_{\overline{v}}$.

(b) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu} = \overline{v}_{a,\emptyset}$ für ein $a \in \overline{K}$.

(1) Falls $q = c\cdot(t-b)$, $c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, so ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$ und $\varphi_0(a) = c \cdot (a-b)$.

(2) Es gibt keine $A_{\overline{w}}$-Automorphismen mit $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, und $\mu \ge \overline{v}(a-b)$.

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}$, $b, c, d \in \overline{K}, c \neq 0$, und $a \neq b$, so ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus, wenn $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$ und $\varphi_0(a) = d + \frac{1}{c\cdot(a-b)}$.

(c) Es sei $\overline{w} = \overline{v}_{a,\Gamma_{\overline{v}}}$ für ein $a \in \overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus, wenn $q = c \cdot (t - b)$, $c, b \in \overline{K}, c \neq 0$, und $\varphi_0 \in A_{\overline{v}}$-$Aut(\overline{K})$.

Beweis. (a) Es sei φ ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M. Nach (3.7.a) genügt es, die jeweils letzte Bedingung in (1), (2) und (3) nachzuweisen.

Aus $\overline{v}(z_0) = \mu$ folgt mit (3.7.a):

$$\overline{v}\,\varphi_0(z_0) = \begin{cases} \overline{v}(c \cdot z_0) & \text{im Fall } (1) \\ \overline{v}(c \cdot z_0)^{-1} & \text{im Fall } (2) \\ (\overline{v}(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \overline{v}(z_0) & \text{im Fall } (3) \end{cases}$$

Und dies besagt $\overline{v}(\varphi_0(z_0) \cdot c^{-1} \cdot z_0^{-1}) = 1$ (im Fall (1)), $\overline{v}(\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot z_0) = 1$ (im Fall (2)) und $\overline{v}(\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot (a-b)^2 \cdot z_0^{-1}) = 1$ (im Fall (3)).

Setzt man $\varphi_0(A_{\overline{v}}) = A_{\overline{v}}$ und (1) $\varphi_0(z_0) \cdot c^{-1} \cdot z_0^{-1} \in U_{\overline{v}}$ bzw. (2) $\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot z_0 \in U_{\overline{v}}$ bzw. (3) $\varphi_0(z_0) \cdot c \cdot (a-b)^2 \cdot z_0^{-1} \in U_{\overline{v}}$ voraus, so gilt für $z \in \overline{K}$: $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow z \cdot z_0^{-1} \in A_{\overline{v}} \Leftrightarrow \varphi_0(z \cdot z_0^{-1}) \in A_{\overline{v}} \Leftrightarrow$ (1) $\varphi_0(z) \cdot \varphi_0(z_0)^{-1} \cdot \varphi_0(z_0) \cdot c^{-1} \cdot z_0^{-1} \in A_{\overline{v}}$ bzw. (2) $\varphi_0(z) \cdot \varphi_0(z_0)^{-1} \cdot \varphi_0(z_0) \cdot c \cdot z_0 \in A_{\overline{v}}$ bzw. (3) $\varphi_0(z) \cdot \varphi_0(z_0)^{-1} \cdot \varphi_0(z_0) \cdot c \cdot (a-b)^2 \cdot z_0^{-1} \in A_{\overline{v}} \Leftrightarrow$ (1) $\overline{v}\,\varphi_0(z) \leq \overline{v}(c \cdot z_0)$ bzw. (2) $\overline{v}\,\varphi_0(z) \leq \overline{v}(c \cdot z_0)^{-1}$ bzw. (3) $\overline{v}\,\varphi_0(z) \leq (\overline{v}(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \overline{v}(z_0)$.

Nun beachte man (3.7.a).

(b) Es ist $\mu < \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma_{\overline{v}}$.

(1) Die Bedingung $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ ist mit $\varphi_0(a) = q(a)$ gleichwertig. Nur $z = 0$ erfüllt die Bedingung $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq \overline{v}(c) \cdot \mu$.

(2) Nur $z = 0$ erfüllt die linke Seite der Bedingung $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}$, alle $z \in \overline{K}$ hingegen die rechte.

(3) vgl. die Begründung zu (1).

(c) Es ist $\gamma < \mu$ für alle $\gamma \in \Gamma_{\overline{v}}$.

Wenn φ ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M ist, so kann φ nicht von der Form (2) oder (3) in (3.7.a) sein. Denn im Fall (2) wäre die Bedingung $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq (\overline{v}(c) \cdot \mu)^{-1}$ nicht erfüllbar, und der Fall (3) ist a priori ausgeschlossen.

Ist umgekehrt φ_0 ein $A_{\overline{v}}$-Automorphismus, und $q = c \cdot (t - b)$, $c, b \in \overline{K}$ mit $c \neq 0$, so sind trivialerweise auch die Bedingungen $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\varphi_0(z) \leq \overline{v}(c) \cdot \mu$ $(z \in \overline{K})$ erfüllt. □

Verlangt man in (3.7), daß $\varphi_0 \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$, so erhält man durch einen Vergleich mit (3.5) für die Bewertungsfortsetzungen 1. und 2. Art von $\overline{v}$ auf M:

(3.9) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut(M)$ mit $\varphi|_{\overline{K}} \in \overline{v}$-$Aut(\overline{K})$, und $\overline{w}$ sei eine Fortsetzung 1. oder 2. Art von $\overline{v}$ auf M.*

Es ist φ genau dann ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus, wenn φ ein $\overline{w}$-Automorphismus ist.

Beweis. Für die Fortsetzungen 1. Art ist dies direkt aus dem Vergleich von (3.5.b) und

(3.7.b) ersichtlich. Daher sei $\overline{w}$ eine Fortsetzung 2. Art von $\overline{v}$, und es sei $z_0 \in \overline{K}$ mit $\overline{v}(z_0) = \mu$ gegeben. Die letzten Bedingungen aus (1), (2), (3) in (3.8.a) lauten wegen $\overline{v}\varphi(z_0) = \overline{v}(z_0)$:

(1) $\overline{v}(c) = 1$,

(2) $\overline{v}(c) \cdot \mu^2 = 1$,

(3) $\overline{v}(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2 = 1$.

Das sind genau die letzten Bedingungen aus (1), (2), (3) in (3.5.a). $\square$

Bemerkung. Ist hingegen $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu}$ eine Fortsetzung 3. Art von $\overline{v}$ auf M, so existieren auch dann $A_{\overline{w}}$-Automorphismen von M, die keine $\overline{w}$-Automorphismen sind, wenn $\varphi|_{\overline{K}} = \mathrm{Id}_{\overline{K}}$; wir belegen dies durch die folgenden Beispiele:

1. Man wähle etwa in (3.8.c) ein Element $0 \neq c \in \overline{K}$ mit $\overline{v}(c) \neq 1$ – (3.5.a)(1) besagt dann, daß $\varphi \in A_{\overline{w}}\text{-Aut}(M) \setminus \overline{w}\text{-Aut}(M)$.

2. Es seien $\Gamma := (\Gamma, \cdot, \leq)$ eine angeordnete und radizierbare abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 und A eine nichttriviale isolierte Untergruppe $\neq \Gamma$ von Γ. Es ist $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma \leq \alpha \text{ für ein } \alpha \in A\}$ ein A umfassender Schnitt von Γ. Es sei $\mu \notin \Gamma$ ein Element einer abelschen Obergruppe von Γ. Die nach (2.3) eindeutig bestimmte Anordnung von $\Gamma \cdot \langle\mu\rangle$, die $\leq$ fortsetzt und $\tilde{\Sigma}(\mu) = \Sigma$ erfüllt, sei ebenfalls mit $\leq$ bezeichnet. Dann gilt:

$\langle 1 \rangle$ *(a) Ist $\alpha_0 \in A$, so gilt für $\gamma \in \Gamma$:*

$$\gamma \leq \mu \Leftrightarrow \gamma \leq \alpha_0 \cdot \mu.$$

(b) Ist $\mu^{-2} < \alpha_0 < \mu^{-1}$ für ein $\alpha_0 \in \Gamma$, so gilt für $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma \leq \mu \Leftrightarrow \gamma \leq (\alpha_0 \cdot \mu)^{-1}.$$

Beweis. Es sei $\gamma \in \Gamma$ gegeben.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma \leq \mu \quad &\Leftrightarrow \quad (i):\ \gamma \in A \ \text{ oder } \ (ii):\ \gamma < \alpha \ \text{ für alle } \alpha \in A \\
&\Leftrightarrow \quad (i):\ \gamma \cdot \alpha_0^{-1} \in A \ \text{ oder } \ (ii):\ \gamma \cdot \alpha_0^{-1} < \alpha \cdot \alpha_0^{-1} \ \text{ für alle } \alpha \in A \\
&\Leftrightarrow \quad \gamma \cdot \alpha_0^{-1} \leq \mu \ \Leftrightarrow \ \gamma \leq \alpha_0 \cdot \mu.
\end{aligned}$$

(b) Aus $\gamma \leq \mu$ folgt $(i):\ \gamma \in A$ oder $(ii):\ \gamma < \alpha$ für alle $\alpha \in A$. In der Situation (i) gilt $\gamma \cdot \alpha_0 \notin A$ und $\gamma \cdot \alpha_0 < \gamma$, also $\gamma \cdot \alpha_0 \leq \mu^{-1}$. Und aus (ii) erhalten wir $\gamma \cdot \alpha_0 < \alpha \cdot \alpha_0 < \alpha$ für alle $\alpha \in A$, also wieder $\gamma \cdot \alpha_0 \leq \mu^{-1}$.

Es sei nun $\gamma \leq (\alpha_0 \cdot \mu)^{-1}$. Wegen $\alpha_0 > \mu^{-2}$ gilt dann $1 \geq \gamma \cdot \alpha_0 \cdot \mu \geq \gamma\mu^{-1}$, also $\gamma \leq \mu$. $\square$

Es seien E ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\Gamma = (\mathbf{Q}, +) \times_{lex} (\mathbf{Q}, +)$. Nach [22], Kap. II, §5, Satz 6 ist der Potenzreihenkörper $\overline{K} := E((\Gamma))$ algebraisch abgeschlossen. Es sei $\overline{v}$ die (additive) Ordnungsbewertung von $\overline{K}$.

Wir verwenden die zu Beginn von 2. eingeführten Bezeichnungen: Es ist $A = \{(0,q) \mid q \in \mathbf{Q}\}$ eine nichttriviale isolierte Untergruppe $\neq \Gamma$ von Γ; weiter ist $\Sigma = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \leq 0, q_2 \in \mathbf{Q}\}$. Es sei $\overline{v}_{a,\mu} = \overline{v}_{a,\Sigma}$ die für ein $a \in \overline{K}$ mit $\overline{v}(a) > \mu$ gegebene Fortsetzung 3. Art von $\overline{v}$ auf M.

Ist $c \in \overline{K}$ mit $\overline{v}(c) \in A$ und $\overline{v}(c) > (0,0)$ gewählt, so folgt aus einem Vergleich von (3.5.a)(1) mit (3.7.a)(1) und $\langle 1 \rangle$ (a), daß der durch $\varphi(t) = c{\cdot}t$ erklärte $\overline{K}$-Automorphismus von M, wegen $\overline{v}(c{\cdot}a - a) = \overline{v}(c-1) + \overline{v}(a) = \overline{v}(a) > \mu$, ein $A_{\overline{w}}$-Automorphismus, jedoch kein $\overline{w}$-Automorphismus ist.

3.3 w-Aut(F) und A_w-Aut(F)

Wir bestimmen w-Aut(F) und A_w-Aut(F).

3.3.1 Vorbereitungen

Mit Hilfe der folgenden Lemmata lassen sich die Ergebnisse des letzten Abschnitts anwenden:

(3.10) Lemma. *Jeder A_w- (bzw. A_v-)Automorphismus φ von F (bzw. K) läßt sich zu einem $A_{\overline{w}}$- (bzw. $A_{\overline{v}}$-) Automorphismus $\overline{\varphi}$ von M (bzw. $\overline{K}$) fortsetzen.*

Es ist $\overline{\varphi}$ genau dann ein $\overline{w}$- (bzw. $\overline{v}$-) Automorphismus, wenn φ ein w- (bzw. v-)-Automorphismus ist.

Insbesondere läßt sich jeder w- (bzw. v-)Automorphismus von F (bzw. K) zu einem $\overline{w}$- (bzw. $\overline{v}$-)Automorphismus von M (bzw. $\overline{K}$) fortsetzen.

Beweis. Es sei $\varphi \in A_w$-Aut(F). Da die Körpererweiterung M/F normal ist, existiert eine Fortsetzung $\psi \in \mathrm{Aut}(M)$ von φ. Es sind $A_{\overline{w}}$ und $\psi(A_{\overline{w}})$ Bewertungsringe von M mit der Eigenschaft $A_{\overline{w}} \cap F = A_w = \psi(A_{\overline{w}}) \cap F$. Nach [8], (14.2) gibt es einen F-Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ mit $\sigma\psi(A_{\overline{w}}) = A_{\overline{w}}$. Es ist $\sigma\psi|_F = \varphi$. Man setze $\overline{\varphi} := \sigma\psi$.

Es sei nun $\varphi \in w$-Aut(M) und $\overline{\varphi}$ eine Fortsetzung zu einem $A_{\overline{w}}$-Automorphismus von M. Es sind $\overline{w}\,\overline{\varphi}$ und $\overline{w}$ zwei Bewertungen von M, die w fortsetzen und deren Bewertungsring $A_{\overline{w}}$ ist. Da $\Gamma_{\overline{w}\,\overline{\varphi}} = \Gamma_{\overline{w}}$ gilt (und M/F algebraisch ist), folgt mit [8], (13.12) $\overline{w}\,\overline{\varphi} = \overline{w}$.

Die Aussage in den Klammern ergibt sich analog – man ersetze w durch v, M durch $\overline{K}$ und F durch K und beachte, daß $\overline{K}/K$ normal ist. □

Es sei $q := \frac{a\cdot t+b}{c\cdot t+d}$ mit $ad-bc \neq 0$ ein primitives Element von F/K. Mit ε_q bezeichnen wir den K-Automorphismus von F, der $\varepsilon_q(t) = q$ erfüllt.

Wohlbekannt ist die folgende Darstellung eines (K)-Automorphismus:

(3.11) *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$, und es bezeichne $\varphi_0 := \varphi|_K$. Dann gilt:*

$$\varphi = \varepsilon_{\varphi(t)} \circ \widetilde{\varphi}_0$$

für den φ_0 fortsetzenden (K)-Automorphismus $\widetilde{\varphi}_0$ von F, der $\widetilde{\varphi}_0(t) = t$ erfüllt.

Mit der in (3.11) angegebenen *Zerlegung* gewinnt man nun sehr leicht den folgenden Fortsetzungssatz.

(3.12) Lemma. *Es seien φ ein (K)-Automorphismus von F und ψ ein $\varphi_0 := \varphi|_K$ fortsetzender Automorphismus von $\overline{K}$. Es existiert ein $\overline{\varphi} \in Aut(M)$ mit $\overline{\varphi}|_F = \varphi$ und $\overline{\varphi}|_{\overline{K}} = \psi$.*

Beweis. Es sei $\varphi = \varepsilon_q \circ \widetilde{\varphi}_0$. Offenbar ist dann $\overline{\varphi} := \varepsilon_q \circ \widetilde{\psi}$ – wobei $\widetilde{\psi}$ den ψ fortsetzenden Automorphismus von M mit $\widetilde{\psi}(t) = t$ bezeichne – ein Automorphismus von M, der φ und ψ gemeinsam fortsetzt. □

3.3.2 w-Aut(F)

Nach (2.2) und (2.5) gilt für jede Bewertung w von F entweder $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$, wobei $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$, oder $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$, wobei $\mathfrak{a}$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge in $\overline{K}$ ist.

Aus (3.5), (3.10) und (3.12) erhalten wir eine Beschreibung für w-Aut(F):

(3.13) Satz. *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$, $\varphi_0 := \varphi|_K$ und $q := \varphi(t)$.*

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

(1) Falls $q = c \cdot (t-b), c, b \in K, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) = 1$ und φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt.

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a-b) \leq \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) = \mu^{-2}$ und φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, für den $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \leq \mu$ gilt.

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a-b) > \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2 = 1$ und φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt.

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\mathfrak{a} \sim \psi^{-1}(q(\mathfrak{a}))$ gilt.

Beweis. Es sei φ ein w-Automorphismus von F. Nach (3.10) existiert eine Fortsetzung $\overline{\varphi} \in \overline{w}$-Aut$(F)$ von φ. Setzt man $\psi := \overline{\varphi}|_{\overline{K}}$, so gewinnt man aus (3.5) die jeweils notwendigen Bedingungen in (a); (1), (2), (3) und in (b).

Es seien nun umgekehrt diese Bedingungen in (a); (1), (2), (3) und in (b) erfüllt. Nach (3.12) besitzen die Automorphismen ψ von $\overline{K}$ (in (a); (2) sei ψ eine nach (3.10) existierende Fortsetzung von φ_0 zu einem $\overline{v}$-Automorphismus von $\overline{K}$) und φ von F eine gemeinsame Fortsetzung $\overline{\varphi} \in$ Aut(M). Wegen den jeweiligen Voraussetzungen folgt aus (3.5), daß $\overline{\varphi}$ ein $\overline{w}$-Automorphismus von M ist; somit ist φ ein w-Automorphismus von F. □

Bemerkung. Ist $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ eine Fortsetzung 3. Art von v auf F, so gibt es keine w-Automorphismen mit $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}; b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a-b) \leq \mu$ – vgl. (3.13.a)(2).

Feststellung. Die Automorphismengruppe des algebraischen Abschlusses $\overline{K}$ von K ist im allgemeinen nicht überschaubar. Es ist in der hier vorliegenden Situation aber keineswegs so, daß alle $\overline{v}$-Automorphismen von $\overline{K}$ zum Nachweis der Bedingungen in (3.13) herangezogen werden müssen. In (a) läßt sich das Problem immer auf endlich viele $\overline{v}$-Automorphismen reduzieren:

Es sei p_a das Minimalpolynom von a über K und $N(a)$ der Zerfällungskörper von p_a in $\overline{K}$. Für die Ostrowskifolge $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ erklären wir entsprechend den normalen Abschluß $N(\mathfrak{a})$: Für $i \in I$ sei p_{a_i} das Minimalpolynom von a_i über K und $N(\mathfrak{a})$ der Zerfällungskörper von $\{p_{a_i} \mid i \in I\}$ in $\overline{K}$. Für jeden K-Automorphismus ϕ von $\overline{K}$ gilt, daß $\phi(N(a)) = N(a)$ bzw. $\phi(N(\mathfrak{a})) = N(\mathfrak{a})$.

Es bezeichne $v_{N(a)} := \overline{v}|_{N(a)}$ und $v_{N(\mathfrak{a})} := \overline{v}|_{N(\mathfrak{a})}$.

Es seien $\varphi \in \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$ und $\varphi_0 := \varphi|_K \in v$-Aut$(K)$.

Fortsetzungen 2. und 3. Art

Ist $\chi \in \overline{v}$-Aut$(\overline{K})$ eine nach (3.10) existierende Fortsetzung von φ_0 und $\chi_0 := \chi|_{N(a)}$, so ist $\mathfrak{F} = \{\chi_0\psi \mid \psi \in v_{N(a)}\text{-Aut}_K(N(a))\} = \{\psi'|_{N(a)} \mid \psi' \in \overline{v}\text{-Aut}(\overline{K}), \psi' \text{ setzt } \varphi_0 \text{ fort}\}$.

Daher läßt sich die Bedingung in (3.13) über die Fortsetzbarkeit von φ_0 zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ mit der Eigenschaft, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ durch die folgende Bedingung ersetzen: Es existiert ein $\phi \in \mathfrak{F}$ mit $v_{N(a)}(q(a) - \phi(a)) \leq \mu$.

Im Fall $\varphi_0 = \mathrm{Id}_K$ ist $\mathfrak{F} = v_{N(a)}\text{-}\mathrm{Aut}_K(N(a))$.

Fortsetzungen 1. Art

Ist $N(\mathfrak{a})$ eine endliche Erweiterung von K, so führt eine analoge Überlegung zu dem gleichen Resultat.

Wir werden der Übersichtlichkeit halber (3.13) wie auch die folgenden Ergebnisse nicht in diesem Sinne verfeinern.

Sonderfälle

Im Kapitel 6 führen wir ein Produkt von t- und K-Kopplungen [3] auf F ein. Für die Konstruktion von bewerteten Fastkörpern sind dabei die folgenden zwei Sonderfälle von (3.13) entscheidend: $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{\overline{K}}$ (vgl. (3.14)) und $q = t$ (vgl. (3.15)).

(3.14) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut_K(F)$, und es bezeichne $q := \varphi(t)$.*

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

(1) Falls $q = c \cdot (t-b), c, b \in K, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) = 1$ und es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\psi \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt.

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a-b) \leq \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) = \mu^{-2}$ und $\overline{v}(d-a) \leq \mu$ gilt.

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a-b) > \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn $v(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2 = 1$ und es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\psi \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt.

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\psi \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\mathfrak{a} \sim \psi^{-1}(q(\mathfrak{a}))$ gilt.

(3.15) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$ mit $\varphi(t) = t$, und es bezeichne $\varphi_0 := \varphi|_K$.*

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

[3] Für diese Begriffe vgl. man Kapitel 4 bzw. 5.

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(a) - a) \leq \mu$ gilt.

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\mathfrak{a} \sim \psi^{-1}(\mathfrak{a})$ gilt.

3.3.3 A_w-Aut(F)

Ebenso wie (3.13) begründet man mit (3.10), (3.7) und (3.12) die folgenden Aussagen über A_w-Aut(F):

(3.16) Satz. *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$, $\varphi_0 := \varphi|_K$ und $q := \varphi(t)$.*

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

(1) Falls $q = c \cdot (t - b), c, b \in K, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\psi(z) \leq v(c) \cdot \mu.$$

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a - b) \leq \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\varphi_0^{-1}(d) - a) \leq \mu$ und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\psi(z) \leq (v(c) \cdot \mu)^{-1}.$$

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c\cdot(t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a - b) > \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\psi(z) \leq (v(c) \cdot \overline{v}(a - b)^2)^{-1} \cdot \mu.$$

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\mathfrak{a} \sim \psi^{-1}(q(\mathfrak{a}))$ gilt.

Wegen der Bedingungen $\overline{v}(z) \le \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\psi(z) \le \mu'$ ($\mu' = v(c) \cdot \mu$ bzw. $\mu' = (v(c) \cdot \mu)^{-1}$ bzw. $\mu' = (v(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \mu$) für $z \in \overline{K}$ in (3.16.a) hat in dieser allgemeinen Situation eine zu der Feststellung nach (3.13) analoge Reduktion auf $N(a)$ keinen Sinn.

In (3.16.b) (falls $N(\mathfrak{a})$ eine endliche Erweiterung von K ist) und auch zum Teil in den folgenden Sonderfällen des Ergebnisses (3.16.a) ist jedoch eine entsprechende Verschärfung möglich:

Es seien der Feststellung nach (3.13) entsprechend die normalen Abschlüsse $N(a)$ und $N(\mathfrak{a})$ erklärt, und es bezeichne wieder $v_{N(a)} := \overline{v}|_{N(a)}$ und $v_{N(\mathfrak{a})} := \overline{v}|_{N(\mathfrak{a})}$; weiter seien $A_{v_{N(a)}}$ bzw. $A_{v_{N(\mathfrak{a})}}$ die Bewertungsringe dieser Bewertungen.

Es seien $\varphi \in \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$ und $\varphi_0 := \varphi|_K \in v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$.

Fortsetzungen 2. und 3. Art

Ist $\chi \in A_{\overline{v}}\text{-}\mathrm{Aut}(\overline{K})$ eine nach (3.10) existierende Fortsetzung von φ_0 und $\chi_0 := \chi|_{N(a)}$, so ist $\mathfrak{F} = \{\chi_0\psi \mid \psi \in A_{v_{N(a)}}\text{-}\mathrm{Aut}_K(N(a))\} = \{\psi'|_{N(a)} \mid \psi' \in A_{\overline{v}}\text{-}\mathrm{Aut}(\overline{K}), \psi'$ setzt φ_0 fort$\}$.

Daher läßt sich die Bedingung in (3.16.a)(1) und (3) über die Fortsetzbarkeit von φ_0 zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ mit der Eigenschaft, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \le \mu$ durch die folgende Bedingung ersetzen: Es existiert ein $\phi \in \mathfrak{F}$ mit $v_{N(a)}(q(a) - \phi(a)) \le \mu'$, dabei ist $\mu' = v(c) \cdot \mu$ bzw. $= (v(c) \cdot \overline{v}(a-b)^2)^{-1} \cdot \mu$.

Im Fall $\varphi_0 = \mathrm{Id}_K$ ist $\mathfrak{F} = A_{v_{N(a)}}\text{-}\mathrm{Aut}_K(N(a))$.

Fortsetzungen 1. Art

Ist $N(\mathfrak{a})$ eine endliche Erweiterung von K, so führt eine analoge Überlegung zu dem gleichen Resultat.

Sonderfälle

Wie in (3.9) ergibt sich in der Situation $\varphi_0 \in v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$ in (3.16) durch einen Vergleich mit (3.13) für die Bewertungsfortsetzungen 1. und 2. Art von v auf F:

(3.17) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$ mit $\varphi|_K \in v\text{-}Aut(K)$, und w sei eine Fortsetzung 1. oder 2. Art von v auf F.*

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus, wenn φ ein w-Automorphismus ist.

Beweis. Nach (3.10) ist ein $A_{\overline{v}}$-Automorphismus von $\overline{K}$, dessen Einschränkung auf K ein v-Automorphismus ist, ein $\overline{v}$-Automorphismus. Hieraus ergibt sich die Behauptung für Bewertungsfortsetzungen 1. Art unmittelbar aus dem Vergleich von (3.13.b) und (3.16.b). Für die Fortsetzungen 2. Art schließe man nun wie im Beweis zu (3.9). □

Wie in (3.14) und (3.15) formulieren wir die beiden Sonderfälle $\varphi_0 = \mathrm{Id}_K$ (vgl. (3.18)) und $q = t$ (vgl. (3.19)) von (3.16). Wegen (3.17) betreffen die folgenden Aussagen nur Fortsetzungen 3. Art von v auf F:

(3.18) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut_K(F)$ und $q := \varphi(t)$.*

Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

(1) Falls $q = c \cdot (t - b), c, b \in K, c \neq 0$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\psi \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq v(c) \cdot \mu.$$

(2) Falls $q = d + \frac{1}{c \cdot (t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a - b) \leq \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn $\overline{v}(d - a) \leq \mu$ gilt und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq (v(c) \cdot \mu)^{-1}.$$

(3) Falls $q = d + \frac{1}{c \cdot (t-b)}, b, c, d \in K, c \neq 0, \overline{v}(a - b) > \mu$, so gilt:

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\psi \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\psi^{-1}(q(a)) - a) \leq \mu$ gilt und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq (v(c) \cdot \overline{v}(a - b)^2)^{-1} \cdot \mu.$$

Beweis. Man beachte, daß nach (3.10) ein die Identität auf K fortsetzender $A_{\overline{v}}$-Automorphismus von $\overline{K}$ ein $\overline{v}$-Automorphismus ist. Die Behauptungen ergeben sich daher aus (3.16). □

(3.19) Korollar. *Es sei $\varphi \in Aut_{(K)}(F)$ mit $\varphi(t) = t$, und es bezeichne $\varphi_0 := \varphi|_K$.*

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\psi^{-1}(a) - a) \leq \mu$ und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\psi(z) \leq \mu.$$

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann ein A_w-Automorphismus von F, wenn φ_0 ein A_v-Automorphismus von K ist, der sich so zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus ψ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\mathfrak{a} \sim \psi^{-1}(\mathfrak{a})$ gilt.

Kapitel 4

t-Kopplungen von F

Es sind ein Körper K und eine transzendente Erweiterung $F := K(t)$ gegeben.

In (3.11) haben wir eine Zerlegung eines (K)-Automorphismus von F angegeben: Es sei $\varphi \in \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$ und $\varphi_0 := \varphi|_K$. Dann gilt $\varphi = \varepsilon_{\varphi(t)} \circ \widetilde{\varphi}_0$. Dabei ist $\varepsilon_{\varphi(t)}$ ein K-Automorphismus und $\widetilde{\varphi}_0$ ein t-Automorphismus, d.h. $\widetilde{\varphi}_0(K) = K$ und $\widetilde{\varphi}_0(t) = t$.

Eine Kopplung auf F nennen wir eine *t-Kopplung*, wenn die Dicksongruppe der Kopplung eine Untergruppe der t-Automorphismengruppe ist. Wir zeigen in Abschnitt 4.2, daß sich jede starke t-Kopplung auf F durch eine abelsche Untergruppe Δ von $\mathrm{Aut}(K)$, einen Homomorphismus $\mathfrak{r}_0$ von einer Faktorgruppe von K^* in Δ und eine Abbildung $\mathfrak{s}_0$ von einer Partition der Menge aller normierten Primpolynome in Δ gewinnen läßt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse geben wir zahlreiche Beispiele starker t-Kopplungen an.

In einem weiteren Abschnitt liefern wir ein Konstruktionsverfahren allgemeiner t-Kopplungen, das in ähnlicher Weise von F. Pokropp [21] angegeben wurde. Auch hier werden Beispiele angeführt.

4.1 Bezeichnungen

Wir nennen einen (K)-Automorphismus φ von F, der $\varphi(t) = t$ erfüllt, kurz **t-Automorphismus**. Die Gruppe der t-Automorphismen von F sei mit $\mathrm{Aut}_t(F)$ bezeichnet. Ist φ eine Kopplung bzw. starke Kopplung auf F mit $\Delta_\varphi \subset \mathrm{Aut}_t(F)$, so heiße φ eine **t-Kopplung** bzw. **starke t-Kopplung** – in dieser Situation schreiben wir $\varphi \in t\text{-}\mathfrak{K}$ bzw. $\varphi \in t\text{-}\mathfrak{K}_s$.

Bemerkungen. (I) Jeder Automorphismus φ von K läßt sich auf genau eine Weise zu einem t-Automorphismus $\widetilde{\varphi}$ von F fortsetzen:

$$\widetilde{\varphi}(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) := \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) t^i$$

(II) Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ mit $\varphi(t) = t$ gilt im allgemeinen nicht $\varphi(K) = K$. Man betrachte hierzu für K etwa eine einfach-transzendente Körpererweiterung $K := E(x)$ eines Körpers E. Es sei y eine von x algebraisch unabhänginge Transzendente und φ der E-Automorphismus von $K(y)$, der $\varphi(x) = y$ sowie $\varphi(y) = x$ erfüllt. Setzt man $t := x+y$ so gilt $K(y) = K(t)$, $\varphi(t) = t$, aber $\varphi(K) \neq K$.

4.2 Die starken t-Kopplungen von F

Es sei $\varphi \in t\text{-}\mathfrak{K}_s$ mit der Dicksongruppe Δ_φ, d.h.:

(i) φ ist ein Homomorphismus von F^* in $\mathrm{Aut}_t(F)$,

(ii) $\varphi_{\delta(x)} = \varphi_x$ für alle $\delta \in \Delta_\varphi$ und $x \in F^*$

– vgl. Bemerkung (g) nach (1.2).

Wir setzen $\varphi_x^0 := \varphi_x|_K$ für alle $x \in F^*$. Es bezeichne $\mathfrak{P}$ die Menge der normierten Primpolynome aus $F[t]$ (es ist $K^* \cup \mathfrak{P}$ ein Erzeugendensystem von F^*).

Aus (i) folgt:

Es ist $\varphi^0 : F^* \to Aut(K)$, $x \to \varphi_x^0$ ein Homomorphismus.

Wir setzen $\Delta := \varphi^0(F^*)$, $\mathfrak{r} := \varphi^0|_{K^*}$, $\mathfrak{s} := \varphi^0|_{\mathfrak{P}}$ und stellen fest:

Es sind Δ eine abelsche Untergruppe von $Aut(K)$, $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K mit $\Delta_\mathfrak{r} \subset \Delta$ und $\mathfrak{s}$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in Δ.

Die Abbildung

$$\begin{cases} \Delta_\varphi \times \mathfrak{P} & \to \mathfrak{P} \\ (\delta, p) & \to \delta(p) \end{cases}$$

ist eine Operation.

Mit $\mathfrak{B}$ sei die Menge der Bahnen $\{\Delta_\varphi(p) \,|\, p \in \mathfrak{P}\}$ dieser Operation bezeichnet. Schließlich sei N die von allen $k^{-1}\delta(k)$ $(\delta \in \Delta, k \in K^*)$ erzeugte Untergruppe von K^*.

Aus (ii) folgt:

(a) $N \subset Kern(\mathfrak{r})$, d.h. es existiert ein Homomorphismus $\mathfrak{r}_0 : K^*/N \to \Delta$ mit $\mathfrak{r} : k \to \mathfrak{r}_0(kN)$.

(b) $\mathfrak{s}$ ist konstant auf jedem $B \in \mathfrak{B}$, d. h. es existiert eine Abbildung $\mathfrak{s}_0 : \mathfrak{B} \to \Delta$ mit $\mathfrak{s} : p \to \mathfrak{s}_0(\Delta_\varphi(p))$.

Beweis. (a) Für $k^{-1}\delta(k) \in N$ gilt $\mathfrak{r}_{k^{-1}\delta(k)} = \mathfrak{r}_{k^{-1}} \circ \mathfrak{r}_{\delta(k)} = \mathfrak{r}_{k^{-1}} \circ \mathfrak{r}_k = \mathfrak{r}_1 = \mathrm{Id}_K$.

(b) Es seien $p, q \in B$. Da $p = \delta_0(q)$ für ein $\delta_0 \in \Delta_\varphi$ gilt, folgt aus der Invarianzgleichung (ii): $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{s}_{\delta_0(q)} = \mathfrak{s}_q$. □

Es gilt die folgende Umkehrung:

(4.1) *Es seien Δ eine abelsche Untergruppe von Aut(K), $\widetilde{\Delta}$ bezeichne die Gruppe der Fortsetzungen der $\delta \in \Delta$ zu t-Automorphismen $\widetilde{\delta}$ von F, N die von den Elementen $k^{-1}\delta(k)$ ($\delta \in \Delta, k \in K^*$) erzeugte Untergruppe von K^*, $\mathfrak{B}$ die Menge der $\widetilde{\Delta}$-Bahnen in $\mathfrak{P}$ gemäß der Operation $(\widetilde{\delta}, p) \to \widetilde{\delta}(p)$.*

Es seien $\mathfrak{r}_0$ ein Homomorphismus von K^*/N in Δ und $\mathfrak{s}_0$ eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ in Δ. Weiter seien $\mathfrak{r} : K^* \to \Delta$ durch $\mathfrak{r}_k := \mathfrak{r}_0(kN)$ definiert und $\mathfrak{s} : \mathfrak{P} \to \Delta$ durch $\mathfrak{s}_p := \mathfrak{s}_0(\widetilde{\Delta}(p))$ gegeben.

Dann gilt:

(a) Es ist $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K.

(b) Es existiert genau ein Homomorphismus $\varphi : x \to \varphi_x$ von F^* in Δ, der $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ fortsetzt.

(c) Es ist

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to \widetilde{\Delta} \\ x & \to \widetilde{\varphi}_x \end{cases}$$

eine starke t-Kopplung auf F.

Beweis. (a) Es ist $\mathfrak{r}$ ein Homomorphismus von K^* in Δ. Weiter gilt für alle $\delta \in \Delta$ und $k \in K^*$: $\mathfrak{r}_{k^{-1}\delta(k)} = \mathrm{Id}_K$, somit also $\mathfrak{r}_{\delta(k)} = \mathfrak{r}_k$.

(b) Es sei $x := a \cdot \prod_{i=1}^r p_i^{\nu_i} \in F^*$ mit $a \in K^*, p_1, \ldots, p_r \in \mathfrak{P}, \nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbf{Z}$. Wir setzen $\varphi_x := \mathfrak{r}_a \circ \prod_{i=1}^r \mathfrak{s}_{p_i}^{\nu_i}$. Offenbar ist $\varphi : x \to \varphi_x$ der eindeutig bestimmte, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ fortsetzende Homomorphismus von F^* in Δ.

(c) Es ist $\widetilde{\varphi}$ ein Homomorphismus von F^* in Aut(F).

Es seien $\delta \in \Delta$ und $y \in F^*$ mit $y = b \cdot \prod_{j=1}^s q_j^{\nu_j}$, $b \in K^*, q_j \in \mathfrak{P}, \nu_j \in \mathbf{Z}$ für alle j gegeben. Es ist $\varphi_y = \mathfrak{r}_b \circ \prod_{j=1}^s \mathfrak{s}_{q_j}^{\nu_j}$.

Es gilt – der Übersichtlichkeit halber schreiben wir im folgenden $\varphi(y)$ statt φ_y:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{\widetilde{\delta}(y)} = \widetilde{\varphi}_y \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(\widetilde{\delta}(y)) = \varphi(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(\delta(b) \cdot \prod_{j=1}^s \widetilde{\delta}(q_j)^{\nu_j}) = \mathfrak{r}_b \circ \prod_{j=1}^s \mathfrak{s}_{q_j}^{\nu_j} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{r}_b^{-1} \circ \varphi(\delta(b)) \circ \prod_{j=1}^s \varphi(\widetilde{\delta}(q_j))^{\nu_j} = \prod_{j=1}^s \mathfrak{s}_{q_j}^{\nu_j} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{r}_{b^{-1}\delta(b)} \circ \prod_{j=1}^s \mathfrak{s}_{\widetilde{\delta}(q_j)}^{\nu_j} = \prod_{j=1}^s \mathfrak{s}_{q_j}^{\nu_j}.
\end{aligned}$$

Und die letzte Gleichung ist nach den Definitionen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ erfüllt. $\square$

4.2.1 Beispiele und Mächtigkeitsaussagen

Aus (4.1) folgt mit den dortigen Bezeichnungen:

(4.2) Korollar. *Für jede abelsche Untergruppe* Δ *von* $Aut(K)$ *gilt*

$$|t\text{-}\mathfrak{K}_s| \geq \max\{|Hom(K^*/N, \Delta)|, |\Delta|^{|\mathfrak{B}|}\}.$$

Beispiele

Für ein $x = \frac{\sum_{i=k}^{n} a_i t^i}{\sum_{j=l}^{m} b_j t^j} \in F^*$, mit $k, l, m, n \in \mathbf{N}, k \leq n, l \leq m$, $a_k, a_n, b_l, b_m \neq 0$, bezeichne $h : x \to h(x) := \frac{a_n}{b_m}$ die Abbildung, die jedem $x \in F^*$ den höchsten Koeffizienten von x und $n : x \to n(x) := \frac{a_k}{b_l}$ diejenige, die jedem $x \in F^*$ den niedrigsten Koeffizienten von x zuordnet.

1. Es sei $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K mit der Dicksongruppe $\Delta_\mathfrak{r}$, und $\mathfrak{s}_0$ sei die triviale Abbildung $\widetilde{\Delta}_\mathfrak{r}(p) \to \mathrm{Id}_K$ von $\mathfrak{B}$ in $\Delta_\mathfrak{r}$.

Dann ist für $x = a \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} \in F^*, a \in K^*, p_i \in \mathfrak{P}, \nu_i \in \mathbf{Z}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\widetilde{\varphi}_x = \mathfrak{r}_a \circ \widetilde{\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{s}_{p_i}^{\nu_i}} = \widetilde{\mathfrak{r}}_a$$

– d.h. $\widetilde{\varphi}$ ist die Fortsetzung *nach dem höchsten Koeffizienten* von $\mathfrak{r}$ auf F – (vgl. [21], (3.1)).

2. Wieder sei $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K mit der Dicksongruppe $\Delta_\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}_0 : \mathfrak{B} \to \Delta_\mathfrak{r}$, $\widetilde{\Delta}_\mathfrak{r}(p) \to \mathfrak{r}_{n(p)}$.

Es ist $\mathfrak{s}_0$ wohldefiniert: Für $p_1, p_2 \in \widetilde{\Delta}_\mathfrak{r}(p)$ gilt $p_1 = \widetilde{\delta}(p_2)$ für ein $\widetilde{\delta} \in \widetilde{\Delta}_\mathfrak{r}$ und damit gilt $\mathfrak{s}_0(p_1) = \mathfrak{r}_{n(p_1)} = \mathfrak{r}_{n(\widetilde{\delta}(p_2))} = \mathfrak{r}_{\delta(n(p_2))} = \mathfrak{r}_{n(p_2)} = \mathfrak{s}_0(p_2)$.

Für $x = a \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} \in F^*, a \in K^*, p_i \in \mathfrak{P}, \nu_i \in \mathbf{Z}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt:

$$\widetilde{\varphi}_x = \mathfrak{r}_a \circ \widetilde{\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{r}_{n(p_i)}^{\nu_i}} = \widetilde{\mathfrak{r}}_{n(x)}$$

– d.h. $\widetilde{\varphi}$ ist die Fortsetzung *nach dem niedrigsten Koeffizienten* von $\mathfrak{r}$ auf F – (vgl. [21], S. 205f).

3. Es seien $K = E(x)$ eine einfach-transzendente Körpererweiterung eines Körpers E mit Einselement 1_E und $\Delta := \{\varepsilon_{x+a} \,|\, a \in E\}$, wobei ε_{x+a} den E-Automorphismus von K mit $\varepsilon_{x+a}(x) = x + a$ bezeichnet. Es ist Δ eine abelsche Gruppe.

Weiter ist $N = \langle\{\frac{q}{p}\frac{p(x+a)}{q(x+a)} \,|\, p, q \in E[x]^*, a \in E\}\rangle$.

Die Abbildung

$$\mathfrak{r}_0 : \begin{cases} K^*/N & \to \Delta \\ kN & \to \varepsilon_{x+\deg(k)\cdot 1_E} \end{cases}$$

ist offenbar ein (wohldefinierter) Homomorphismus.

Wir wählen

$$\mathfrak{s}_0^\zeta : \begin{cases} \mathfrak{P} & \to \Delta \\ \widetilde{\Delta}(p) & \to \zeta(\deg(p)) \end{cases}$$

für jede Abbildung $\zeta : \mathbf{N} \to \Delta$.

Es ist $\mathfrak{s}_0^\zeta$ wegen $\widetilde{\delta}(t) = t$ für alle $\widetilde{\delta} \in \widetilde{\Delta}$ sinnvoll definiert und es gilt:

Es existieren $|E|^{\aleph_0}$ solche Abbildungen $\mathfrak{s}_0^\zeta$.

Beweis. Es ist K der Quotientenkörper des faktoriellen Ringes $E[x]$. Für ein Primelement $p \in E[x]$ liegen die Polynome $t^n - p \in K[t]$ für alle $n \in \mathbf{N}$ nach dem Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein in $\mathfrak{P}$. Daher ist $\zeta \to \mathfrak{s}_0^\zeta$ injektiv. Nun beachte man noch $|\Delta| = |E|$. □

Bemerkung. Statt ε_{x+a} $(a \in E)$ kann man auch E-Automorphismen der Form $\varepsilon_{a\cdot x}$ $(a \in E^*)$ wählen.

4. Es sei $K = E((\Gamma))$ ein Potenzreihenkörper auf Γ über E (vgl. Abschnitt 1.2) und $\Delta \subset \mathrm{Aut}(E)$ eine abelsche Gruppe.

Wir setzen jeden Automorphismus $\psi \in \Delta$ vermöge der Vorschrift

$$\hat{\psi} : \sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma a_\gamma \to \sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma \psi(a_\gamma)$$

zu einem Automorphismus von K fort. Es ist $\Delta_K := \{\hat{\psi} \mid \psi \in \Delta\}$ eine abelsche Gruppe von Automorphismen von K.

Für jedes $k = \sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma a_\gamma \in K$ und $\delta \in \Delta_K$ gilt $v(k^{-1}\delta(k)) = 1$ für die Ordnungsbewertung v von K und das neutrale Element 1 der Gruppe Γ. Es folgt $v(a) = 1$ für jedes $a \in N = \langle\{k^{-1}\delta(k) \mid k \in K, \delta \in \Delta_K\}\rangle$.

Damit ist die folgende Abbildung für jeden beliebigen Homomorphismus $\omega : \Gamma \to \Delta_K$ ein (wohldefinierter) Homomorphismus:

$$\mathfrak{r}_0^\omega : \begin{cases} K^*/N & \to \Delta_K \\ kN & \to \omega(v(k)) \end{cases}$$

Für $\hat{\psi} \in \Delta_K$ gilt $v(\hat{\psi}(x)) = v(x)$ für jedes $x \in K$. Es seien $p_1, p_2 \in \widetilde{\Delta}_K(p)$, d.h. $p_1 = \widetilde{\hat{\psi}}(p_2)$ für ein $\widetilde{\hat{\psi}} \in \widetilde{\Delta}_K$ und $n : p \to n(p)$ sei die Abbildung, die jedem $p \in \mathfrak{P}$ den niedrigsten Koeffizienten zuordnet. Die Gleichungskette

$$v(n(p_1)) = v(n(\widetilde{\hat{\psi}}(p_2))) = v(\hat{\psi}(n(p_2))) = v(n(p_2))$$

liefert (mit der Wahl eines beliebigen Homomorphismus $\omega' : \Gamma \to \Delta_K$) die Wohldefiniertheit der Abbildung:

$$\mathfrak{s}_0^{\omega'} : \begin{cases} \mathfrak{B} & \to \Delta_K \\ \widetilde{\Delta}_K(p) & \to \omega'(v(n(p))) \end{cases}$$

5. Wieder sei $K = E((\Gamma))$ ein Potenzreihenkörper, und $\Delta_\Gamma \subset o\text{-Aut}(\Gamma)$ sei eine abelsche Gruppe isotoner Automorphismen von Γ. Jedem $\varphi \in \Delta_\Gamma$ wird vermöge der Vorschrift

$$\hat{\varphi} : \sum_{\gamma\in\Gamma} X^\gamma a_\gamma \to \sum_{\gamma\in\Gamma} X^{\varphi(\gamma)} a_\gamma$$

ein Automorphismus von K zugeordnet. Es ist $\Delta_K := \{\hat{\varphi} \,|\, \varphi \in \Delta_\Gamma\}$ eine abelsche Gruppe von Automorphismen von K.

Es sei $k \in K$ und $\hat{\varphi} \in \Delta_K$. Für die Ordnung eines Elementes $k^{-1}\hat{\varphi}(k) \in N$ erhält man: $v(k^{-1}\hat{\varphi}(k)) = -v(k) + \varphi(v(k))$.

Wählt man etwa $\Gamma := (\mathbf{R}^{>0}, \cdot, \leq) \times_{lex} (\mathbf{R}, +, \leq)$ und

$$\Delta_\Gamma = \{\varphi_\alpha : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \Gamma \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \to (\gamma_1, \alpha \cdot \gamma_2) \end{cases} \,|\, \alpha \in \mathbf{R}^{>0}\}$$

so erhält man: $-v(k) + \varphi_\alpha(v(k)) = (1, \gamma)$ für ein $\gamma \in \mathbf{R}$.

Es bezeichne p die Projektion: $p : \Gamma \to \mathbf{R}^{>0}$, $(\gamma_1, \gamma_2) \to \gamma_1$. Damit erhalten wir:

Es ist

$$\mathfrak{r}_0 : \begin{cases} K^*/N & \to \Delta_K \\ kN & \to \hat{\varphi}_{p(v(k))} \end{cases}$$

ein (wohldefinierter) Homomorphismus.

Beweis. Aus $kN = k'N$ folgt $k^{-1}k' \in N$ und damit $v(k^{-1}k') = (1, \gamma)$ für ein $\gamma \in \mathbf{R}$. Somit ist $\mathfrak{r}_0(k^{-1}k'N) = \mathrm{Id}_K$.

Es sei $p(v(k)) = \gamma$ und $p(v(k')) = \gamma'$. Dann erhalten wir $\mathfrak{r}_0(kN \cdot k'N) = \hat{\varphi}_{p(v(kk'))} = \hat{\varphi}_{\gamma\gamma'} = \hat{\varphi}_\gamma \circ \hat{\varphi}_{\gamma'} = \hat{\varphi}_{p(v(k))} \circ \hat{\varphi}_{p(v(k'))}$. □

Mit jeder Wahl einer Abbildung

$$\mathfrak{s}_0 : \begin{cases} \mathfrak{B} & \to \Delta_K \\ \widetilde{\Delta}_K(p) & \to \mathfrak{s}_0(\widetilde{\Delta}_K(p)) \end{cases}$$

erhalten wir somit nach (4.1) eine starke t-Kopplung auf F.

Es gibt mindestens $2^{2^{|\mathbf{R}|}}$ Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in Δ_K.

Beweis. Für $\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}$ und $\alpha \neq \alpha'$ gilt $\varphi_\alpha \neq \varphi_{\alpha'}$. Somit ist $|\Delta_K| = |\mathbf{R}|$ und $|\widetilde{\Delta}_K(p)| \leq |\mathbf{R}|$ für alle $p \in \mathfrak{P}$. Da $|\mathfrak{P}| = |K| = |E|^{|\Gamma|} \geq 2^{|\mathbf{R}|} > |\mathbf{R}| \geq |\widetilde{\Delta}_K(p)|$ für alle $p \in \mathfrak{P}$, erhalten wir, daß $|\mathfrak{B}| \geq 2^{|\mathbf{R}|}$. □

4.3 Nicht-starke t-Kopplungen von F

Für ein $\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$ bezeichne $\widetilde{\varphi}$ stets die Fortsetzung von φ zu einem t-Automorphismus von F.

Nicht-starke Kopplungen auf F erhält man mit dem folgenden Verfahren – (vgl. auch [21], (2.10):

(4.3) Lemma. *Es sei φ eine Kopplung auf K und $\tau : F^* \to K^*$ ein Homomorphismus.*

Falls $\varphi_{\tau(x)} \circ \tau = \tau \circ \widetilde{\varphi}_{\tau(x)}$ für alle $x \in F^*$ erfüllt ist, so liefert die Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} \end{cases}$$

eine t-Kopplung auf F.

Ist φ keine starke Kopplung und gilt $\tau(K^*) = K^*$, so ist auch $\widetilde{\varphi}$ nicht stark.

Beweis. Es seien $x, y \in F^*$. Da τ ein Homomorphismus und φ eine Kopplung auf K ist, gilt

$$\widetilde{\varphi}_{\tau(x\widetilde{\varphi}_{\tau(x)}(y))} = \widetilde{\varphi}_{\tau(x)\tau(\widetilde{\varphi}_{\tau(x)}(y))} = \widetilde{\varphi}_{\tau(x)\varphi_{\tau(x)}(\tau(y))} = \widetilde{\varphi_{\tau(x)} \circ \varphi_{\tau(y)}} = \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} \circ \widetilde{\varphi}_{\tau(y)}.$$

Ist $\widetilde{\varphi}$ eine starke Kopplung, so gilt für alle $x, y \in K^*$

$$\widetilde{\varphi}_{\tau(xy)} = \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} \circ \widetilde{\varphi}_{\tau(y)} = \widetilde{\varphi_{\tau(x)} \circ \varphi_{\tau(y)}}, \text{ also } \varphi_{\tau(x)\tau(y)} = \varphi_{\tau(xy)} = \varphi_{\tau(x)} \circ \varphi_{\tau(y)}.$$

□

Beispiele

1. Für das folgende Beispiel siehe auch Satz (3.2) in [21] – $h(x)$ bzw. $n(x)$ bezeichne den höchsten bzw. niedrigsten Koeffizienten von $x \in F^*$:

Es seien φ eine Kopplung auf K und $\alpha \in Aut(K)$ mit $\alpha \circ \varphi_x = \varphi_x \circ \alpha$ für alle $x \in K^*$ gegeben.

Dann sind

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha,h} : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \widetilde{\varphi}_{\alpha(h(x))} \end{cases}$$

und

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha,n} : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \widetilde{\varphi}_{\alpha(n(x))} \end{cases}$$

t-Kopplungen auf F.

Beweis. Es sei $k = h$ oder $k = n$. Bekanntlich ist $\alpha \circ k$ ein Homomorphismus von F^* in

K^*. Da $\widetilde{\varphi}_y(t) = t$ für alle $y \in K^*$ erfüllt ist, gilt offenbar $\varphi_{\alpha(k(x))} \circ k = k \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha(k(x))}$ für alle $x \in K^*$, somit $\alpha \circ \varphi_{\alpha(k(x))} \circ k = \alpha \circ k \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha(k(x))}$ für alle $x \in K^*$. Und diese Gleichung ist wegen der Voraussetzung mit $\varphi_{\alpha(k(x))} \circ \alpha \circ k = \alpha \circ k \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha(k(x))}$ für alle $x \in K^*$ gleichwertig. Aus (4.3) (angewandt auf $\alpha \circ k = \tau$) folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung. Es seien L', L Schiefkörper, φ' eine Kopplung auf L' sowie φ eine solche auf L. Dann bezeichnet man $((L')^{\varphi'}, L')/(L^{\varphi}, L)$ nach [21] als **Paarerweiterung**, falls L ein Teilschiefkörper von L' sowie L^{φ} ein Teilfastkörper von $(L')^{\varphi'}$ ist. Im Fall $\alpha = \mathrm{Id}_K$ handelt es sich nach [21] bei $(F^{\widetilde{\varphi}_{\alpha,k}}, F)$ – $k \in \{h, n\}$ – um eine Paarerweiterung von (K^{φ}, K). Dies gilt für $\alpha \neq \mathrm{Id}_K$ im allgemeinen nicht.

2. Wieder sei φ eine Kopplung auf K.

Es sei ω eine Bewertungsfortsetzung einer Bewertung ν von K auf F mit der Wertegruppe Γ_ω, und es sei $\sigma : \Gamma_\omega \to K^*$ ein Homomorphismus (man beachte, daß Bewertungen von $F = K(t)$ invariant sind).

Wir setzen $\tau := \sigma\omega$.

Für alle $x \in F^*$ gelte $\widetilde{\varphi}_{\tau(x)} \in \omega$-$Aut(F)$ und $\varphi_{\tau(x)} \circ \tau = \tau$.
Dann liefert die Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} \end{cases}$$

eine t-Kopplung auf F.

Beweis. Es ist τ ein Homomorphismus von F^* in K^*, und die Voraussetzungen besagen, daß für alle $x \in F^*$

$$\tau \circ \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} = \sigma \circ \omega \circ \widetilde{\varphi}_{\tau(x)} = \sigma \circ \omega = \tau = \varphi_{\tau(x)} \circ \tau$$

erfüllt ist. Man beachte nun Lemma (4.3). □

Bemerkungen. (I) Es ist $\varphi_{\tau(x)} \circ \tau = \tau$ insbesondere dann erfüllt, wenn τ ein Homomorphismus von F^* in den Fixfastkörper P_φ von Δ_φ ist.

(II) Auch bei diesen Beispielen handelt es sich im allgemeinen nicht um Paarerweiterungen.

Kapitel 5

K-Kopplungen von F

Es sind ein Körper K und eine transzendente Erweiterung $F := K(t)$ gegeben.

Zur Konstruktion von Kopplungen ε auf F mit $\Delta_\varepsilon \subset \mathrm{Aut}_K(F)$ sind zahlreiche Methoden bekannt (vgl. [29]). Wir behandeln in diesem Abschnitt ausschließlich starke Kopplungen ε auf F mit $\Delta_\varepsilon \subset \mathrm{Aut}_K(F)$ und nennen solche Kopplungen kurz *starke K-Kopplungen*.

Eine Beschreibung aller starken K-Kopplungen wurde bereits von H. Wähling in [29], S. 157ff angegeben. Diese Ergebnisse werden in Abschnitt 5.2 wiederholt und etwas verschärft.

In Abschnitt 5.3 zeigen wir, daß, falls ε eine starke K-Kopplung auf F ist, der Dicksonsche Fastkörper F^ε isomorph zu einem Fastkörper $F^{\hat{\varepsilon}}$ ist, wobei $\hat{\varepsilon}$ eine Kopplung vom Typ 1 bzw. 2 bzw. 3 ist und diese drei Typen starke K-Kopplungen von *einfacher* Form sind.

Mit Hilfe von Ergebnissen in [11] wird dieses Kapitel dann in Abschnitt 5.4 durch Beispiele ergänzt.

5.1 Bezeichnungen

Wir bezeichnen starke Kopplungen ε, deren Dicksongruppe Δ_ε in $\mathrm{Aut}_K(F)$ enthalten ist, als **starke K-Kopplungen**. Die Menge der nichttrivialen starken K-Kopplungen bezeichnen wir mit K-$\mathfrak{K}_s$.

Es seien $\mathfrak{M}$ die K-Algebra der quadratischen zweireihigen Matrizen über K, I die Einheitsmatrix aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^\times := \mathrm{GL}(2, K)$ die Einheitengruppe von $\mathfrak{M}$. Weiterhin seien $\overline{A} := K^* \cdot A$ für $A \in \mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{U}} := \{\overline{A} \mid A \in \mathfrak{U}\}$ für jede Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$, insbesondere $\overline{\mathfrak{M}^\times} = \mathfrak{M}^\times/(K^* \cdot I)$ die projektive lineare Gruppe und $Z_{\mathfrak{M}^\times}(M)$ der Zentralisator von M in $\mathfrak{M}^\times$.

Es bezeichne $D(M)$ die Determinante und $S(M)$ die Spur von $M \in \mathfrak{M}$ sowie $\mathfrak{P}$ die Menge der normierten Primpolynome aus $K[t]$.

Für einen K-Automorphismus ψ von F sei $\psi(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ mit $a, b, c, d \in K$ und $ad \neq cb$. Es ist bekanntlich

$$(i) \quad \pi : \psi \to \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

ein Isomorphismus von der Gruppe $\mathrm{Aut}_K(F)$ auf $\overline{\mathfrak{M}^\times}$.

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\times$ sei der durch $\varepsilon_A(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ gegebene K-Automorphismus ε_A von F erklärt. Es gilt:

$$(ii) \quad \varepsilon_A = \varepsilon_B \quad \Leftrightarrow \quad B \in \overline{A}.$$

Nützlich und wohlbekannt ist:

(5.1) *Für $M, N \in \mathfrak{M}^\times$ gilt*

$$\varepsilon_{MN} = \varepsilon_N \circ \varepsilon_M \text{ und } \varepsilon_M^{-1} = \varepsilon_{M^{-1}}.$$

Wegen des häufigen Auftretens bezeichnen wir den Sachverhalt, daß eine Gruppe Γ keine Kleinsche Vierergruppe ist, kurz mit $\Gamma \neq V$.

5.2 Die starken K-Kopplungen von F

5.2.1 Vorbereitungen

H. Wähling untersuchte in [29] die starken K-Kopplungen ε von F. Wir geben diese Ergebnisse, soweit sie hier benötigt werden, wieder:

Für die folgende Aussage (c) vgl. man [29], S. 158; die Aussagen (a) und (b) sind wohlbekannt:

(5.2) *(a) $K \cdot I$ ist das Zentrum von $\mathfrak{M}$.*

(b) Für jedes $A \in \mathfrak{M} \setminus K \cdot I$ ist $K \cdot A + K \cdot I$ der Zentralisator von A in $\mathfrak{M}$.

(c) Eine maximale abelsche Untergruppe von $\overline{\mathfrak{M}^\times}$ ist eine Kleinsche Vierergruppe oder von der Form $\overline{Z_{\mathfrak{M}^\times}(A)}$ für eine Matrix $A \in \mathfrak{M}^\times \setminus K \cdot I$.

Das Bild jedes Homomorphismus von F^* in $\overline{\mathfrak{M}^\times}$ ist abelsch. Somit folgt – für π vgl. (i):

(5.3) *Zu jedem $\varepsilon \in K$-$\mathfrak{K}_s$ mit $\Delta_\varepsilon \neq V$ gibt es eine Matrix $A \in \mathfrak{M}^\times \setminus K \cdot I$ derart, daß $\pi\varepsilon(F^*) \subset \overline{Z_{\mathfrak{M}^\times}(A)}$.*

Es sei $\varepsilon \in K$-$\mathfrak{K}_s$. Wir nennen jede Matrix A, die $\pi\varepsilon(F^*) \subset \overline{Z_{\mathfrak{M}^\times}(A)}$ erfüllt, eine **zu ε gehörige Matrix.**

Von der folgenden wohlbekannten Tatsache machen wir mehrfach Gebrauch:

(5.4) *Es sei A eine zu einer nichttrivialen starken K-Kopplung ε gehörige Matrix. Dann gilt:*

Es ist $B \in \mathfrak{M}$ genau dann eine zu ε gehörige Matrix, wenn $B \in K^* \cdot A + K \cdot I$.

Insbesondere gilt: Für jedes $B \in K^* \cdot A + K \cdot I$ ist $K \cdot A + K \cdot I = K \cdot B + K \cdot I$.

Es sei $\varepsilon \in K$-$\mathfrak{K}_s$ mit $\Delta_\varepsilon \neq V$. Für jedes $\varphi \in \Delta_\varepsilon \setminus \{\mathrm{Id}_F\}$ gilt $\varphi = \varepsilon_A$ für eine Matrix $A \in \mathfrak{M}^\times \setminus K \cdot I$. Es ist A eine zu ε gehörige Matrix.

Wir halten fest – vgl. auch [29], S. 159:

(5.5) Lemma. *Es sei $\varepsilon \in K$-$\mathfrak{K}_s$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\times \setminus K \cdot I$ eine zu ε gehörige Matrix.*

Dann gilt:

(1) Hat A genau einen Eigenwert λ, dann gibt es eine Matrix $M \in \mathfrak{M}^\times$, so daß $M^{-1} \cdot B \cdot M$ die Form $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ für alle $B \in K^* \cdot A + K \cdot I$ hat.

Dabei ist $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ ist, der durch $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des K^2 ergänzt wird.

(2) Hat A zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ, dann gibt es eine Matrix $M \in \mathfrak{M}^\times$, so daß $M^{-1} \cdot B \cdot M$ die Form $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ für alle $B \in K^* \cdot A + K \cdot I$ hat.

Dabei ist $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu λ bzw. μ sind.

(3) Hat A keine Eigenwerte und gilt $\mathrm{Char}K \neq 2$, so kann man o. E. voraussetzen, daß $S(A) = 0$. Weiter gibt es eine Matrix $M \in \mathfrak{M}^\times$, so daß $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ für $y, z \in K^*$.

Beweis. (1) und (2) folgen mit elementaren Mitteln der Linearen Algebra.

(3) Es ist $A' := A - \frac{1}{2}S(A) \cdot I \in K^* \cdot A + K \cdot I \setminus K \cdot I$ und $S(A') = 0$. Mit (5.4) folgt, daß A' eine zu ε gehörige Matrix ist. Es sei also nun $S(A) = 0$ vorausgesetzt.

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, und setzt man $M := \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – es ist $c \neq 0$ – so folgt, daß $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ für gewisse $y, z \in K^*$. □

Es seien $a \in K$, $c \in K \setminus K^{(2)}$ [1] gegeben und $A := \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Ferner sei $e \notin K$ und $K_e := K \cup \{e\}$, und es sei eine Verknüpfung $\circ_A$ in K_e vermöge

$$a \circ_A b := \begin{cases} e, & \text{falls } a + b = 0 \\ \frac{ab - D(A)}{a+b}, & \text{falls } a + b \neq 0 \end{cases}$$

für alle $a, b \in K$ sowie $e \circ_A a := a =: a \circ_A e$ für jedes $a \in K_e$ erklärt. Nach [29], S. 159 ist $(K_e, \circ_A)$ eine kommutative Gruppe; und die Abbildung

$$\begin{cases} \overline{\begin{pmatrix} x & c \\ 1 & x \end{pmatrix}} & \rightarrow \ x, \quad x \in K \\ \quad \overline{I} & \rightarrow \ e \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus von der multiplikativen Gruppe $\overline{Z_{\mathfrak{M}^\times}(A)}^*$ in $(K_e, \circ_A)$.

5.2.2 K-$\mathfrak{K}_s$

Mit (5.5) und [29], (8.5) gilt:

(5.6) *(a) Es seien $M \in \mathfrak{M}^\times$, ρ ein Homomorphismus von $(K^*, \cdot)$ in $(K, +)$ und σ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in K mit der Eigenschaft:*

Für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$ gilt

$$\tau\left(p\left(\frac{a_x \cdot t + b_x}{c_x \cdot t + d}\right)\right) = \sigma(p),$$

wobei τ den eindeutig bestimmten Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(K, +)$, der ρ und σ fortsetzt, bezeichnet und $a_x, b_x, c_x, d_x \in K$ durch

$$A_x := \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tau(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$$

[1] $K^{(2)}$ bezeichne die Menge der Quadrate in K.

gegeben sind. Dann ist

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ x & \to \quad \varepsilon_{A_x} \end{cases}$$

eine starke K-Kopplung auf F.

(b) Es seien $M \in \mathfrak{M}^\times$, ρ ein Homomorphismus von $(K^*,\cdot)$ in $(K^*,\cdot)$ und σ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in K^* mit der Eigenschaft:

Für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$ gilt

$$\tau\left(p\left(\frac{a_x \cdot t + b_x}{c_x \cdot t + d}\right)\right) = \sigma(p),$$

wobei τ den eindeutig bestimmten Homomorphismus von $(F^*,\cdot)$ in $(K^*,\cdot)$, der ρ und σ fortsetzt, bezeichnet und $a_x, b_x, c_x, d_x \in K$ durch

$$A_x := \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \tau(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$$

gegeben sind. Dann ist

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ x & \to \quad \varepsilon_{A_x} \end{cases}$$

eine starke K-Kopplung auf F.

(c) Es seien $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M} \setminus K \cdot I$ eine Matrix ohne Eigenwerte in K, $M \in \mathfrak{M}^\times$ eine nach (5.5) existierende Matrix mit $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$, für $y, z \in K^*$, ρ ein Homomorphismus von $(K^*,\cdot)$ in $(K_e, \circ_A)$ und σ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in K_e mit der Eigenschaft:

Für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$ gilt

$$\tau\left(p\left(\frac{(\tau(x)+a)\cdot t + c}{1t + (\tau(x) - a)}\right)\right) = \sigma(p), \text{ wenn } \tau(x) \neq e,$$

wobei τ den eindeutig bestimmten Homomorphismus von $(F^*,\cdot)$ in $(K_e, \circ_A)$, der ρ und σ fortsetzt, bezeichnet.

Es sei $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & c \\ 1 & \tau(x) \end{pmatrix}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $D_x = I$ (falls $\tau(x) = e$). Dann ist

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{M \cdot D_x \cdot M^{-1}} \end{cases}$$

eine starke K-Kopplung auf F.

(d) Ist umgekehrt $\varepsilon \in K$-$\mathfrak{K}_s$, $\Delta_\varepsilon \neq V$ und $CharK \neq 2$, so kann ε auf eine der in (a), (b) und (c) beschriebenen Weisen konstruiert werden.

5.3 Reduktion

5.3.1 Isomorphiebetrachtungen

Wir zeigen, daß es im wesentlichen nur drei Typen von starken K-Kopplungen auf F gibt. Die Zugehörigkeit einer Kopplung zu einem *Typ* ist abhängig von der Anzahl der Eigenwerte einer zu der Kopplung gehörigen Matrix A.

Wesentliches Hilfsmittel ist hierfür der Teil (a) der folgenden, in [29], S. 87 angegebenen Aussage:

(5.7) *Es sei τ ein Isomorphismus zwischen den Fastkörpern F und F'.*
(a) Es ist

$$\begin{cases} \mathfrak{K}(F) & \to \mathfrak{K}(F') \\ \kappa & \to \kappa' : \begin{cases} (F')^* & \to Aut(F') \\ \tau(x) & \to \kappa'_{\tau(x)} := \tau\kappa_x\tau^{-1} \end{cases} \qquad (x \in F^*) \end{cases}$$

eine Bijektion, und τ ist ein Isomorphismus von F^κ auf $(F')^{\kappa'}$.
Die Aussage gilt entsprechend für $\mathfrak{K}_s$ anstelle von $\mathfrak{K}$.

(b) Sind w eine Bewertung von F und κ eine A_w-Kopplung (bzw. w-Kopplung) (vgl. Abschnitt 3.1) auf F, dann ist κ' (vgl. (a)) eine $A_{w'}$-Kopplung (bzw. w'-Kopplung) auf $(F')^{\kappa'}$, wobei $w' := w\tau^{-1}$, und es gilt dann $(F^\kappa, w) \cong ((F')^{\kappa'}, w')$.

Beweis. (a) Vgl. [29], S. 87.
(b) Offenbar ist $w' := w\tau^{-1}$ eine Bewertung von F' mit $\Gamma_{w'} = \Gamma_w$. Zu $x \in F'$ sei $y \in F$ mit $x = \tau(y)$ gewählt. Aus $x \in A_{w'} \Leftrightarrow w'(x) \leq w'(1) \Leftrightarrow w\tau^{-1}(x) = w(y) \leq w(1) \Leftrightarrow y \in A_w \Leftrightarrow x \in \tau(A_w)$ folgt $A_{w'} = \tau(A_w)$.

Es sei κ eine A_w-Kopplung. Aus $\kappa_x(A_w) = A_w$ für alle $x \in F^*$ (vgl. (1.9.a)) folgt $\kappa'_{\tau(x)}(\tau(A_w)) = \tau\kappa_x\tau^{-1}(\tau(A_w)) = \tau(A_w)$. Nach (1.9.a) ist κ' eine $A_{w'}$-Kopplung.

Und ist κ eine w-Kopplung, so folgt aus $w\kappa_x = w$ für alle $x \in F^*$, daß $w'\kappa'_{\tau(x)} = w\tau^{-1}\tau\kappa_x\tau^{-1} = w\tau^{-1} = w'$ für jedes $x \in F^*$. Also ist κ' eine w'-Kopplung.

Offenbar haben die Bewertungen $w'\tau$ und w den Bewertungsring A_w, hieraus folgt die Isomorphieaussage. □

5.3.2 Fallunterscheidung

Es sei $\varepsilon : x \to \varepsilon_{A_x} \in \mathfrak{K}_s(F)$ $(A_x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix})$, $\Delta_\varepsilon \neq V$, Char$K \neq 2$ und $A \in \mathfrak{M}^\times \backslash K{\cdot}I$ eine zu ε gehörige Matrix.

Fall I: Die Matrix A besitzt genau einen Eigenwert λ in K.

Fall II: Die Matrix A besitzt zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ in K.

Fall III: Die Matrix A hat keine Eigenwerte in K, und es sei $S(A) = 0$ – vgl. (5.5).

Diese Fallunterscheidung ist offenbar unabhängig von der Wahl der Matrix A.

Nach (5.6.d) gibt es eine Matrix $M \in \mathfrak{M}^\times$ und einen Homomorphismus τ derart, daß einer der in (a), (b) oder (c) beschriebenen Fälle aus (5.6) vorliegt. Mit dieser Matrix M folgt:

(5.8) Lemma. *Es gilt $F^\varepsilon \cong F^{\hat{\varepsilon}}$ – dabei ist*

$$\hat{\varepsilon} : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ \varepsilon_M(x) & \to \quad \varepsilon_{D_x} \end{cases}$$

mit $D_x = \begin{pmatrix} 1 & \tau(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Fall I); $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Fall II); $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & c \\ 1 & \tau(x) \end{pmatrix}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $D_x = I$ (falls $\tau(x) = e$) und $c \in K^*$ (Fall III).

Beweis. Setzt man in (5.7) $\varepsilon_M = \tau$, so erhält man mit (5.1): $\varepsilon_M(x) \to \varepsilon_M \varepsilon_{A_x} \varepsilon_{M^{-1}} = \varepsilon_{M^{-1}A_xM} = \varepsilon_{D_x}$, wobei D_x nach (5.6.a) (Fall I) bzw. (5.6.b) (Fall II) bzw. (5.6.c) (Fall III) die geforderte Form hat. □

Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen aus (5.8):

Es ist $\hat{\tau} := \tau\varepsilon_{M^{-1}}$ ein Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(K, +)$ bzw. $(K^*, \cdot)$ bzw. $(K_e, \circ_{A_0})$ (wobei $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) und für $\hat{D}_x = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Fall I); $\hat{D}_x = \begin{pmatrix} \hat{\tau}(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Fall II); $\hat{D}_x = \begin{pmatrix} \hat{\tau}(x) & c \\ 1 & \hat{\tau}(x) \end{pmatrix}$ (falls $\hat{\tau}(x) \neq e$) und $\hat{D}_x = I$ (falls $\hat{\tau}(x) = e$) und $c \in K^*$ (Fall III) gilt:

$$\hat{\varepsilon} : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \quad \varepsilon_{\hat{D}_x} \end{cases}$$

Bezeichnungen. Wir nennen eine nichttriviale starke K-Kopplung $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ auf F mit einer zu ε gehörigen Matrix A und dem Homomorphismus τ (vgl. (5.6)) eine **Kopplung vom Typ 1** bzw. **vom Typ 2** bzw. **vom Typ 3**, wenn τ ein Homomorphismus in $(K, +)$ bzw. in $(K^*, \cdot)$ bzw. in $(K_e, \circ_A)$ ist und $r(x) = t + \tau(x)$ bzw. $r(x) = \tau(x) \cdot t$ bzw. $r(x) = \frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)}$ für alle $x \in F^*$ gilt.

Mit diesen Bezeichnungen folgern wir aus (5.8):

(5.9) Korollar. *Es sei $\varepsilon \in K\text{-}\mathfrak{K}_s$, $\Delta_\varepsilon \neq V$ und $CharK \neq 2$. Dann ist F^ε isomorph zu $F^{\hat{\varepsilon}}$, und $\hat{\varepsilon}$ ist eine Kopplung vom Typ 1 oder Typ 2 oder Typ 3.*

5.4 Beispiele

Kopplungen vom Typ 1 bzw. Typ 2 erhält man nach H. Wähling auf folgende Weise (vgl. [29], S. 162):

Typ 1. Es seien ρ ein Homomorphismus von $(K^*, \cdot)$ in $(K, +)$, ω eine beliebige Abbildung von $\mathbf{N}$ in K und τ der ρ und

$$\sigma : \begin{cases} \mathfrak{P} & \to K \\ p & \to \omega(\deg(p)) \end{cases}$$

fortsetzende Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(K, +)$.

Für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$ gilt dann $\tau(p(t + \tau(x))) = \sigma(p)$.

Folglich wird durch

$$\varepsilon_x|_K := \mathrm{Id}_K \text{ und } \varepsilon_x(t) := t + \tau(x) \quad (x \in F^*)$$

eine starke K-Kopplung ε auf F erklärt.

Typ 2. Es seien ω eine beliebige Abbildung von $\mathbf{N}$ in K^* und τ der $\rho : (K^*, \cdot) \to (K^*, \cdot)$, $x \to 1$ und

$$\sigma : \begin{cases} \mathfrak{P} & \to K^* \\ p & \to \omega(\deg(p)) \end{cases}$$

fortsetzende Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(K^*, \cdot)$.

Für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$ gilt dann $\tau(p(\tau(x) \cdot t)) = \sigma(p)$.

Folglich wird durch

$$\varepsilon_x|_K := \mathrm{Id}_K \text{ und } \varepsilon_x(t) := \tau(x) \cdot t \quad (x \in F^*)$$

eine starke K-Kopplung ε auf F erklärt.

Typ 3. Im folgenden sei $K \neq K^{(2)}$, und es sei $A := \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für ein $c \in K \setminus K^{(2)}$.

D. Gröger bewies in [11], (6.2) folgenden Hilfsatz in einer allgemeineren Form.

(5.10) *Es seien $p \in K[t]$ ein normiertes Primpolynom mit dem Grad n und $a \in K$. Weiter sei δ ein K-Automorphismus von F mit $\delta(t) = \frac{at+c}{t+a}$ gegeben.*

Dann ist – für $p \neq t - a$ – auch $p_\delta := p(a)^{-1} \cdot (t + a)^n \cdot p(\frac{at+c}{t+a})$ ein normiertes Primpolynom aus $K[t]$ mit $\deg(p_\delta) = n$.

Beweis. Mit $p = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ ist $p' := (t+a)^n \cdot \sum_{i=0}^n a_i (\frac{at+c}{t+a})^i = \sum_{i=0}^n a_i (at+c)^i \cdot (t+a)^{n-i} \in K[t]$.

Der höchste Koeffizient von p' lautet $\sum_{i=0}^{n} a_i a^i = p(a) \neq 0$ – somit ist p_δ normiert und der Grad von p_δ gleich n.

Es sei $p_\delta = q_1' q_2' \cdots q_m'$ eine Zerlegung von p_δ in irreduzible Faktoren $q_j' \in K[t]$ und $k_j := \deg(q_j')$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Es ist $(t+a)^n \cdot p(\frac{at+c}{t+a}) = k \cdot q_1' q_2' \cdots q_m'$, $k \in K^*$ und Anwendung des t in $\frac{at-c}{-t+a}$ überführenden K-Automorphismus von F liefert

$$(\frac{a^2-c}{-t+a})^n p = k \cdot q_1'(\frac{at-c}{-t+a}) \cdot \ldots \cdot q_m'(\frac{at-c}{-t+a}) = k \cdot \frac{1}{(-t+a)^{k_1}} q_1 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{(-t+a)^{k_m}} q_m$$

für gewisse $q_j \in K[t]$ mit $\deg(q_j) = k_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Mit $k_1 + \ldots + k_m = n$ folgt $p = \frac{1}{(a^2-c)^n} q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, und wegen der Irreduzibilität von p gilt $m = 1$. $\square$

Weiterhin benötigen wir:

(5.11) *Es sei Δ eine Untergruppe von $Aut_K(F)$, und für jedes $\delta \in \Delta \setminus \{Id_K\}$ gelte $\delta(t) = \frac{at+c}{t+a}$ für ein $a \in K$. Dann gilt:*

Δ operiert auf der Menge $\mathfrak{P}_2$ der normierten Primpolynome vom Grad ≥ 2 vermöge

$$\begin{cases} \Delta \times \mathfrak{P}_2 & \to \mathfrak{P}_2 \\ (\delta, p) & \to p_\delta \end{cases}$$

– dabei bezeichne p_δ das gemäß (5.10) zu p gebildete normierte Primpolynom.

Beweis. Nach (5.1) und der Konstruktion unter (5.5) gilt, wenn $A(a) := \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & a \end{pmatrix}$ für $a \in K$ und $A(e) := I$ gesetzt wird:

$$(*) \quad \varepsilon_{A(a)} \circ \varepsilon_{A(a')} = \varepsilon_{A(a \circ_A a')}.$$

Wir haben $(p_\delta)_{\delta'} = p_{\delta'\delta}$ für jedes $p \in \mathfrak{P}_2$ und alle $\delta = \varepsilon_{A(a)}$, $\delta' = \varepsilon_{A(a')} \in \Delta$ zu zeigen. Es sei $p \in \mathfrak{P}_2$ mit $\deg(p) = n$ gegeben.

1. Fall: Es sei $a + a' \neq 0$.

Es gilt wegen (5.10):

$$(p_\delta)_{\delta'} = p_\delta(a')^{-1} \cdot (t+a')^n \cdot \varepsilon_{A(a')}(p_\delta) = p_\delta(a')^{-1} \cdot (t+a')^n \cdot p(a)^{-1} \cdot \varepsilon_{A(a')}((t+a)^n) \cdot \varepsilon_{A(a')} \circ \varepsilon_{A(a)}(p)$$

und

$$p_{\delta'\delta} = p(a \circ_A a')^{-1} \cdot (t + (a \circ_A a'))^n \cdot \varepsilon_{A(a \circ_A a')}(p).$$

Und $(t+a')^n \cdot \varepsilon_{A(a')}((t+a)^n) = (t+a')^n \cdot (\frac{a' \cdot t + c}{t+a'} + a)^n = (a' \cdot t + c + a \cdot t + a \cdot a')^n = ((a+a') \cdot t + (a \cdot a' + c))^n = (a+a')^n \cdot (t + a \circ_A a')^n$.

Da $p_{\delta'\delta}$ und $(p_\delta)_{\delta'}$ normiert sind, folgt mit $(*)$ die Regel $(p_\delta)_{\delta'} = p_{\delta'\delta}$.

2. Fall: Es sei $a + a' = 0$.

Wegen $\delta'\delta = \mathrm{Id}_F$ gilt $p_{\delta'\delta} = p$, und nach dem 1. Fall ist $(p_\delta)_{\delta'} = p_\delta(a')^{-1} \cdot p(a)^{-1} \cdot (a \cdot a' + c)^n \cdot p$. Und da $p_{\delta'\delta}$ und $(p_\delta)_{\delta'}$ normiert sind, folgt wieder $(p_\delta)_{\delta'} = p_{\delta'\delta}$. □

Es seien nun $k : \mathfrak{P}_2 \to K_e$ eine nichtkonstante Abbildung und Δ die von $\{\varepsilon_C \,|\, C \in A + (k(\mathfrak{P}_2) \setminus \{e\}) \cdot I\}$ erzeugte Untergruppe in $\mathrm{Aut}_K(F)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}$ die Menge der Bahnen der Operation $\Delta \times \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$, $(\delta, p) \to p_\delta$ (vgl. (5.11)).

Mit dieser Operation folgt nun:

(5.12) *Es seien $\sigma_1(t - z) = e$ für alle $z \in K$, $\sigma_2 : \mathfrak{P}_2 \to K_e$, $p \to k(p)$ eine auf den Bahnen der Operation konstante Abbildung und $\tau : (F^*, \cdot) \to (K_e, \circ_A)$ der σ_1 und σ_2 fortsetzende Homomorphismus mit $\tau|_{K^*} : x \to e$. Dann gilt:*
Die Abbildung

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{D_x} \end{cases}$$

mit $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & c \\ 1 & \tau(x) \end{pmatrix}$ *(falls $\tau(x) \neq e$) und $D_x = I$ (falls $\tau(x) = e$) ist eine Kopplung vom Typ 3.*

Beweis. Es seien $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$. Es bezeichne $a := \tau(x)$ und $\delta := \varepsilon_{D_x}$. Falls $p = t - z$ für ein $z \in K$, so ist $\tau(p(\delta(t))) = \tau(\frac{a \cdot t + c - z \cdot t - z \cdot a}{t + a}) = e = \sigma_1(p)$. Falls $\deg(p) \geq 2$, so folgt mit $p(\frac{at+c}{t+a}) = (p(a)) \cdot (t + a)^{-n} \cdot p_\delta$ (vgl. (5.10)), daß $\tau(p(\delta(t)) = \tau(p_\delta) = \sigma_2(p_\delta) = \sigma_2(p)$. Nun beachte man noch (5.6). □

Nach (5.10) ist $\deg(p_\delta) = \deg(p)$ für alle $p \in \mathfrak{P}_2$ und $\delta \in \Delta$. Fordert man daher in (5.12), daß σ_2 eine für den Grad der Polynome aus $\mathfrak{P}_2$ konstante Abbildung ist, so erhält man die von D. Gröger in [11], (6.7) angegebenen Beispiele:

(5.13) *Es seien $k : \mathbf{N} \to K_e$ eine nichtkonstante Abbildung mit $k(1) = e$, $\sigma(p) := k(\deg(p))$ für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $\tau : (F^*, \cdot) \to (K_e, \circ_A)$ der σ fortsetzende Homomorphismus mit $\tau|_{K^*} : x \to e$. Dann gilt:*
Die Abbildung

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{D_x} \end{cases}$$

mit $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & c \\ 1 & \tau(x) \end{pmatrix}$ *(falls $\tau(x) \neq e$) und $D_x = I$ (falls $\tau(x) = e$) ist eine Kopplung vom Typ 3.*

Mächtigkeitsaussagen:

(5.14) *Es sei $Char(K) = 0$.*

a) Es gibt höchstens $2^{|K|}$ starke K-Kopplungen auf F.

b) Falls K überabzählbar ist und $K \neq K^{(2)}$ gilt, so gibt es $2^{|K|}$ starke Kopplungen auf F von der in (5.12) beschriebenen Form.

c) Es gibt höchstens $|K|^{\aleph_0}$ starke Kopplungen der Form (5.13).

Beweis. a) ist klar.

b) Es seien $\mathfrak{P}_2$ die Menge der nichtlinearen Primpolynome, P der Primkörper von K und k sei eine Abbildung von $\mathfrak{P}_2$ in P_e (vgl. die Betrachtung vor (5.12)), und es sei Δ die von $\{\varepsilon_C \,|\, C \in A + k(\mathfrak{P}_2) \cdot I\}$ erzeugte Untergruppe in $\mathrm{Aut}_K(F)$. Es ist dann $|\Delta| \leq |P|$. Somit gilt für alle $B \in \mathfrak{B}$: $|B| \leq |P|$. Da $K \neq K^{(2)}$, ist $t^2 - b \in \mathfrak{P}_2$ für jedes $b \in K \setminus K^{(2)}$. Also gilt $|\mathfrak{P}_2| = |K|$, so daß $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{P}_2|$. Damit gibt es also $2^{|K|}$ verschiedene Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in P_e.

c) Es bezeichne $N(K)$ die Menge der natürlichen Zahlen n, für die es ein Primpolynom über K gibt, dessen Grad n ist. Damit gibt es $|K|^{|N(K)|}$ mögliche Abbildungen k von $\mathbf{N}$ in K_e mit $k(1) = e$. $\square$

Kapitel 6

$(K \cdot t)$-Kopplungen

Es sind ein Körper K und eine transzendente Erweiterung $F := K(t)$ gegeben.

Jeder (K)-Automorphismus φ von F hat nach (3.11) eine Zerlegung der Form $\varphi = \varepsilon_A \circ \widetilde{\varphi}_0$. Dabei ist ε_A ein K-Automorphismus und $\widetilde{\varphi}_0$ ein t-Automorphismus. Naheliegend ist daher die Frage, ob sich eine (K)-Kopplung κ (d.h. die Dicksongruppe Δ_κ der Kopplung κ ist in $\mathrm{Aut}_{(K)}(F)$ enthalten) in ein *Produkt* von K- und t-Kopplungen zerlegen läßt. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall (vgl. die Bemerkung nach (6.1)). Die allgemeine Beschreibung der (K)-Kopplungen erweist sich als außerordentlich kompliziert (vgl. (6.1)). Es läßt sich jedoch aus einer (starken) K- und einer (starken) t-Kopplung, unter gewissen Verträglichkeitsbedingungen der beiden Ausgangskopplungen, eine (starke) (K)-Kopplung im Sinne eines Produktes erklären (s. (6.2)). Jede so gewonnene (starke) (K)-Kopplung nennen wir *(starke) $(K \cdot t)$-Kopplung.*

Wir zeigen dann im Abschnitt 6.2.1, daß jeder durch eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, auf F gewonnene Fastkörper, wobei die K-Kopplung nichttrivial ist, isomorph zu einer Ableitung von F ist, die durch eine Kopplung von *einfacher* Form gewonnen werden kann: Mit Ausnahme eines Falles ist dies wieder eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung auf F, wobei dann die K-Kopplung dieses Produktes eine Kopplung vom Typ 1 oder Typ 2 oder Typ 3 ist. Den Ausnahmefall diskutieren wir in Abschnitt 6.2.2.

Jede starke t-Kopplung läßt sich mit Hilfe eines Homomorphismus $\mathfrak{r}$ und einer Abbildung $\mathfrak{s}$ beschreiben (Kapitel 4). Ähnlich ist die Situation bei den starken K-Kopplungen (Kapitel 5) – hierbei erfolgt die Beschreibung durch einen Homomorphismus ρ und einer Abbildung σ. Wir drücken im Abschnitt 6.3 die an die starken K- und t-Kopplungen gerichteten Verträglichkeitsbedingungen dafür, daß es sich bei deren *Produkt* um eine $(K \cdot t)$-Kopplung handelt, durch diese Abbildungen $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \rho$ und σ aus und konstruieren mit Hilfe dieser Ergebnisse in Abschnitt 6.3.2 Beispiele von $(K \cdot t)$-Kopplungen.

6.1 Zerlegung

Wir untersuchen Kopplungen (bzw. starke Kopplungen) κ auf F, die $\Delta_\kappa \subset \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$ erfüllen und nennen solche Kopplungen kurz (K)**-Kopplungen** (bzw. **starke** (K)**-Kopplungen** – in dieser Situation schreiben wir $\kappa \in (K)$-$\mathfrak{K}$ (bzw. $\kappa \in (K)$-$\mathfrak{K}_s$).

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\times = \mathrm{GL}(2, K)$ (vgl. Abschnitt 5.1) sei $q := \frac{at+b}{ct+b}$ erklärt. Wir benutzen in diesem Abschnitt 6.1 der Übersichtlichkeit halber die Schreibweise ε_q anstatt ε_A – vgl. Abschnitt (5.1): Es ist ε_q der K-Automorphismus von F, der $\varepsilon_q(t) = q$ erfüllt.

Im folgenden wird mehrfach von der nach (3.11) geltenden Zerlegung eines (K)-Automorphismus κ_x Gebrauch gemacht: $\kappa_x = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \widetilde{\kappa}_x^0$, dabei ist $\widetilde{\kappa}_x^0$ der $\kappa_x^0 := \kappa_x|_K$ fortsetzende t-Automorphismus von F.

(6.1) *(a) Es ist $\kappa : F^* \to Aut(F)$, $x \to \kappa_x = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \widetilde{\kappa}_x^0$ genau dann eine (K)-Kopplung, wenn für alle $x, y \in F^*$ gilt*

(i) $\varepsilon_{\kappa_{x\kappa_x(y)}(t)} = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \varepsilon_{\widetilde{\kappa}_x^0(\kappa_y(t))}$

(ii) $\widetilde{\kappa}_{x\kappa_x(y)}^0 = \widetilde{\kappa}_x^0 \circ \widetilde{\kappa}_y^0$.

(b) Es ist $\kappa : F^* \to Aut(F)$, $x \to \kappa_x$ genau dann eine starke (K)-Kopplung, wenn für alle $x, y \in F^*$ gilt

(i) $\varepsilon_{\kappa_{xy}(t)} = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \varepsilon_{\widetilde{\kappa}_x^0(\kappa_y(t))}$ *und* $\varepsilon_{\kappa_{\kappa_x(y)}(t)} = \varepsilon_{\kappa_y(t)}$

(ii) $\widetilde{\kappa}_{xy}^0 = \widetilde{\kappa}_x^0 \circ \widetilde{\kappa}_y^0$ *und* $\widetilde{\kappa}_{\kappa_x(y)}^0 = \widetilde{\kappa}_y^0$.

Beweis. Offenbar gilt für alle $x, y \in F^*$: $\widetilde{\kappa}_x^0 \circ \varepsilon_{\kappa_y(t)} = \varepsilon_{\widetilde{\kappa}_x^0(\kappa_y(t))} \circ \widetilde{\kappa}_x^0$. Damit erhält man $\kappa_x \circ \kappa_y = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \widetilde{\kappa}_x^0 \circ \varepsilon_{\kappa_y(t)} \circ \widetilde{\kappa}_y^0 = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \varepsilon_{\widetilde{\kappa}_x^0(\kappa_y(t))} \circ \widetilde{\kappa}_x^0 \circ \widetilde{\kappa}_y^0 = \kappa_{x\kappa_x(y)} = \varepsilon_{\kappa_{x\kappa_x(y)}(t)} \circ \widetilde{\kappa}_{x\kappa_x(y)}^0 \Leftrightarrow$ $(i), (ii)$. Mit der Bemerkung (g) nach (1.2) erhält man entsprechend die Aussage für die starke Kopplung. $\square$

Bemerkung. Es seien $\kappa : F^* \to \mathrm{Aut}_{(K)}(F)$, $x \to \kappa_x = \varepsilon_{\kappa_x(t)} \circ \varphi_x$ eine (K)-Kopplung. Die Abbildungen $\varepsilon : F^* \to \mathrm{Aut}_K(F)$, $x \to \varepsilon_{\kappa_x(t)}$ bzw. $\varphi : F^* \to Aut_{(K)}(F)$, $x \to \varphi_x$ sind dann im allgemeinen keine Kopplungen auf F:

Es seien $z \in K$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$ und $\widetilde{\varphi}$ bezeichne die Fortsetzung von φ zu einem t-Automorphismus von F.

Wir setzen $z_0 := 1$ und für alle $k \in \mathbf{N}$ seien $z_k := z\varphi(z) \cdot \ldots \cdot \varphi^{k-1}(z)$ sowie $z_{-k} := (\varphi^{-1}(z) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-k}(z))^{-1}$.

Bekanntlich ist die Abbildung $d : x = \frac{f}{g} \to \deg(f) - \deg(g)$ von F^* in $\mathbf{Z}$ ein Homomorphismus.

Damit gilt:

Es ist

$$\kappa : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \varepsilon_{z_{d(x)}\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^{d(x)} \end{cases}$$

eine starke (K)*-Kopplung auf* F*, und es ist, falls* $\varphi(z) \neq z$*,*

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \varepsilon_{z_{d(x)}\cdot t} \end{cases}$$

keine Kopplung auf F*.*

Beweis. Offenbar ist κ eine Abbildung von F^* in $\mathrm{Aut}_{(K)}(F)$. Es seien $x, y \in F^*$. Es gilt $d(\kappa_x(y)) = d(y)$. Wir setzen $a := \kappa_x(y)$. Dann ist $\kappa_a = \varepsilon_{z_{d(a)}\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^{d(a)}(y)$ und $\kappa_y = \varepsilon_{z_{d(y)}\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^{d(y)}$. Wegen $d(a) = d(y)$ (und somit $z_{d(a)} = z_{d(y)}$), liefert dies $\kappa_{\kappa_x(y)} = \kappa_a = \kappa_y$.

Eine elementare Überlegung zeigt: $(*)\ \ z_{(d(x)+d(y))} = z_{d(x)} \cdot \varphi^{d(x)}(z_{d(y)})$. Damit erhalten wir – mit den Akürzungen $m := d(x)$ und $n := d(y)$:

$\kappa_{xy} = \varepsilon_{z_{d(xy)}\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^{d(xy)} = \varepsilon_{z_{m+n}\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^{m+n} = \varepsilon_{z_m \cdot \varphi^m(z_n)\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^m \circ \widetilde{\varphi}^n = \varepsilon_{z_m\cdot t} \circ \varepsilon_{\varphi^m(z_n)\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^m \circ \widetilde{\varphi}^n = \varepsilon_{z_m\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^m \circ \varepsilon_{z_n\cdot t} \circ \widetilde{\varphi}^n = \kappa_x \circ \kappa_y$.

Es seien $x, y \in F^*$ und $a := x\varepsilon_{z_{d(x)}\cdot t}(y)$. Damit ist $\varepsilon_{z_{d(a)}\cdot t} = \varepsilon_{z_{d(x)}\cdot t}\varepsilon_{z_{d(y)}\cdot t} = \varepsilon_{z_{d(x)}z_{d(y)}\cdot t}$ – wegen $d(a) = d(xy) = d(x) + d(y)$ – gleichwertig mit $z_{d(x)}z_{d(y)} = z_{d(x)+d(y)} \overset{(*)}{=} z_{d(x)} \cdot \varphi^{d(x)}(z_{d(y)})$. Wäre also ε eine Kopplung, so wäre für alle $x, y \in F^*$ die Gleichung $\varphi^{d(x)}(z_{d(y)}) = z_{d(y)}$ erfüllt, insbesondere also auch $\varphi(z) = z$. $\square$

Bemerkung. Es ist $\varphi : F^* \to \mathrm{Aut}(F),\ x \to \widetilde{\varphi}^{d(x)}$ hingegen eine starke t-Kopplung.

Um (K)-Kopplungen auf F zu gewinnen, ist folgendes Vorgehen naheliegend:

Es seien

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \quad \varepsilon_{r(x)} \end{cases}$$

mit $r(x) = \frac{a_x t + b_x}{c_x t + d_x}$, $a_x, b_x, c_x, d_x \in K$ und $a_x d_x - b_x c_x \neq 0$ eine K-Kopplung auf F und

$$\varphi : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_t(F) \\ x & \to \quad \varphi_x \end{cases}$$

eine t-Kopplung auf F.

Mit diesen Kopplungen läßt sich – unter weiteren Voraussetzungen – eine (K)-Kopplung auf F konstruieren:

(6.2) *(a) Es ist*

$$(*) \qquad (\varepsilon \cdot \varphi) : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \varepsilon_{r(x)} \circ \varphi_x \end{cases}$$

genau dann eine (K)-Kopplung auf F, wenn für alle $x, y \in F^*$

(i) $\quad r(\varphi_y(x)) = \varphi_y(r(x))$,

(ii) $\quad \varphi_{\varepsilon_{\varphi_x^{-1}(r(x))}(y)} = \varphi_y$.

(b) Es seien ε und φ starke Kopplungen auf F. Es liefert $(*)$ genau dann eine starke (K)-Kopplung auf F, wenn für alle $x, y \in F^*$

(i) $\quad \varphi_y(r(x)) = r(x)$,

(ii) $\quad r(\varphi_y(x)) = r(x)$,

(iii) $\quad \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \varphi_y$.

(c) Es seien ε und φ starke Kopplungen auf F und P_φ der Fixfastkörper von Δ_φ. Für die Bedingungen $(i), (ii), (iii)$ aus (b) gilt:

(i) $\quad \Leftrightarrow \quad \{r(x) \,|\, x \in F^*\} \subset P_\varphi$.

$(i), (ii), (iii)$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ *ε ist eine starke Kopplung auf F^φ und φ ist eine solche auf F^ε.*

Beweis. Es seien $x, y \in F^*$. Wegen (ii) in Abschnitt 5.1 sei o. E. für $r(x) = \frac{a_x t + b_x}{c_x t + d_x}$ angenommen, daß eines der Elemente a_x, b_x, c_x, d_x gleich 1 ist.

(a) Es ist $(\varepsilon \cdot \varphi)_{x(\varepsilon\cdot\varphi)_x(y)} = (\varepsilon \cdot \varphi)_x \circ (\varepsilon \cdot \varphi)_y \Leftrightarrow \varepsilon_{r(x\varepsilon_{r(x)}\circ\varphi_x(y))} \circ \varphi_{x\varepsilon_{r(x)}\circ\varphi_x(y)} = \varepsilon_{r(x)} \circ \varphi_x \circ \varepsilon_{r(y)} \circ \varphi_y \Leftrightarrow \varepsilon_{r(\varphi_x(y))} \circ \varphi_{x\varphi_x\circ\varepsilon_{\varphi_x^{-1}(r(x))}(y)} = \varphi_x \circ \varepsilon_{r(y)} \circ \varphi_y = \varepsilon_{\varphi_x(r(y))} \circ \varphi_x \circ \varphi_y \Leftrightarrow r(\varphi_x(y)) = \varphi_x(r(y)), \varphi_{\varepsilon_{\varphi_x^{-1}(r(x))}(y)} = \varphi_y$.

(b) Es gilt $(\varepsilon \cdot \varphi)_{xy} = (\varepsilon \cdot \varphi)_x \circ (\varepsilon \cdot \varphi)_y \Leftrightarrow \varepsilon_{r(xy)} \circ \varphi_{xy} = \varepsilon_{r(x)} \circ \varphi_x \circ \varepsilon_{r(y)} \circ \varphi_y \Leftrightarrow \varepsilon_{r(y)} \circ \varphi_x = \varphi_x \circ \varepsilon_{r(y)} \Leftrightarrow r(y) = \varphi_x(r(y))$. Die Behauptung folgt nun mit (a).

(c) Die Gleichwertigkeit von (i) und $\{r(x) \,|\, x \in F^*\} \subset P_\varphi$ ist klar.

Eine elementare Rechnung zeigt, daß die Bedingungen $(i), (ii), (iii)$ gleichwertig damit sind, daß $\varepsilon_{r(x)}$ bzw. φ_x für jedes $x \in F^*$ Automorphismen von F^φ bzw. F^ε sind (vgl. auch [29], Kapitel II, (2.4)).

Die Invarianzbedingungen $\varepsilon_{r(\varepsilon_{r(x)}(y))} = \varepsilon_{r(y)}$ für alle $x, y \in F^*$ an ε auf F^φ bzw. $\varphi_{\varphi_x(y)} = \varphi_y$ für alle $x, y \in F^*$ an φ auf F^ε sind trivialerweise erfüllt. Es seien $\circ_\varepsilon$ bzw. $\circ_\varphi$ die Multiplikationen in F^ε bzw. in F^φ. Dann gilt für $x, y \in F^*$:

$$\varepsilon_{r(x\circ_\varphi y)} = \varepsilon_{r(x\varphi_x(y))} = \varepsilon_{r(x)} \circ \varepsilon_{r(\varphi_x(y))} = \varepsilon_{r(x)} \circ \varepsilon_{r(y)} \Leftrightarrow \varepsilon_{r(\varphi_x(y))} = \varepsilon_{r(y)},$$

und

$$\varphi_{x\circ_\varepsilon y} = \varphi_{x\varepsilon_{r(x)}(y)} = \varphi_x \circ \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \varphi_x \circ \varphi_y \Leftrightarrow \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \varphi_y.$$

□

Bezeichnung. Sind ε eine K-Kopplung (bzw. starke K-Kopplung) auf F, φ eine t-Kopplung (bzw. starke t-Kopplung) auf F und sind die Bedingungen $(i), (ii)$ aus (6.2.a) (bzw. $(i), (ii), (iii)$ aus (6.2.b)) erfüllt, so nennen wir die (K)-Kopplung $(\varepsilon \cdot \varphi)$ auf F eine **$(K \cdot t)$-Kopplung** (bzw. **starke $(K \cdot t)$-Kopplung**) auf F – in Zeichen $(\varepsilon \cdot \varphi) \in (K \cdot t)$-$\mathfrak{K}$ (bzw. $(\varepsilon \cdot \varphi) \in (K \cdot t)$-$\mathfrak{K}_s$).

6.2 Starke $(K \cdot t)$-Kopplungen

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis, daß jeder durch eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung $(\varepsilon \cdot \varphi)$ auf F gewonnene Fastkörper, wobei ε nichttrivial ist, bis auf Isomorphie durch eine starke (K)-Kopplung im Sinne eines Produktes $\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}$ gewonnen werden kann, wobei $\hat{\varepsilon}$ eine Kopplung vom Typ 1 oder Typ 2 oder Typ 3 ist und $\hat{\varphi}$ dabei entweder eine starke t-Kopplung (es ist dann $\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi} = (\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi})$ wieder eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung) oder eine (K)-Kopplung der Form $x \to \varepsilon_J^{\iota(x)} \phi_x$ ist – dabei ist $\phi : x \to \phi_x$ eine starke t-Kopplung von F, $\iota(x) \in \{0, 1\}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.2.1 Reduktion

In diesem Abschnitt sei folgendes vorgegeben:

Es seien $\mathrm{Char} K \neq 2$ und $\varepsilon \in K\text{-}\mathfrak{K}_s$. Weiter sei $(\varepsilon \cdot \varphi) \in (K \cdot t)\text{-}\mathfrak{K}_s$. Dabei seien τ der zu ε gehörige Homomorphismus (vgl. (5.6)), Δ_ε keine Kleinsche Vierergruppe und $A \in \mathfrak{M}$ eine zu ε gehörige Matrix, die, falls A keine Eigenwerte in K hat, $S(A) = 0$ erfülle – vgl. (5.5).

Erste Reduktion:

Nach (5.8) gibt es eine Matrix $M \in \mathfrak{M}^\times$, so daß $F^\varepsilon \cong F^{\hat{\varepsilon}}$, wobei $\hat{\varepsilon}$ eine einfache Form hat:

(6.3) Lemma. *Es ist $F^{(\varepsilon \cdot \varphi)} \cong F^{\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \varphi \varepsilon_{M^{-1}}}$ – dabei ist $\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \varphi \varepsilon_{M^{-1}}$ eine starke (K)-Kopplung auf F und $\hat{\varepsilon}$ eine Kopplung der Form $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_M(x) \to \varepsilon_{D_x}$ mit $D_x = M^{-1} \cdot A_x \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & \tau(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (falls A genau einen Eigenwert in K hat) bzw. $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (falls A zwei verschiedene Eigenwerte in K hat) bzw. $D_x = \begin{pmatrix} \tau(x) & c \\ 1 & \tau(x) \end{pmatrix}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $D_x = I$ (falls $\tau(x) = e$) (falls A keine Eigenwerte in K hat) – dabei ist $c \in K \setminus K^{(2)}$.*

Beweis. Mit (5.1) gilt $\varepsilon_M \varepsilon_{A_x} \varphi_x \varepsilon_{M^{-1}} = \varepsilon_M \varepsilon_{A_x} \varepsilon_{M^{-1}} \varepsilon_M \varphi_x \varepsilon_{M^{-1}} = \varepsilon_{M^{-1} A_x M} \varepsilon_M \varphi_x \varepsilon_{M^{-1}}$. Nach (5.7) – angewandt auf $\kappa = (\varepsilon \cdot \varphi)$ und $\tau = \varepsilon_M$ – ist $\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{M^{-1}} \varphi \varepsilon_M : \varepsilon_M(x) \to \varepsilon_{D_x} \varepsilon_M \varphi_x \varepsilon_{M^{-1}}$ mit $D_x := M^{-1} A_x M$ eine starke Kopplung auf F, wobei $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_M(x) \to \varepsilon_{D_x}$ nach (5.8) die geforderte Form hat. $\square$

Zweite Reduktion:

Durch geeignete Wahl der Matrizen A und M gelingt es, in $\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \varphi \varepsilon_{M^{-1}}$ den Ausdruck $\varepsilon_{M^{-1}} \varphi \varepsilon_M$ zu vereinfachen, ohne daß sich dabei der erste Faktor $\hat{\varepsilon}$ dieses *Produktes* verändert:

Für einen t-Automorphismus ψ von F und für eine Matrix $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}$ bzw. einen Vektor $\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in K^2$ erklären wir $\psi(B)$ bzw. $\psi(\mathfrak{z})$ durch:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \psi(b_1) & \psi(b_2) \\ \psi(b_3) & \psi(b_4) \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \psi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \psi(z_1) \\ \psi(z_2) \end{pmatrix}$$

Wir stellen fest:

(6.4) Lemma. *Es kann $A \in \mathfrak{M}$ so gewählt werden, daß $A \in P_\varphi$ und $S(A) = 0$.*

Beweis. Weil die Bedingung (i) von (6.2.b) erfüllt ist, gilt $R := \{A_x \,|\, x \in F^*\} \subset P_\varphi$. Weil ε nicht trivial ist, gibt es ein $A' \in (K^* \cdot A + K \cdot I) \cap R$. Mit (5.4) folgt, daß A' eine zu ε gehörige Matrix ist.

Wegen $\varphi_x(A') = A'$ für alle $x \in F^*$, gilt offenbar auch $\varphi_x(A' - \frac{1}{2}S(A') \cdot I) = A' - \frac{1}{2}S(A') \cdot I$. Nun beachte man noch, daß $S(A' - \frac{1}{2}S(A') \cdot I) = 0$. □

Im folgenden sei $A \in P_\varphi$ vorausgesetzt.

(6.5) *Es ist $F^{(\varepsilon \cdot \varphi)} \cong F^{\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}}$ für eine starke (K)-Kopplung $\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}$ auf F.*

Dabei ist $\hat{\varepsilon}$ eine Kopplung vom Typ 1 oder 2 oder 3 auf F und $\hat{\varphi}$ eine starke (K)-Kopplung auf F von folgender Form:

$$\hat{\varphi} : \begin{cases} F^* & \rightarrow Aut(F) \\ x & \rightarrow \varepsilon_J^{\iota(x)} \circ \phi_x \end{cases}$$

– dabei sind $\phi : x \rightarrow \phi_x$ eine starke t-Kopplung auf F, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\iota(x) = 1$ genau dann, wenn A zwei verschiedene Eigenwerte in K hat und ϕ_x die Eigenwerte von A vertauscht, ansonsten ist $\iota(x) = 0$.

Insbesondere ist $\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi} = (\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}) \in (K \cdot t)\text{-}\mathfrak{K}_s$, wenn A genau einen Eigenwert in K, keinen Eigenwert in K oder zwei verschiedene Eigenwerte in K hat und kein $\delta \in \Delta_\varphi$ die Eigenwerte von A vertauscht.

Beweis. Jede Lemma (5.5) erfüllende Matrix M liefert die in (6.3) angegebene Isomorphie: $F^{(\varepsilon \cdot \varphi)} \cong F^{\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \varphi \varepsilon_{M^{-1}}}$, wobei $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_M(x) \rightarrow \varepsilon_{D_x}$ eine starke K-Kopplung auf F ist.

Für jedes $\psi \in \Delta_\varphi$ gilt:

$$(*) \quad \varepsilon_M \psi \varepsilon_{M^{-1}} = \varepsilon_M \varepsilon_{\psi(M^{-1})} \psi = \varepsilon_{\psi(M^{-1}) \cdot M} \psi.$$

Damit ist, weil φ eine starke Kopplung auf F ist, nach (5.7) auch $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_M(x) \to \varepsilon_{\varphi_x(M^{-1}) \cdot M} \varphi_x$ eine starke Kopplung auf F.

Fall I: A hat genau einen Eigenwert λ in K:

Es sei $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ. Wir können ohne Einschränkung $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ (falls $x_1 \neq 0$) bzw. $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (falls $x_1 = 0$) voraussetzen.

Damit gilt für jedes $\psi \in \Delta_\varphi$: $A\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x} \Rightarrow A\psi(\mathfrak{x}) = \psi(\lambda)\psi(\mathfrak{x})$. Damit ist $\psi(\lambda)$ Eigenwert von A und somit gleich λ und $\psi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$.

Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ (falls } x_1 \neq 0) \text{ bzw. } M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (falls } x_1 = 0)$$

erfüllt Lemma (5.5) und wir erhalten in $(*)$, wegen $\psi(M^{-1}) \cdot M \in K^* \cdot I$, $\varepsilon_M \psi \varepsilon_{M^{-1}} = \psi$.

Fall II: A hat zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ in K:

Es sei $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ und $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein solcher zu μ. Wir können ohne Einschränkung $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ (falls $x_1 \neq 0$) bzw. $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (falls $x_1 = 0$) und $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ (falls $y_1 \neq 0$) bzw. $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (falls $y_1 = 0$) voraussetzen.

Damit gilt für jedes $\psi \in \Delta_\varphi$:

$$A\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x} \Rightarrow A\psi(\mathfrak{x}) = \psi(\lambda)\psi(\mathfrak{x}), \quad A\mathfrak{y} = \mu\mathfrak{y} \Rightarrow A\psi(\mathfrak{y}) = \psi(\mu)\psi(\mathfrak{y}).$$

Es sind also $\psi(\mathfrak{x})$ und $\psi(\mathfrak{y})$ Eigenvektoren von A.

1. Unterfall: Für jedes $\psi \in \Delta_\varphi$ gilt $\psi(\lambda) = \lambda$.

Dann ist $\psi(\mu) = \mu$, und es folgt wie im Fall I: $\psi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ und $\psi(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$ für alle $\psi \in \Delta_\varphi$.

Für $x_1, y_1 \neq 0$ bzw. $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ bzw. $x_1 = 0, y_1 \neq 0$ erfüllen die Matrizen

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \text{ bzw. } M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

Lemma (5.5) und wir erhalten in $(*)$, wegen $\psi(M^{-1}) \cdot M \in K^* \cdot I$ in jedem dieser Fälle, $\varepsilon_M \psi \varepsilon_{M^{-1}} = \psi$.

2. Unterfall: Es gibt Elemente $\psi \in \Delta_\varphi$, mit $\psi(\lambda) = \mu$. Dann ist $\psi(\mu) = \lambda$, $\psi(\mathfrak{x}) \in K^* \cdot \mathfrak{y}$ und $\psi(\mathfrak{y}) \in K^* \cdot \mathfrak{x}$ für diese $\psi \in \Delta_\varphi$.

Wir können $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \neq 0$ voraussetzen (wäre eine Komponente von $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ gleich 0, so könnte man einen Standardeinheitsvektor wählen, es wäre somit $\psi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ oder $\psi(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$ für alle $\psi \in \Delta_\varphi$).

Damit erhalten wir $\psi(x) = y$ und $\psi(y) = x$ für diese $\psi \in \Delta_\varphi$.

Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

erfüllt Lemma (5.5) und wir erhalten in $(*)$, wegen $\psi(M^{-1}) \cdot M \in K^* \cdot J$ (falls $\psi(\lambda) = \mu$) und $\psi(M^{-1}) \cdot M \in K^* \cdot I$ (falls $\psi(\lambda) = \lambda$) – vgl. hierzu den 1. Unterfall:

$$\varepsilon_{M^{-1}} \psi \varepsilon_M = \begin{cases} \psi, & \text{falls } \psi(\lambda) = \lambda \\ \varepsilon_J \psi, & \text{falls } \psi(\lambda) = \mu \end{cases}$$

Fall III: A hat keine Eigenwerte in K:

Wegen (6.4) können wir voraussetzen, daß $S(A) = 0$.

Man wähle die Matrix M aus dem Beweis zu (5.5). Da $\psi(A) = A$ für alle $\psi \in \Delta_\varphi$ vorausgesetzt ist, folgt $\psi(M) = M$ für alle $\psi \in \Delta_\varphi$.

Wir erhalten in $(*)$, wegen $\psi(M^{-1}) \cdot M \in K^* \cdot I$, $\varepsilon_M \psi \varepsilon_{M^{-1}} = \psi$.

Damit ist gezeigt, daß die Kopplung $\kappa := \hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \varphi \varepsilon_{M^{-1}}$ von folgender Form ist:

$$\kappa : \begin{cases} F^* & \to \operatorname{Aut}(F) \\ \varepsilon_M(x) & \to \varepsilon_{D_x} \circ \varepsilon_J^{\iota'(x)} \varphi_x \end{cases}$$

Dabei ist $\iota'(x) = 1$ genau dann, wenn A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt und φ_x die Eigenwerte von A vertauscht, ansonsten ist $\iota'(x) = 0$.

Es folgt:

$$\kappa = \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to \operatorname{Aut}(F) \\ x & \to \varepsilon_{D_{\varepsilon_{M^{-1}}(x)}} \circ \varepsilon_J^{\iota'(\varepsilon_{M^{-1}}(x))} \varphi_{\varepsilon_{M^{-1}}(x)} \end{cases}$$

Dabei ist $\hat{\varepsilon} : x \to \varepsilon_{\hat{D}_x}$ (wobei $\hat{D}_x$ für jedes $x \in F^*$ aus D_x dadurch hervorgeht, indem man τ durch $\tau \varepsilon_{M^{-1}(x)}$ ersetzt – vgl. die Betrachtungen nach (5.8)) eine Kopplung vom Typ 1 oder 2 oder 3. Und mit den Definitionen $\phi_x := \varphi_{\varepsilon_{M^{-1}}(x)}$ und $\iota := \iota' \varepsilon_{M^{-1}}$ ist $\hat{\varphi} : x \to \varepsilon_J^{\iota(x)} \phi_x$ eine starke (K)-Kopplung auf F. □

Bemerkungen. Ist die Matrix M^{-1} im 2. Unterfall des Beweises ein Element der Menge $\{A_x \,|\, x \in F^*\}$, so folgt wegen der Voraussetzung (iii) in (6.2.b) $\phi = \varphi$.

6.2.2 Die Kopplung $\varepsilon_J^\iota \cdot \varphi$

Es sei $(\varepsilon \cdot \varphi) \in (K \cdot t)$-$\mathfrak{K}$, wobei ε eine Kopplung vom Typ 2 auf F sei, und es gebe t-Automorphismen $\varphi_x \in \Delta_\varphi$, die die beiden Eigenwerte λ und μ einer zu ε gehörigen Matrix A vertauschen. Es ist dann $\Gamma := \{\varphi_x \,|\, \varphi_x(\lambda) = \lambda\}$ offenbar ein Normalteiler vom Index 2 in Δ_φ, und damit ist auch $N := \{x \in F^* \,|\, \varphi_x \in \Gamma\}$ ein solcher in F^*.

Es ist unmittelbar einzusehen – $\mathfrak{P}$ bezeichne wieder die Menge der normierten Primpolynome aus F:

(6.6) *Es seien N_0 ein Normalteiler vom Index 1 oder 2 in K^* und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ vorausgesetzt sei, wenn der Index von N_0 in K^* gleich 1 ist. Dann liefert die Menge N der Elemente*

$$q = c \cdot \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{\nu_p} \in N \;:\Leftrightarrow\; (2| \sum_{p \in \mathfrak{A}} \nu_p \wedge c \in N_0) \vee (2 \not| \sum_{p \in \mathfrak{A}} \nu_p \wedge c \notin N_0)$$

einen Normalteiler vom Index 2 in F^*.

Wir halten als Folgerung noch fest:

(6.7) Korollar. *Es gibt $2^{|\mathfrak{P}|}$ Normalteiler vom Index 2 in F^*.*

Wir formulieren das Hauptergebnis dieses Abschnitts:

(6.8) Satz. *Es seien $\varphi \in t$-$\mathfrak{K}_s$ und N ein Normalteiler vom Index 2 in F^*. N^c bezeichne das Komplement von N in F^*. Es ist*

$$\phi : \begin{cases} F^* & \to Aut(F) \\ x & \to \varepsilon_J^{\iota(x)} \circ \varphi_x \end{cases}$$

mit $\iota(x) = 0$ (falls $x \in N$) und $\iota(x) = 1$ (falls $x \in N^c$) genau dann eine starke (K)-Kopplung auf F, wenn

(i) $\varphi_{\varepsilon_J(y)} = \varphi_y$ für alle $y \in F^*$,

(ii) $\varphi_x(N) = N$ für alle $x \in N$,

(iii) $\varepsilon_J \varphi_x(N) = N$ für alle $x \in N^c$.

Beweis. Es ist ϕ ein Homomorphismus von F^* in $\mathrm{Aut}(F)$:

Im Fall $x, y \in N$ gilt $\phi_x \phi_y = \varphi_x \varphi_y = \varphi_{xy} = \phi_{xy}$.

Im Fall $x \in N, y \notin N$ bzw. $x \notin N, y \in N$ gilt $\phi_x \phi_y = \varphi_x \varepsilon_J \varphi_y = \varepsilon_J \varphi_{xy} = \phi_{xy}$, da $xy \notin N$.

Im Fall $x, y \notin N$ gilt $\phi_x \phi_y = \varepsilon_J \varphi_x \varepsilon_J \varphi_y = \varphi_{xy} = \phi_{xy}$, da $xy \in N$.

Wir geben nun die Bedingungen an, unter welchen die Invarianzgleichungen $\phi_{\phi_x(y)} = \phi_y$ für alle $x, y \in F^*$ erfüllt sind:

(1) Im Fall $x, y \in N$ gilt $\phi_{\phi_x(y)} = \phi_y \Leftrightarrow \phi_{\varphi_x(y)} = \varphi_y \Leftrightarrow \varphi_x(y) \in N, \varphi_{\varphi_x(y)} = \varphi_y$.

(2) Im Fall $x \in N, y \notin N$ gilt $\phi_{\phi_x(y)} = \phi_y \Leftrightarrow \phi_{\varphi_x(y)} = \varepsilon_J \varphi_y \Leftrightarrow \varphi_x(y) \notin N, \varphi_{\varphi_x(y)} = \varphi_y$.

(3) Im Fall $x \notin N, y \in N$ gilt $\phi_{\phi_x(y)} = \phi_y \Leftrightarrow \phi_{\varepsilon_J \varphi_x(y)} = \varphi_y \Leftrightarrow \varepsilon_J \varphi_x(y) \in N$, $\varphi_{\varepsilon_J(y)} = \varphi_y$.

(4) Im Fall $x, y \notin N$ gilt $\phi_{\phi_x(y)} = \phi_y \Leftrightarrow \phi_{\varepsilon_J \varphi_x(y)} = \varepsilon_J \varphi_y \Leftrightarrow \varepsilon_J \varphi_x(y) \notin N, \varphi_{\varepsilon_J(y)} = \varphi_y$.

(1) bzw. (2) liefern (ii) und (i) und (iii) fassen (3) und (4) zusammen. □

Bemerkung. Es sei N ein Normalteiler vom Index 2 in F^*. Dann ist

$$\varepsilon_J^\iota : x \to \varepsilon_J^{\iota(x)} = \begin{cases} \mathrm{Id}_F, & \text{falls } x \in N \\ \varepsilon_J, & \text{falls } x \notin N \end{cases}$$

genau dann eine starke K-Kopplung auf K, wenn $\varepsilon_J(N) = N$ gilt.

Beispiel

Es sei $K = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Wir benutzen die Bezeichnungen aus (6.6): Es seien $N_0 = \mathbf{C}^*$, $\mathfrak{A} = \{t-1, t+1\}$ und N der hierdurch gemäß (6.6) erklärte Normalteiler vom Index 2 in F^*. Es gilt:

$$N = \{x = c \cdot (t-1)^{\nu_1(x)} \cdot (t+1)^{\nu_{-1}(x)} \cdot \prod_{z \neq 1,-1} (t-z)^{\nu_z(x)} \mid c \in \mathbf{C}^*, \nu_z(x) \in \mathbf{Z}, 2 \mid (\nu_1(x) + \nu_{-1}(x))\}.$$

Für $x \in F^*$ bezeichne $\nu(x) := \nu_1(x) + \nu_{-1}(x)$ (es ist $\nu : F^* \to (\mathbf{Z}, +)$ ein Homomorphismus), und es sei $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(*)$ *Es gilt $\nu(y) = \nu(\varepsilon_A(y))$ für alle $y \in F^*$.*

Beweis. Für jedes $z \in \mathbf{C}^*$ gilt $\varepsilon_A(t-z) = \frac{-z\cdot(t+\frac{1}{z})}{t}$. Damit erhält man $\nu_1(y) = \nu_{-1}(\varepsilon_A(y))$ und $\nu_{-1}(y) = \nu_1(\varepsilon_A(y))$. □

Wegen $(*)$ und der Homomorphie von ν folgt nun mit der Tatsache, daß ε_A die Ordnung 2 hat, daß die Abbildung

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \quad \varepsilon_{A^{\nu(x)}} \end{cases}$$

eine starke K-Kopplung auf F liefert.

Mit dem Homomorphismus ν sei eine starke t-Kopplung $\hat{\varphi}$ erklärt:

Es sei $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \to \overline{z}$ die Konjugation und $\widetilde{\varphi}$ die Fortsetzung von φ zu einem t-Automorphismus von $F = \mathbf{C}(t)$.

Die Abbildung

$$\hat{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_t(F) \\ x & \to \quad \widetilde{\varphi}^{\nu(x)} \end{cases}$$

ist eine starke t-Kopplung.

Für alle $x, y \in F^*$ gilt:

(*i*) $\hat{\varphi}_y(A) = A$,

(*ii*) $A^{\nu(\hat{\varphi}_y(x))} = A^{\nu(x)}$,

(*iii*) $\hat{\varphi}_{\varepsilon_{A(y)}} = \hat{\varphi}_y$, man beachte $(*)$.

Nach (6.2.b) ist also $(\varepsilon \cdot \hat{\varphi}) : x \to \varepsilon_{A^{\nu(x)}} \circ \widetilde{\varphi}^{\nu(x)}$ eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung auf F.

Es ist A eine zu der starken K-Kopplung ε gehörige Matrix, und $A \in P_{\hat{\varphi}}$. Es hat A die zwei Eigenwerte i, $-i$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Die erste Reduktion (6.3) liefert mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$:

$$\hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \hat{\varphi} \varepsilon_{M^{-1}} : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}(F) \\ \varepsilon_M(x) & \to \varepsilon_{D^{\nu(x)}} \circ \varepsilon_M \widetilde{\varphi}^{\nu(x)} \varepsilon_{M^{-1}} \end{cases}$$

– dabei ist $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_M(x) \to \varepsilon_{D^{\nu(x)}}$ mit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine starke K-Kopplung.

Für die zweite Reduktion beachte man, daß der t-Automorphismus $\widetilde{\varphi}$ die beiden Eigenwerte der Matrix A vertauscht.

Wegen $\varepsilon_M \widetilde{\varphi}^{\nu(x)} \varepsilon_{M^{-1}} = \varepsilon_{\widetilde{\varphi}^{\nu(x)}(M^{-1}) \cdot M} \widetilde{\varphi}^{\nu(x)} = \varepsilon_{J^{\nu(x)}} \widetilde{\varphi}^{\nu(x)}$, für $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, erhalten wir für die Kopplung $\kappa := \hat{\varepsilon} \cdot \varepsilon_M \hat{\varphi} \varepsilon_{M^{-1}}$ die Darstellung:

$$\kappa : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}(F) \\ \varepsilon_M(x) & \to \varepsilon_{D^{\nu(x)}} \circ \varepsilon_{J^{\nu(x)}} \widetilde{\varphi}^{\nu(x)} \end{cases}$$

d.h.

$$\kappa : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}(F) \\ x & \to \varepsilon_{D^{\hat{\nu}(x)}} \circ \varepsilon_{J^{\hat{\nu}(x)}} \widetilde{\varphi}^{\hat{\nu}(x)} \end{cases}$$

– dabei ist $\hat{\nu} = \nu \varepsilon_{M^{-1}}$, und es ist $x \to \varepsilon_{D^{\hat{\nu}(x)}}$ eine Kopplung vom Typ 2.

Es ist $\varepsilon_{D^{\hat{\nu}(x)}} \circ \varepsilon_{J^{\hat{\nu}(x)}} = \varepsilon_{J^{\hat{\nu}(x)} \cdot D^{\hat{\nu}(x)}} = \varepsilon_{A^{\hat{\nu}(x)}}$, und damit liegt im wesentlichen wieder die Ausgangssituation vor. Ferner ist κ nach (6.8) eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung.

6.3 Konstruktion

Mit Hilfe der in Kapitel 4 und 5 angegebenen Beschreibungen von starken t- und K-Kopplungen auf F bilden wir gemäß (6.2.b) starke $(K \cdot t)$-Kopplungen auf F.

6.3.1 Die Verträglichkeitsbedingungen

Für die Konstruktion von starken $(K \cdot t)$-Kopplungen formulieren wir die Bedingungen $(i), (ii), (iii)$ aus (6.2.b) mittels der Homomorphismen $\mathfrak{r}, \rho$ und der Abbildungen $\mathfrak{s}, \sigma$ aus (4.1) und (5.6).

Die Menge der normierten Primpolynome aus F sei wieder mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

Wir geben eine starke t-Kopplung und eine Kopplung vom Typ 1 bzw. Typ 2 bzw. Typ 3 vor:

Es sei $\widetilde{\varphi}$ eine gemäß (4.1) konstruierte starke t-Kopplung auf F, d.h. es sind Δ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(K)$ ($\widetilde{\Delta}$ bezeichne die Gruppe der Fortsetzungen der $\delta \in \Delta$ zu t-Automorphismen $\widetilde{\delta}$), $\mathfrak{r} : K^* \to \Delta$ eine starke Kopplung auf K und $\mathfrak{s} : \mathfrak{P} \to \Delta$ eine auf den Bahnen der Operation $\widetilde{\Delta} \times \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$, $(\widetilde{\delta}, p) \to \widetilde{\delta}(p)$ konstante Abbildung. Damit ist eine starke t-Kopplung $\widetilde{\varphi}$ erklärt:

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_t(F) \\ y & \to \widetilde{\varphi}_y \end{cases}$$

mit $\widetilde{\varphi}_y = \widetilde{\mathfrak{r}}_b \circ \prod_{j=1}^{s} \widetilde{\mathfrak{s}}_{q_j}^{\mu_j}$ für $y = b \cdot \prod_{j=1}^{s} q_j^{\mu_j}$, $b \in K^*, q_j \in \mathfrak{P}, \mu_j \in \mathbf{Z}$ für alle j.

Es sei ε eine gemäß (5.6) konstruierte Kopplung vom Typ 1 bzw. Typ 2 bzw. Typ 3, d.h. es sind $(H, .) = (K, +)$ bzw. $= (K^*, \cdot)$ bzw. $= (K_e, \circ_A)$ (wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in K \setminus K^{(2)}$), $\rho : (K^*, \cdot) \to (H, .)$ ein Homomorphismus, $\sigma : \mathfrak{P} \to H$ eine Abbildung und der σ und ρ fortsetzende Homomorphismus τ von $(F^*, \cdot)$ in $(H, .)$ erfüllt für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $x \in F^*$: $\tau(p(t + \tau(x))) = \sigma(p)$ bzw. $\tau(p(\tau(x) \cdot t)) = \sigma(p)$ bzw. $\tau(p(\frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)})) = \sigma(p)$, wenn $\tau(x) \neq e$. Ist ρ oder σ nichtkonstant, so ist damit eine Kopplung vom Typ 1 bzw. Typ 2 bzw. Typ 3 erklärt:

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{r(x)} \end{cases}$$

mit $r(x) = t + \tau(x)$ bzw. $r(x) = \tau(x) \cdot t$ bzw. $r(x) = \frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $r(x) = t$ (falls $\tau(x) = e$).

Dabei ist $\tau(x) = \rho(a) . \prod_{i=1}^{r} \sigma(p_i)^{\nu_i}$ für $x = a \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}$, $b \in K^*, p_i \in \mathfrak{P}, \nu_i \in \mathbf{Z}$ für alle i.

Bemerkung. Nach (6.2.b) ist $(\varepsilon\cdot\widetilde{\varphi}) : x \to \varepsilon_{A_x}\circ\widetilde{\varphi}_x$ genau dann eine starke $(K\cdot t)$-Kopplung auf F, wenn für alle $x,y\in F^*$ die Bedingungen (i) $\widetilde{\varphi}_y(r(x)) = r(x)$, (ii) $r(\widetilde{\varphi}_y(x)) = r(x)$, (iii) $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y$ gelten.

Ist ε eine Kopplung vom Typ 2: $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$, wobei $r(x) = \tau(x)\cdot t$ mit einem Homomorphismus τ von $(F^*,\cdot)$ in $(K^*,\cdot)$, so operiert die Dicksongruppe Δ_ε von ε auf der Menge $\mathfrak{P}$ vermöge

$$(*)\qquad \begin{cases} \Delta_\varepsilon\times\mathfrak{P} & \to \mathfrak{P}\\ (\varepsilon_{A_x},p) & \to \frac{1}{\tau(x)^{\deg(p)}}\cdot p(\tau(x)\cdot t)\end{cases}$$

Denn für $x,y\in F^*$ gilt $(\varepsilon_{r(x)}\circ\varepsilon_{r(y)},p) \to \frac{1}{\tau(xy)^{\deg(p)}}\cdot p(\tau(x\cdot y)\cdot t)$ und $(\varepsilon_{r(x)},\frac{1}{\tau(y)^{\deg(p)}}\cdot p(\tau(y)\cdot t)) \to \frac{1}{\tau(x)^{\deg(p)}\cdot\tau(y)^{\deg(p)}}\cdot p(\tau(x)\cdot\tau(y)\cdot t)$.

In (6.9) sei jeder Körperautomorphismus ψ von K durch $\psi(e) = e$ auf K_e fortgesetzt.

Im Falle $\psi(c) = c$ gilt $\psi(a\circ_A b) = \psi(a)\circ_A\psi(b)$ für alle $a,b\in K_e$ – es ist $D(A) = -c$, vgl. die Definition von $\circ_A$ vor (5.6).

(6.9) *(a)* $\widetilde{\varphi}_y(r(x)) = r(x)$ *für alle* $x,y\in F^*$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{r}_b\circ\rho = \rho$, $\mathfrak{s}_q\circ\rho = \rho$, $\mathfrak{r}_b\circ\sigma = \sigma$, $\mathfrak{s}_q\circ\sigma = \sigma$ *und, falls* ε *vom Typ 3 ist,* $\mathfrak{r}_b(c) = c = \mathfrak{s}_q(c)$ *für alle* $b\in K^*, q\in\mathfrak{P}$.

(b) $r(\widetilde{\varphi}_y(x)) = r(x)$ *für alle* $x,y\in F^*$ $\Leftrightarrow$ $\rho\circ\mathfrak{r}_b|_{K^*} = \rho$, $\rho\circ\mathfrak{s}_q|_{K^*} = \rho$, $\sigma\circ\widetilde{\mathfrak{r}}_b|_{\mathfrak{P}} = \sigma$, $\sigma\circ\widetilde{\mathfrak{s}}_q|_{\mathfrak{P}} = \sigma$ *für alle* $b\in K^*, q\in\mathfrak{P}$.

(c) Ist ε *eine Kopplung vom Typ 1, so gilt:*

$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y$ *für alle* $x,y\in F^*$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{s}$ *auf den Bahnen der Operation* $\Delta_\varepsilon\times\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$; $(\varepsilon_{r(x)},p)\to\varepsilon_{r(x)}(p)$ *konstant ist.*

Ist ε *eine Kopplung vom Typ 2, so gilt:*

$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y$ *für alle* $x,y\in F^*$, *wenn* $\rho(a),\sigma(p)\in Kern(\mathfrak{r})$ *für alle* $a\in K^*$ *und* $p\in\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{s}$ *auf den Bahnen der Operation* $(*)$ *konstant ist.*

Sind ε *eine Kopplung vom Typ 3,* $\mathfrak{s}_p = Id_K$ *für alle* $p\in\mathfrak{P}$ *mit* $\deg(p) = 1$ *und* $\mathfrak{r}$ *die triviale Kopplung auf* K, *so gilt:*

$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y$ *für alle* $x,y\in F^*$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{s}$ *auf den Bahnen der Operation* $\Delta_\varepsilon\times\mathfrak{P}_2\to\mathfrak{P}_2$, $(\varepsilon_{r(x)},p)\to p_{\varepsilon_{r(x)}}$ *(vgl. (5.11)) konstant ist.*

Beweis. Es sei $x\in F^*$. Es ist $r(x) = t+\tau(x)$ (Typ 1) oder $r(x) = \tau(x)\cdot t$ (Typ 2) oder $r(x) = \frac{\tau(x)\cdot t+c}{t+\tau(x)}$, falls $\tau(x)\neq e$ und $r(x) = t$, falls $\tau(x) = t$ (Typ 3).

(a) Falls ε vom Typ 3 ist, so gilt $\widetilde{\varphi}_y(r(x)) = r(x)$ trivialerweise, falls $\tau(x) = e$. Es sei deshalb $\tau(x)\neq e$ vorausgesetzt.

Es gilt $\widetilde{\varphi}_y(r(x)) = r(x)$ für alle $x,y\in F^*$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_y(\tau(x)) = \tau(x)$ für alle $x,y\in F^*$ und zusätzlich beim Typ 3: $\varphi_y(c) = c$ für alle $y\in F^*$. Weil $\varphi : y \to \varphi_y$ ein Homomorphismus ist, gilt $\varphi_y(c) = c$ für alle $y \in F^*$ genau dann, wenn $\mathfrak{r}_b(c) = c = \mathfrak{s}_q(c)$ für alle $b \in K^*$ und $q \in \mathfrak{P}$.

Es sind weiterhin $\tau : x \to \tau(x)$ und die Abbildungen $\mathfrak{r}_b, \mathfrak{s}_q : (H, .) \to (H, .)$ für jedes $b \in K^*$ und $q \in \mathfrak{P}$ Homomorphismen (dabei ist $(H, .) = (K, +)$ (Typ 1) bzw. $= (K^*, \cdot)$ (Typ 2) bzw. $= (K_e, \circ_A)$ (Typ 3).

Daher gilt für alle $x, y \in F^*$

$$\varphi_y(\tau(x)) = \tau(x) \text{ und beim (Typ 3) } \varphi_y(c) = c \iff \mathfrak{r}_b(\rho(a)) = \rho(a),\ \mathfrak{s}_q(\rho(a)) = \rho(a),\ \mathfrak{r}_b(\sigma(p)) = \sigma(p),\ \mathfrak{s}_q(\sigma(p)) = \sigma(p)$$

und (beim Typ 3) $\mathfrak{r}_b(c) = c = \mathfrak{s}_q(c)$ für alle $a, b \in K^*$ und $p, q \in \mathfrak{P}$.

(b) Offenbar gilt

$$r(\widetilde{\varphi}_y(x)) = r(x) \text{ für alle } x, y \in F^* \iff \tau(\widetilde{\varphi}_y(x)) = \tau(x) \text{ für alle } x, y \in F^*.$$

Und wegen der Homomorphie von τ und $\widetilde{\varphi}$ gilt für alle $x, y \in F^*$

$$\tau(\widetilde{\varphi}_y(x)) = \tau(x) \iff \rho(\mathfrak{r}_b(a)) = \rho(a), \sigma(\widetilde{\mathfrak{r}}_b(p)) = \sigma(p), \rho(\mathfrak{s}_q(a)) = \rho(a), \sigma(\widetilde{\mathfrak{s}}_q(p)) = \sigma(p)$$

für alle $a, b \in K^*$ und $p, q \in \mathfrak{P}$ und zusätzlich beim Typ 3: $\tau(x) = e$ $(x \in F^*)$ $\iff$ $\tau(\widetilde{\varphi}_y(x)) = e$ für alle $y \in F^*$.

Diese letzte Bedingung folgt aber aus $\rho \circ \mathfrak{r}_b|_{K^*} = \rho$, $\rho \circ \mathfrak{s}_q|_{K^*} = \rho$, $\sigma \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_b|_{\mathfrak{P}} = \sigma$ und $\sigma \circ \widetilde{\mathfrak{s}}_q|_{\mathfrak{P}} = \sigma$ für alle $b \in K^*, q \in \mathfrak{P}$:

Es sei $\tau(x) = e$ für ein $x \in F^*$. Da $\widetilde{\varphi} : y \to \widetilde{\varphi}_y$ ein Homomorphismus ist, gilt genau dann $\tau(\widetilde{\varphi}_y(x)) = e$ für alle $y \in F^*$, wenn $\tau(\widetilde{\mathfrak{r}}_b(x)) = e$ und $\tau(\widetilde{\mathfrak{s}}_q(x)) = e$ für alle $b \in K^*$ und $q \in \mathfrak{P}$.

Wegen der Homomorphie von τ folgt die Behauptung.

(c) Es sind $\varepsilon_{r(x)}$ $(x \in F^*)$ K-Automorphismen und $\varphi : y \to \varphi_y$ ein Homomorphismus. Daher gilt:

$$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y \text{ für alle } x, y \in F^* \iff \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(q)} = \varphi_q = \mathfrak{s}_q \text{ für alle } x \in F^*, q \in \mathfrak{P}.$$

Ist ε eine Kopplung vom Typ 1, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Ist ε eine Kopplung vom Typ 2, so gilt wegen der Homomorphie von τ für alle $x \in F^*$ und $q \in \mathfrak{P}$

$$\mathfrak{s}_q = \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(q)} = \mathfrak{r}_{\tau(x)^{\deg(q)}} \circ \mathfrak{s}_{q(\tau(x)\cdot t)}, \text{ wenn } \rho : K^* \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{r}),\ \sigma : \mathfrak{P} \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{s}_q = \mathfrak{s}_{q(\tau(x)\cdot t)}.$$

Ist ε eine Kopplung vom Typ 3, so gilt wegen der Voraussetzungen und (5.10) für alle $x \in F^*$ und $q \in \mathfrak{P}_2$

$$\mathfrak{s}_q = \varphi_{\varepsilon_{r(x)}(q)} = \varphi_{q(\tau(x))\cdot(t+\tau(x))^{-\deg(q)}\cdot p_{\varepsilon_{r(x)}}} \Leftrightarrow \mathfrak{s}_q = \mathfrak{s}_{p_{\varepsilon_{r(x)}}}.$$

Und für $q \in \mathfrak{P}$ mit $\deg(q) = 1$ gilt offenbar $\varphi_{\varepsilon_{r(x)}(q)} = \mathfrak{s}_q$ für alle $x \in F^*$. □

6.3.2 Beispiele

In den folgenden Beispielen sei ρ oder σ nichtkonstant.

1. Es seien $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K mit der Dicksongruppe $\Delta_\mathfrak{r}$, $P_\mathfrak{r}$ der Fixkörper von $\Delta_\mathfrak{r}$, $\rho : (K^*, \cdot) \to (P_\mathfrak{r}, +)$ ein Homomorphismus und $\sigma : \mathfrak{P} \to P_\mathfrak{r}$ eine Abbildung. Der ρ und σ fortsetzende Homomorphismus τ erfülle die Bedingung aus (5.6.a), so daß $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ mit $r(x) = t + \tau(x)$ eine Kopplung vom Typ 1 ist.

Für $\mathfrak{s}$ wählen wir die triviale Abbildung: $p \to \mathfrak{s}_p := \mathrm{Id}_K$ für alle $p \in \mathfrak{P}$, d.h. $\widetilde{\varphi}$ ist die Fortsetzung von $\mathfrak{r}$ auf F nach dem höchsten Koeffizienten (vgl. Beispiel 1 nach (4.2)).

Aus (6.9) erhalten wir: Es ist $(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \widetilde{\varphi}_x$ genau dann eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, wenn $\rho \circ \mathfrak{r}_b = \rho$ und $\sigma \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_b|_{\mathfrak{P}} = \sigma$ für alle $b \in K^*$.

Sind etwa $\mathrm{Kern}(\mathfrak{r}) \subset \mathrm{Kern}(\rho)$ und $\sigma : p \to \omega(\deg(p))$ für eine beliebige Abbildung $\omega : \mathbf{N} \to P_\mathfrak{r}$ (es ist dann auch die Bedingung aus (5.6.a) erfüllt), so gelten $\rho \circ \mathfrak{r}_b = \rho$ und $\sigma \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_b|_{\mathfrak{P}} = \sigma$ für alle $b \in K^*$.

2. Es sei $\mathfrak{r}$ sei eine starke Kopplung auf K mit der Dicksongruppe $\Delta_\mathfrak{r}$. Wir wählen für $\mathfrak{s} : \mathfrak{P} \to \Delta_\mathfrak{r}$ eine Abbildung der Form $p \to \zeta(\deg(p))$ für eine beliebige Abbildung ζ von $\mathbf{N}$ in $\Delta_\mathfrak{r}$. Damit ist eine starke t-Kopplung $\widetilde{\varphi}$ erklärt (vgl. (4.1)).

Es seien $P_\mathfrak{r}$ der Fixkörper von $\Delta_\mathfrak{r}$, $\rho : (K^*, \cdot) \to (P_\mathfrak{r}, +)$ ein Homomorphismus, und es sei für eine beliebige Abbildung ω von $\mathbf{N}$ in $P_\mathfrak{r}$ die Abbildung $\sigma : \mathfrak{P} \to P_\mathfrak{r}$, $p \to \omega(\deg(p))$ erklärt. Bezeichnet τ den ρ und σ fortsetzenden Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(P_\mathfrak{r}, +)$, so ist $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ mit $r(x) = t + \tau(x)$ eine Kopplung vom Typ 1.

Aus (6.9) erhalten wir: Es ist $(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \widetilde{\varphi}_x$ genau dann eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, wenn $\rho \circ \mathfrak{r}_b|_{K^*} = \rho$ und $\rho \circ \mathfrak{s}_q|_{K^*} = \rho$ für alle $b \in K^*$ und $q \in \mathfrak{P}$.

Und diese beiden Bedingungen gelten genau dann, wenn $\{a^{-1} \cdot \mathfrak{r}_b(a) \mid a, b \in K^*\}$, $\{a^{-1} \cdot \mathfrak{s}_q(a) \mid a \in K^*, q \in \mathfrak{P}\} \subset \mathrm{Kern}(\rho)$.

3. Es sei $\mathfrak{r}$ eine starke Kopplung auf K mit der Dicksongruppe $\Delta_\mathfrak{r}$, $P_\mathfrak{r}$ bezeichne den Fixkörper von $\Delta_\mathfrak{r}$ und $K_\mathfrak{r}$ den Kern von $\mathfrak{r}$. Es seien $\rho(x) = 1$ für alle $x \in K^*$ und $\sigma : \mathfrak{P} \to P_\mathfrak{r} \cap K_\mathfrak{r}$, $p \to \omega(\deg(p))$ für eine beliebige Abbildung $\omega : \mathbf{N} \to P_\mathfrak{r} \cap K_\mathfrak{r}$.

Der ρ und σ fortsetzende Homomorphismus τ erfüllt die Bedingung aus (5.6.b), so daß $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ mit $r(x) = \tau(x) \cdot t$ eine Kopplung vom Typ 2 ist.

Weiter sei $\mathfrak{s} : p \to \mathfrak{s}_p$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in $\Delta_{\mathfrak{r}}$, die auf den Bahnen der Operation $\widetilde{\Delta}_{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$, $(\widetilde{\delta}, p) \to \widetilde{\delta}(p)$ konstant ist.

Aus (6.9) erhalten wir: Es ist $(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \widetilde{\varphi}_x$ eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, wenn $\mathfrak{s}$ auf den Bahnen der vor (6.9) angegebenen Operation $(*)$ konstant ist.

Ist etwa $\mathfrak{s} : p \to \zeta(\deg(p))$ für eine beliebige Abbildung ζ von $\mathbf{N}$ in $\Delta_{\mathfrak{r}}$, so ist $\mathfrak{s}$ konstant auf diesen Bahnen.

4. Wir wiederholen (5.13): Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $c \in K \setminus K^{(2)}$. Weiter seien $k : \mathbf{N} \to K_e$ eine Abbildung mit $k(1) = e$, $\sigma(p) := k(\deg(p))$ für alle $p \in \mathfrak{P}$ und $\tau : (F^*, \cdot) \to (K_e, \circ_A)$ der σ fortsetzende Homomorphismus mit $\tau|_{K^*} : x \to e$. Dann gilt:

Die Abbildung

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{r(x)} \end{cases}$$

mit $r(x) = \frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $r(x) = t$ (falls $\tau(x) = e$) ist eine Kopplung vom Typ 3.

Nun erklären wir eine starke t-Kopplung auf F:

Es seien $\mathfrak{r}$ die triviale Kopplung, Δ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(K)$, ζ eine Abbildung von $\mathbf{N}$ in Δ mit $\zeta(1) = \mathrm{Id}_K$, und es sei schließlich $\mathfrak{s} : \mathfrak{P} \to \Delta$, $p \to \zeta(\deg(p))$. Hierdurch ist eine starke t-Kopplung $\widetilde{\varphi} : y = b \cdot \prod q^{\mu_q} \to \widetilde{\varphi}_y = \widetilde{\prod \mathfrak{s}_q^{\mu_q}}$ erklärt.

Nach (6.9.a) gilt $\widetilde{\varphi}_y(r(x)) = r(x)$ für alle $x, y \in F^*$ genau dann, wenn $\mathfrak{s}_q(\sigma(p)) = \sigma(p)$ für alle $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $\sigma(p) \neq e$ und $\mathfrak{s}_q(c) = c$ für alle $q \in \mathfrak{P}$.

Die Bedingungen in (6.9.b) sind erfüllt, so daß $r(\widetilde{\varphi}_y(x)) = r(x)$ für alle $x, y \in F^*$ gilt.

Und schließlich gilt auch $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_{r(x)}(y)} = \widetilde{\varphi}_y$ für alle $x, y \in F^*$, weil die Voraussetzungen in (6.9.c) sowie die dort angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Bezeichnet K_0 die Menge $\{x \in K \mid \delta(x) = x \text{ für alle } \delta \in \mathfrak{s}(\mathfrak{P})\}$, so ist $(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \widetilde{\varphi}_x$ genau dann eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, wenn $c \in K_0$ und k eine Abbildung in $K_0 \cup \{e\}$ ist.

Kapitel 7

Bewertete Dicksonsche Fastkörper

Es sind ein Körper K und eine transzendente Erweiterung $F := K(t)$ gegeben.

Für eine Bewertung w von F haben wir im Kapitel 3 eine Beschreibung der w- und A_w-Automorphismen von F angegeben. Besondere Berücksichtigung fanden dabei die Fälle, daß die (K)-Automorphismen t- bzw. K-Automorphismen sind.

Die starken t- bzw. K-Kopplungen wurden in den Kapiteln 4 bzw. 5 ausführlich diskutiert.

Wir fügen nun diese Ergebnisse zusammen, indem wir hinreichende und notwendige Bedingungen dafür angeben, wann eine starke t- bzw. K-Kopplung eine w- bzw. A_w-Kopplung ist. Um Beispiele angeben zu können, formulieren wir darüber hinaus hinreichende, leicht nachprüfbare Bedingungen.

Schließlich konstruieren wir im Abschnitt 7.4 Beispiele bewerteter Fastkörper mit Hilfe von $(K \cdot t)$-Kopplungen.

Der letzte Abschnitt 7.5 liefert ein einfaches Konstruktionsverfahren invariant bzw. nicht-multiplikativ bewerteter Fastkörper.

7.1 Bezeichnungen

Es sei w eine Bewertung von F, und $v := w|_K$. Es bezeichne $M := \overline{K}(t)$ für einen algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von K. Weiter sei $\overline{w}$ eine Fortsetzung von w auf M, sowie $\overline{v} := \overline{w}|_{\overline{K}}$. Mit $A_{\overline{w}}, A_w, A_{\overline{v}}$ und A_v seien die Bewertungsringe und mit $\Gamma_{\overline{w}}, \Gamma_w, \Gamma_{\overline{v}}$ und Γ_v die Wertegruppen der Bewertungen $\overline{w}, w, \overline{v}$ und v bezeichnet. Schließlich sei $\mathfrak{P}$ die Menge der normierten Primpolynome aus $F[t]$.

Wir nennen eine starke t-Kopplung φ auf F mit der Dicksongruppe Δ_φ eine **starke t-w-Kopplung** (bzw. **starke t-A_w-Kopplung**) von F, wenn $\Delta_\varphi \subset w\text{-Aut}(F)$ (bzw. $\Delta_\varphi \subset A_w\text{-Aut}(F)$) erfüllt ist.

Und eine starke K-Kopplung ε auf F mit der Dicksongruppe Δ_ε heiße **starke K-w-Kopplung** (bzw. starke **K-A_w-Kopplung**) von F, wenn $\Delta_\varepsilon \subset w\text{-Aut}(F)$ (bzw. $\Delta_\varepsilon \subset A_w\text{-Aut}(F)$) gilt.

Weiterhin verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} t\text{-}w\text{-}\mathfrak{K}_s &:= t\text{-}\mathfrak{K}_s \cap w\text{-}\mathfrak{K}, \quad & t\text{-}A_w\text{-}\mathfrak{K}_s &:= t\text{-}\mathfrak{K}_s \cap A_w\text{-}\mathfrak{K}, \\ K\text{-}w\text{-}\mathfrak{K}_s &:= K\text{-}\mathfrak{K}_s \cap w\text{-}\mathfrak{K}, \quad & K\text{-}A_w\text{-}\mathfrak{K}_s &:= K\text{-}\mathfrak{K}_s \cap A_w\text{-}\mathfrak{K}. \end{aligned}$$

7.2 t-w-$\mathfrak{K}_s$ und t-A_w-$\mathfrak{K}_s$

Eine starke t-Kopplung φ ist nach Abschnitt 4.2 durch eine abelsche Untergruppe Δ von $\text{Aut}(K)$, einer starken Kopplung $\mathfrak{r}$ auf K mit $\Delta_\mathfrak{r} \subset \Delta$ und einer Abbildung $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{P}$ in Δ, die auf den Bahnen einer Operation konstant ist, bestimmt.

Es seien Δ, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ vorgegeben und φ die gemäß (4.1) dadurch bestimmte starke t-Kopplung. Es sei weiter $\Delta_0 := \{\varphi_x|_K \,|\, x \in F^*\}$ – es ist Δ_0 die von $\mathfrak{r}(K^*)$ und $\mathfrak{s}(\mathfrak{P})$ erzeugte Untergruppe von Δ.

7.2.1 t-w-$\mathfrak{K}_s$

Wir erhalten aus (3.15):

(7.1) *(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.*

Es ist φ genau dann eine starke t-w-Kopplung auf F, wenn $\Delta_0 \subset v\text{-}Aut(K)$ und sich jedes $\delta \in \Delta_0$ so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus $\overline{\delta}$ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\overline{\delta}^{-1}(a)-a) \leq \mu$ gilt.

(b) Es sei $w = \overline{v}_\mathfrak{a}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$.

Es ist φ genau dann eine starke t-w-Kopplung auf F, wenn $\Delta_0 \subset v\text{-}Aut(K)$ und sich jedes $\delta \in \Delta_0$ so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus $\overline{\delta}$ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\mathfrak{a} \sim \overline{\delta}^{-1}(\mathfrak{a})$ gilt.

Beispiele

1. Es sei $K = E(x)$ eine einfach-transzendente Körpererweiterung eines Körpers E. Ist $\Delta = \{\varepsilon_{x+e} \,|\, e \in E\}$, wobei ε_{x+e} den E-Automorphismus von K mit $\varepsilon_{x+e}(x) = x + e$ bezeichnet, und ist v eine Gradbewertung von K, so gilt offenbar $\Delta \subset v\text{-Aut}(K)$. Ist $a \in K$, so besagt (7.1.a), daß φ genau dann eine starke t-w-Kopplung auf F ist, wenn jedes $\delta \in \Delta_0$ die Bedingung $v(\delta^{-1}(a) - a) \leq \mu$ erfüllt.

Wegen $v(\delta^{-1}(a)) = v(a)$ für jedes $\delta \in \Delta_0$ ist diese Bedingung etwa dann erfüllt, wenn $v(a) \leq \mu$.

Bemerkung. Statt ε_{x+e} $(e \in E)$ kann man auch E-Automorphismen der Form $\varepsilon_{e \cdot x}$ $(e \in E^*)$ wählen.

2. Es seien $K = E((\Gamma))$ ein Potenzreihenkörper auf Γ über E und v die Ordnungsbewertung von K. Es sei $\Delta_E \subset \mathrm{Aut}(E)$ eine abelsche Gruppe.

Wir setzen jeden Automorphismus $\psi \in \Delta_E$ vermöge der Vorschrift

$$\hat{\psi} : \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma a_\gamma \to \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma \psi(a_\gamma)$$

zu einem Automorphismus von K fort.

Für $\Delta = \{\hat{\psi} \mid \psi \in \Delta\}$ ist offenbar $\Delta \subset v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$ erfüllt.

Ist $a \in K$, so besagt (7.1.a), daß eine starke t-Kopplung φ auf F mit $\Delta_\varphi \subset \widetilde{\Delta}$ genau dann eine starke t-w-Kopplung auf F ist, wenn jedes $\delta \in \Delta_0$ die Bedingung $v(\delta^{-1}(a) - a) \leq \mu$ erfüllt.

3. Es seien E eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbf{Q}$ und $K = E(x)$ eine einfach-transzendente Erweiterung von E. Es bezeichne v die x^{-1}-adische Bewertung von K: Für jedes Polynom $p \in E[x^{-1}]$ vom Grad n in x^{-1} ist $v(p) = -n$. Dann ist die Ordnungsbewertung $\widetilde{v}$ von $E((x))$ eine Fortsetzung von v; und $(E((x)), \widetilde{v})$ ist eine Vervollständigung von (K, v).

Es ist $\mathfrak{a} := (a_i)_{i \in \mathbf{N}} := (\sum_{n=1}^{i} x^{2^n})_{i \in \mathbf{N}}$ wegen $v(a_{k+1} - a_k) = v(x^{2^{k+1}}) = 2^{k+1}$ eine Cauchyfolge in (K, v) mit dem $\widetilde{v}$-Limes $a := \sum_{n \in \mathbf{N}} x^{2^n} \in E((x))$. Für $i, j, k \in \mathbf{N}$ mit $i < j < k$ gilt $v(a_i - a_j) < v(a_j - a_k)$, so daß $\mathfrak{a}$ eine $\overline{v}$-Ostrowskifolge in K ist. Dabei bezeichnet $\overline{v}$ eine Fortsetzung von v auf $\overline{K}$.

Nach [4], S. 148 ist a transzendent über $\mathbf{Q}(x)$, also auch transzendent über K. Folglich ist $\mathfrak{a}$ eine transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolge, die eine Fortsetzung $\overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ von v auf F induziert.

Nun sei κ eine Kopplung auf E. Für jedes $y \in K^*$ bezeichne $h(y)$ den höchsten Koeffizienten von y bzgl. x; und für jedes $\delta \in \Delta_\kappa$ sei $\hat{\delta} \in \mathrm{Aut}(K)$ die Fortsetzung von δ mit $\hat{\delta}(x) = x$. Nach dem Beispiel 1 unter (4.3) ist

$$\psi : \begin{cases} K^* & \to \ \mathrm{Aut}(K) \\ y & \to \ \psi_y := \hat{\kappa}_{h(y)} \end{cases}$$

eine Kopplung von K.

Für jedes $z \in F^*$ sei $h'(z)$ der höchste Koeffizient von z bzgl. t; und für jedes $\varepsilon \in \Delta_\psi$ bezeichne $\widetilde{\varepsilon} \in \mathrm{Aut}(F)$ die Fortsetzung von ε mit $\widetilde{\varepsilon}(t) = t$. Dann ist

$$\varphi : \begin{cases} F^* & \to \ \mathrm{Aut}(F) \\ z & \to \ \varphi_z := \widetilde{\psi}_{h'(z)} \end{cases}$$

eine t-Kopplung auf F.

Für jedes $\varepsilon \in \Delta_\psi$ und beliebiges $y \in K^*$ gilt offenbar $v(\varepsilon(y)) = v(y)$, so daß ε ein v-Automorphismus von K ist. Ferner gilt $\varepsilon(a_i) = a_i$ für jedes $i \in \mathbf{N}$, d.h. $\mathfrak{a} = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a})$.

Mit (7.1) folgt daher:

Es ist $(F^\varphi, \overline{v}_\mathfrak{a}|_F)$ *ein invariant bewerteter Fastkörper.*

Bemerkungen. (I) Mit dieser Konstruktion lassen sich zahlreiche Beispiele invariant bewerteter Fastkörper gewinnen. So besitzt z.B. jeder Körper vom Rang 2 über $\mathbf{Q}$ nach [29], S. 163ff überabzählbar viele Kopplungen.

(II) Für weitere Elemente $a \in \mathbf{Q}((x))$, die transzendent über $\mathbf{Q}(x)$ sind, vgl. man [4] und [27].

7.2.2 t-A_w-$\mathfrak{K}_s$

Wir erhalten aus (3.19):

(7.2) *(a) Es sei* $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ *mit* $a \in \overline{K}$ *und* $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

Es ist φ *genau dann eine starke* t-A_w-*Kopplung auf* F, *wenn* $\Delta_0 \subset A_v$-$Aut(K)$ *und sich jedes* $\delta \in \Delta_0$ *so zu einem* $A_{\overline{v}}$-*Automorphismus* $\overline{\delta}$ *von* $\overline{K}$ *fortsetzen läßt, daß* $\overline{v}(\overline{\delta}^{-1}(a) - a) \leq \mu$ *und für* $z \in \overline{K}$ *die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\overline{\delta}(z) \leq \mu.$$

(b) Es sei $w = \overline{v}_\mathfrak{a}|_F$ *mit einer transzendenten* $\overline{v}$-*Ostrowskifolge* $\mathfrak{a}$ *in* $\overline{K}$.

Es ist φ *genau dann eine starke* t-A_w-*Kopplung auf* F, *wenn* $\Delta_0 \subset A_v$-$Aut(K)$ *und sich jedes* $\delta \in \Delta_0$ *so zu einem* $A_{\overline{v}}$-*Automorphismus* $\overline{\delta}$ *von* $\overline{K}$ *fortsetzen läßt, daß* $\mathfrak{a} \sim \overline{\delta}^{-1}(\mathfrak{a})$ *gilt.*

Bemerkung. Ist w eine Fortsetzung 2. Art von v auf F, $z_0 \in \overline{K}$ mit $\overline{v}(z_0) = \mu$ gewählt, so lautet (7.2.a) wegen (3.8):

Es ist φ *genau dann eine starke* t-A_w-*Kopplung auf* F, *wenn* $\Delta_0 \subset A_v$-$Aut(K)$ *und sich jedes* $\delta \in \Delta_0$ *so zu einem* $A_{\overline{v}}$-*Automorphismus* $\overline{\delta}$ *von* $\overline{K}$ *fortsetzen läßt, daß* $\overline{v}(\overline{\delta}^{-1}(a) - a) \leq \mu$ *und* $\overline{\delta}(z_0) \cdot z_0^{-1} \in U_{\overline{v}}$.

Beispiel

Es seien E ein Körper, $\Gamma = \Gamma_1 \times_{lex} \Gamma_2$ das lexikographische Produkt zweier angeordneter dividierbarer Gruppen $(\Gamma_1, +, \leq)$ und $(\Gamma_2, +, \leq)$, K der Potenzreihenkörper $E((\Gamma))$ und v die (additive) Ordnungsbewertung von K.

Es seien weiter $\lambda : \Gamma_1 \to \mathrm{Aut}(\Gamma_2, +, \leq)$, $\alpha \to \lambda_\alpha$ ein Homomorphismus und ρ die nach (1.11) gebildete o-Kopplung auf Γ:

$$\rho : \begin{cases} \Gamma & \to \mathrm{Aut}(\Gamma, +, \leq) \\ (\alpha, \beta) & \to \quad \varphi_{(\alpha,\beta)} : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \Gamma \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \to (\gamma_1, \lambda_\alpha(\gamma_2)) \end{cases} \end{cases}$$

Schließlich sei $\mathfrak{r}$ die nach (1.10) zu ρ gebildete Kopplung auf K:

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} K^* & \to \mathrm{Aut}(K, +, \cdot) \\ x & \to \quad \mathfrak{r}_x : \begin{cases} K & \to \quad K \\ \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma x_\gamma & \to \sum_{\gamma \in \Gamma} X^{\rho_{v(x)}(\gamma)} x_\gamma \end{cases} \end{cases}$$

Es sei $\mathfrak{s}(\mathfrak{P}) \subset \Delta_\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(K^*)$, also $\Delta_0 = \Delta_\mathfrak{r}$.

Nach (1.10.a) ist $\Delta_0 \subset A_v\text{-}\mathrm{Aut}(K)$.

Es sei $\overline{E}$ ein algebraischer Abschluß von E. Dann ist $\overline{E}((\Gamma))$ nach [22], Kap. II, §5, Satz 6 algebraisch abgeschlossen und enthält damit einen algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von K. Es bezeichne $\hat{v}$ die Ordnungsbewertung von $\overline{E}((\Gamma))$ und $\overline{v} := \hat{v}|_{\overline{K}}$.

Wir setzen jedes $\delta := \mathfrak{r}_x \in \Delta_0$ zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus $\overline{\delta}$ von $\overline{K}$ fort: Es ist

$$\hat{\delta} : \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma a_\gamma \to \sum_{\gamma \in \Gamma} X^{\rho_{v(x)}(\gamma)} a_\gamma \quad (a_\gamma \in \overline{E})$$

ein δ fortsetzender $A_{\hat{v}}$-Automorphismus von $\overline{E}((\Gamma))$. Weil $\overline{K}/K$ eine normale Körpererweiterung ist, ist $\overline{\delta} := \hat{\delta}|_{\overline{K}}$ ein $A_{\overline{v}}$-Automorphismus von $\overline{K}$, der δ fortsetzt. Es bezeichne $\overline{\Delta} := \{\overline{\delta} \mid \delta \in \Delta_0\}$.

Ist $\Gamma_{\overline{w}} = \widetilde{\Gamma}_1 \times_{lex} \widetilde{\Gamma}_2$, wobei $\Gamma_1 \subset \widetilde{\Gamma}_1$ und $\Gamma_2 \subset \widetilde{\Gamma}_2$, so erhalten wir mit (1.10.e) und (7.2) für $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Gamma_{\overline{w}}$:

(a) Es ist $(K^\mathfrak{r}, v)$ ein invariant bewerteter Fastkörper.

(b) Es ist (F^φ, w) ein bewerteter Fastkörper, wenn $\overline{v}(\overline{\delta}^{-1}(a) - a) \leq \mu$ für jedes $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}$ und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es ist $\mu_1 \notin \Gamma_1$,

(ii) Es sind $\mu_1 \in \Gamma_1$, $\mu_2 \in \Gamma_2$ und $\lambda_\alpha(\mu_2) = \mu_2$ für alle $\alpha \in \Gamma_1$.

(iii) Es sind $\mu_1 \in \Gamma_1$, $\mu_2 \notin \Gamma_2$ und $\mu_2 < \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma_2$.

Beweis. Unter jeder der angegebenen Bedingungen (i), (ii), (iii) ist für $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}$ die Bedingung $\overline{v}(z) \geq \mu \Leftrightarrow \overline{v}\,\overline{\delta}(z) \geq \mu$ $(z \in \overline{K})$ erfüllt. □

7.3 K-w-$\mathfrak{K}_s$ und K-A_w-$\mathfrak{K}_s$

Es sei ε eine Kopplung vom Typ 1 bzw. Typ 2 bzw. Typ 3:

$$\varepsilon : \begin{cases} F^* & \to \mathrm{Aut}_K(F) \\ x & \to \varepsilon_{r(x)} \end{cases}$$

mit $r(x) = t + \tau(x)$ bzw. $r(x) = \tau(x) \cdot t$ bzw. $r(x) = \frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)}$ (falls $\tau(x) \neq e$) und $r(x) = t$ (falls $\tau(x) = e$). Dabei τ ein nichttrivialer Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(H, .)$ ($(H, .) = (K, +)$ bzw. $= (K^*, \cdot)$ bzw. $= (K_e, \circ_A)$ – wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in K \setminus K^{(2)}$).

Im Fall, daß ε eine Kopplung vom Typ 3 ist, beachten wir:

$$\frac{\tau(x) \cdot t + c}{t + \tau(x)} = \tau(x) + \frac{1}{(c - \tau(x)^2)^{-1}(t - (-\tau(x))}.$$

7.3.1 K-w-$\mathfrak{K}_s$

Wir erhalten aus (3.14):

(7.3) *(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.*

(1) Falls ε eine Kopplung vom Typ 1 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-w-Kopplung auf F, wenn es zu jedem $x \in F^*$ einen $\overline{v}$-Automorpismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\delta_x^{-1}(a) + \tau(x) - a) \leq \mu$ gilt.

(2) Falls ε eine Kopplung vom Typ 2 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-w-Kopplung auf F, wenn $\tau(F^*) \subset U_v$ gilt und es zu jedem $x \in F^*$ einen $\overline{v}$-Automorpismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\tau(x) \cdot \delta_x^{-1}(a) - a) \leq \mu$ gilt.

(3) Falls ε eine Kopplung vom Typ 3 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-w-Kopplung auf F, wenn:

(i) Für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$ und $\overline{v}(a + \tau(x)) \leq \mu$ gilt $v(c - \tau(x)^2) = \mu^2$ und $\overline{v}(\tau(x) - a) \leq \mu$.

(ii) Für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$ und $\overline{v}(a + \tau(x)) > \mu$ gilt $v(c - \tau(x)^2) = \overline{v}(a + \tau(x))^2$ und es gibt für jedes solche $x \in F^*$ einen $\overline{v}$-Automorphismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ mit $\overline{v}(\frac{\tau(x)\delta_x^{-1}(a) + c}{\delta_x^{-1}(a) + \tau(x)} - a) \leq \mu$ gilt.

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a}$ in $\overline{K}$ und $\varepsilon : x \to \varepsilon_{q_x}$ eine starke K-Kopplung.

Es ist ε genau dann eine starke K-w-Kopplung auf F, wenn es zu jedem $x \in F^*$ einen $\overline{v}$-Automorpismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\mathfrak{a} \sim \delta_x^{-1}(q_x(\mathfrak{a}))$ gilt.

Hinreichende Bedingungen

Aus (7.3) erhalten wir:

(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.

(1) Für eine Kopplung ε vom Typ 1 ist (F^ε, w) ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $v(\tau(x)) \leq \mu$ für alle $x \in F^*$.

(2) Für eine Kopplung ε vom Typ 2 ist (F^ε, w) ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $\overline{v}(a) \leq \mu$ und $v(\tau(x)) = 1$ für alle $x \in F^*$.

(3) Für eine Kopplung ε vom Typ 3 ist (F^ε, w) ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $\overline{v}(a) \leq \mu$, $v(c) = \mu^2$ und $v(\tau(x)) < \mu$ für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$.

(b) Es sei $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ mit einer transzendenten $\overline{v}$-Ostrowskifolge $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ in $\overline{K}$ mit der Maßfolge $(\mu_i)_{i\in I}$, und $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \mid \gamma < \mu_i$ für alle $i \in I\}$.

Für eine Kopplung ε vom Typ 1 ist (F^ε, w) ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $v(\tau(x)) \in \Gamma_{\overline{v}} \setminus \Sigma$ für alle $x \in F^*$.

Für eine Kopplung ε vom Typ 2 ist (F^ε, w) ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $v(1 - \tau(x)) \cdot w(t) \in \Gamma_{\overline{v}} \setminus \Sigma$ für alle $x \in F^*$.

Beweis. (a) folgt direkt aus (7.3.a).

(b) Es sei $\delta_x = \mathrm{Id}_{\overline{K}}$ für jedes $x \in F^*$. Es besagt $\mathfrak{a} \sim q_x(\mathfrak{a})$, daß es zu jedem $x \in F^*$ und $k \in I$ Indizes $i_0, j_0 \in I$ gibt, so daß $\overline{v}(a_i - a_j - \tau(x)) < \mu_k$ (Typ 1) bzw. $\overline{v}(a_i - \tau(x) \cdot a_j) = \overline{v}((a_i - a_j) + (1 - \tau(x)) \cdot a_j) < \mu_k$ (Typ 2) für alle $i_0 < i \in I$ und $j_0 < j \in I$. Wegen den jeweiligen Voraussetzungen gilt für hinreichend große $i, j \in I$, daß $\overline{v}(a_i - a_j - \tau(x)) = v(\tau(x))$ bzw. $\overline{v}((a_i - a_j) + (1 - \tau(x)) \cdot a_j) = v(1 - \tau(x)) \cdot w(t)$. □

7.3.2 K-A_w-$\mathfrak{K}_s$

Wir erhalten aus (3.18) und (7.3):

(7.4) *(a) Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $a \in \overline{K}$ und $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$.*

(1) Falls ε eine Kopplung vom Typ 1 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-A_w-Kopplung auf F, wenn φ eine starke K-w-Kopplung auf F ist.

(2) Falls ε eine Kopplung vom Typ 2 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-A_w-Kopplung auf F, wenn es zu jedem $x \in F^*$ einen $\overline{v}$-Automorphismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\tau(x) \cdot \delta_x^{-1}(a) - a) \leq \mu$ gilt und für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt ist: $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq v(\tau(x)) \cdot \mu$ für alle $x \in F^*$.

(3) Falls ε eine Kopplung vom Typ 3 ist, so gilt:

Es ist ε genau dann eine starke K-A_w-Kopplung auf F, wenn:

(i) Für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$ und $\overline{v}(a+\tau(x)) \leq \mu$ gilt $\overline{v}(\tau(x)-a) \leq \mu$ und es ist für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt: $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq v(c-\tau(x)^2)\cdot\mu^{-1}$.

(ii) Für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$ und $\overline{v}(a+\tau(x)) > \mu$ gilt, daß es einen $\overline{v}$-Automorphismus $\delta_x \in Aut_K(\overline{K})$ gibt, für den $\overline{v}(\frac{\tau(x)\delta_x^{-1}(a)+c}{\delta_x^{-1}(a)+\tau(x)} - a) \leq \mu$ gilt und es ist für $z \in \overline{K}$ die folgende Bedingung erfüllt: $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq v(c-\tau(x)^2)\cdot\overline{v}(a+\tau(x))^{-2}\cdot\mu$.

Hinreichende Bedingungen

Für das folgende beachte man die Bemerkung nach (3.9):

Es sei A eine nichttriviale isolierte Untergruppe $\neq \Gamma_{\overline{v}}$ von $\Gamma_{\overline{v}}$. Dann sind $\Sigma = \{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \,|\, \gamma \leq \alpha$ für ein $\alpha \in A\}$ ein Schnitt in $\Gamma_{\overline{v}}$ und $\overline{w} = \overline{v}_{a,\mu} = \overline{v}_{a,\Sigma}$ eine Fortsetzung 3. Art von $\overline{v}$ auf M. Es bezeichne $K_A := \{x \in K \,|\, v(x) \in A\}$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir aus (7.4) und $\langle 1 \rangle$ nach (3.9):

(2) Für eine Kopplung ε vom Typ 2 ist (F^ε, w) ein bewerteter Fastkörper, wenn $\tau(F^*) \subset K_A$ und $\overline{v}(a) \in \Sigma$.

(3) Für eine Kopplung ε vom Typ 3 ist (F^ε, w) ein bewerteter Fastkörper, wenn $\overline{v}(a) \in \Sigma$ und eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\mu < v(c) < \mu^2$, $v(\tau(x))^2 < \mu$ für alle $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$.

(ii) $v(c) < \mu, \mu < v(\tau(x))^2 < \mu^2$ für alle $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$.

(iii) $\mu < v(c) < \mu^2$, $v(\tau(x)) < \mu$ und $v(c) \neq v(\tau(x))^2$ für alle $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$.

Beweis. (2) Die Wahl $\delta_x = \mathrm{Id}_{\overline{K}}$ für jedes $x \in F^*$ in (7.4.a)(2) liefert, wegen $\overline{v}(a) \in \Sigma$ und $v(\tau(x)) \in A$ für alle $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$, $v(\tau(x)-1)\overline{v}(a) \leq \max\{v(\tau(x))\overline{v}(a), \overline{v}(a)\} \leq \mu$.

(3) Man beachte (7.4.a)(3), (i): Aus jeder der drei angegebenen Bedingungen folgt $v(\tau(x)) < \mu$ für alle $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$; damit sind, wegen $\overline{v}(a) \in \Sigma$, die Bedingungen $\overline{v}(a+\tau(x)) \leq \mu$ und $\overline{v}(\tau(x)-a) \leq \mu$ erfüllt. Weiterhin garantiert jede der drei angegebenen Bedingungen für jedes $x \in F^*$ mit $\tau(x) \neq e$, daß $v(c-\tau(x)^2) = \max\{v(c), v(\tau(x))^2\}$ und damit $\mu < v(c-\tau(x)^2) < \mu^2$. Nun liefert $\langle 1 \rangle$ (b) nach (3.9), daß $\overline{v}(z) \leq \mu \Leftrightarrow \overline{v}(z) \leq v(c-\tau(x)^2)\cdot\mu^{-1}$ $(z \in \overline{K})$ für diese $x \in F^*$ erfüllt ist. □

7.4 $(K \cdot t)$-w- und $(K \cdot t)$-A_w-Kopplungen

Wir nennen eine (starke) $(K \cdot t)$-Kopplung $(\varepsilon \cdot \varphi)$ auf F mit der Dicksongruppe $\Delta_{(\varepsilon\cdot\varphi)}$ eine **(starke)** $(K \cdot t)$-w-**Kopplung** (bzw. (starke) $(K \cdot t)$-A_w-**Kopplung**) von F, wenn $\Delta_{(\varepsilon\cdot\varphi)} \subset w$-Aut$(F)$ (bzw. $\Delta_{(\varepsilon\cdot\varphi)} \subset A_w$-Aut$(F)$) erfüllt ist.

Für die Konstruktion von starken $(K \cdot t)$-w-Kopplungen bzw. starken $(K \cdot t)$-A_w-Kopplungen von F ist das folgende Vorgehen naheliegend:

Es seien eine starke t-w-Kopplung (bzw. starke t-A_w-Kopplung) $\varphi : x \to \varphi_x$ und eine starke K-w-Kopplung (bzw. starke K-A_w-Kopplung) $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ gegeben. Es ist dann $(\varepsilon \cdot \varphi) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \varphi_x$ eine starke $(K \cdot t)$-w-Kopplung (bzw. starke $(K \cdot t)$-A_w-Kopplung), wenn die Bedingungen (i), (ii), (iii) aus (6.2.b) erfüllt sind.

Wegen (6.5) und (5.7) schränken wir uns bei den starken K-Kopplungen auf Kopplungen vom Typ 1 oder Typ 2 oder Typ 3 ein.

Jede starke t-Kopplung gewinnt man nach Abschnitt 4.2 mit einer abelschen Untergruppe Δ von $\mathrm{Aut}(K)$, einer Kopplung $\mathfrak{r}$ auf K mit $\Delta_{\mathfrak{r}} \subset \Delta$ und einer Abbildung $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{P}$ in Δ.

Und jede Kopplung vom Typ 1 oder Typ 2 oder Typ 3 erhält man nach (5.6), im Falle, daß $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und die Dicksongruppe keine Kleinsche Vierergruppe ist, mit einem Homomorphismus ρ von $(K^*, \cdot)$ in die Gruppe $(K, +)$ oder $(K^*, \cdot)$ oder $(K_e, \circ_A)$ und einer Abbildung σ von $\mathfrak{P}$ in K oder K^* oder K_e.

Die Bedingungen (i), (ii), (iii) aus (6.2.b) wurden in (6.9) als Bedingungen an $\mathfrak{r}, \rho, \mathfrak{s}$ und σ formuliert.

7.4.1 Beispiele bewerteter Dicksonscher Fastkörper

In den folgenden Beispielen sei ρ oder σ nichtkonstant.

1. Es sei $K = E(x)$ eine einfach-transzendente Körpererweiterung eines Körpers E mit Einselement 1_E. Es sei $\Delta := \{\varepsilon_{x+e} \mid e \in E\}$, wobei ε_{x+e} den E-Automorphismus von K mit $\varepsilon_{x+e}(x) = x + e$ bezeichnet. Für ein $k = \frac{p}{q} \in K^*$ sei $d(k) := \deg(p) - \deg(q)$. Die Abbildung

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} K^* & \to \Delta \\ k & \to \varepsilon_{x+d(k)\cdot 1_E} \end{cases}$$

ist eine starke Kopplung auf K.

Wir wählen

$$\mathfrak{s} : \begin{cases} \mathfrak{P} & \to \Delta \\ p & \to \zeta(\deg(p)) \end{cases}$$

für eine Abbildung $\zeta : \mathbf{N} \to \Delta$.

Es bezeichne φ die durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ gegebene starke t-Kopplung und Δ_0 die von $\mathfrak{r}(K^*)$ und $\mathfrak{s}(\mathfrak{P})$ erzeugte Untergruppe von Δ.

Es sei v eine Gradbewertung von K. Offenbar ist dann $\Delta_0 \subset v\text{-Aut}(K)$. Damit erhalten wir aus (7.1):

$\langle 1 \rangle$ *Ist $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$, $a \in \overline{K}$, $\mu \in \Gamma_{\overline{w}}$, so ist φ genau dann eine starke t-w-Kopplung, wenn sich jedes $\delta \in \Delta_0$ so zu einem $\overline{v}$-Automorphismus $\overline{\delta}$ von $\overline{K}$ fortsetzen läßt, daß $\overline{v}(\overline{\delta}^{-1}(a) - a) \leq \mu$ gilt.*

Bemerkung. Statt ε_{x+e} $(e \in E)$ kann man auch E-Automorphismen der Form $\varepsilon_{e \cdot x}$ $(e \in E^*)$ wählen.

Es seien P_{Δ_0} der Fixkörper von Δ_0, $K^w := \{y \in K \,|\, \varepsilon_{t+y} \in w\text{-Aut}(F)\}$, $\rho : (K^*, \cdot) \to (P_{\Delta_0} \cap K^w, +)$ ein Homomorphismus, und es sei für eine beliebige Abbildung ω von $\mathbf{N}$ in $P_{\Delta_0} \cap K^w$ die Abbildung $\sigma : \mathfrak{P} \to P_{\Delta_0} \cap K^w$, $p \to \omega(\deg(p))$ erklärt. Bezeichnet τ den ρ und σ fortsetzenden Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(P_{\Delta_0} \cap K^w, +)$, so gilt offenbar:

$\langle 2 \rangle$ *Es ist $\varepsilon : y \to \varepsilon_{r(y)}$ mit $r(y) = t + \tau(y)$ eine Kopplung vom Typ 1 und eine w-Kopplung.*

Aus (6.9) erhalten wir: Es ist $(\varepsilon \cdot \varphi) : y \to \varepsilon_{r(y)} \circ \varphi_y$ genau dann eine starke $(K \cdot t)$-Kopplung, wenn $\{c^{-1} \cdot \mathfrak{r}_b(c) \,|\, b, c \in K^*\}$, $\{c^{-1} \cdot \mathfrak{s}_q(c) \,|\, c \in K^*, q \in \mathfrak{P}\} \subset \text{Kern}(\rho)$.

Es seien $c = \frac{p}{q} \in K^*$ und $\delta \in \Delta_0$. Wegen $d(c^{-1} \cdot \delta(c)) = d(\frac{q}{p} \cdot \frac{p(\delta(x))}{q(\delta(x))}) = 0$, ist die Bedingung $\{c^{-1} \cdot \mathfrak{r}_b(c) \,|\, b, c \in K^*\}$, $\{c^{-1} \cdot \mathfrak{s}_q(c) \,|\, c \in K^*, q \in \mathfrak{P}\} \subset \text{Kern}(\rho)$ insbesondere dann erfüllt, wenn $\rho(y) = \xi(d(y))$ für einen Homomorphismus ξ von $\mathbf{Z}$ in $P_{\Delta_0} \cap K^w$.

Nach der Folgerung zu (7.3) gilt $K_0 := \{y \in K \,|\, v(y) \leq \mu\} \subset K^w$:

$\langle 3 \rangle$ *Es sei φ eine starke t-w-Kopplung (vgl. $\langle 1 \rangle$). Es ist $(F^{(\varepsilon \cdot \varphi)}, \overline{v}_{a,\mu}|_F)$ ein invariant bewerteter Fastkörper, wenn $\rho(y) = \xi(d(y))$ für einen Homomorphismus ξ von $\mathbf{Z}$ in $P_{\Delta_0} \cap K_0$.*

2. Es seien E ein Körper, $\Gamma := (\mathbf{Q}^{>0}, \cdot, \leq) \times_{lex} (\mathbf{Q}, +, \leq)$ und $K := E((\Gamma))$ der mit der (additiven) Ordnungsbewertung v versehene Potenzreihenkörper.

Es sei φ die nach (1.11) zu dem Homorphismus $\lambda : \mathbf{Q}^{>0} \to \text{Aut}(\mathbf{Q}, +, \leq)$, $\alpha \to \lambda_\alpha$ mit $\lambda_\alpha : \gamma \to \alpha \cdot \gamma$ konstruierte o-Kopplung auf Γ:

$$\varphi : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \text{Aut}(\Gamma, +, \leq) \\ (\alpha, \beta) & \to \quad \varphi_{(\alpha,\beta)} : \begin{cases} \Gamma & \to \quad \Gamma \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \to \quad (\gamma_1, \alpha \cdot \gamma_2) \end{cases} \end{cases}$$

Und $\mathfrak{r}$ sei die nach (1.10) zu φ gebildete Kopplung auf K:

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} K^* & \to \quad \text{Aut}(K, +, \cdot) \\ x & \to \quad \mathfrak{r}_x : \begin{cases} K & \to \quad K \\ \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma x_\gamma & \to \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} X^{\varphi_{v(x)}(\gamma)} x_\gamma \end{cases} \end{cases}$$

Wir erhalten mit (1.10.e):

$\langle 1\rangle$ *Es ist* $(K^{\mathfrak{r}}, v)$ *ein invariant bewerteter Fastkörper.*

Es sei $\widetilde{\Gamma} := (\mathbf{R}^{>0}, \cdot, \leq) \times_{lex} (\mathbf{R}, +, \leq)$. Weiter sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ eine Fortsetzung 3. Art von v auf F mit $a \in K$, $v(a) = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $\alpha_2 \neq 0$ und $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \widetilde{\Gamma}$ und $\mu_1 \notin \mathbf{Q}$.

Mit dieser Kopplung $\mathfrak{r}$ auf K erklären wir nun eine t-Kopplung auf F:

Es sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ mit $\alpha \circ \mathfrak{r}_x = \mathfrak{r}_x \circ \alpha$ für alle $x \in K^*$. Weiter sei $h(x)$ bzw. $n(x)$ der höchste bzw. niedrigste Koeffizient von $x \in F^*$.

Es ist dann (vgl. Beispiel 1 nach (4.3)) – für $k = h$ oder $k = n$ –

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha,k} : \begin{cases} F^* & \rightarrow Aut(F) \\ x & \rightarrow \widetilde{\varphi}_{\alpha(k(x))} \end{cases}$$

eine starke t-Kopplung auf F.

Für jedes $\delta \in \Delta_{\mathfrak{r}} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ gilt

$$v(\delta^{-1}(a) - a) = \min\{(\alpha_1, \lambda^{-1} \cdot \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2)\} \geq (\mu_1, \mu_2) \Leftrightarrow \alpha_1 > \mu_1$$

für ein $\lambda \in \mathbf{Q}^{>0} \setminus \{1\}$.

$\langle 2\rangle$ *(a) Es sei* $\alpha_1 > \mu_1$. *Dann ist* $(F^{\widetilde{\varphi}_{\alpha,k}}, \overline{v}_{a,\mu}|_F)$ *ein bewerteter Fastkörper, der im Fall* $\alpha = Id$ *den invariant bewerteten Teilfastkörper* $(K^{\mathfrak{r}}, v)$ *enthält.*

(b) Es sei $\alpha_1 > \mu_1$, *und es sei* α *der wie folgt für ein* $\rho \in \mathbf{Q}^{>0}$ *definierte Automorphismus von* K*:*

$$\alpha : \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma} X^{(\gamma_1,\gamma_2)} x_{(\gamma_1,\gamma_2)} \rightarrow \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma} X^{(\rho\cdot\gamma_1,\gamma_2)} x_{(\gamma_1,\gamma_2)}$$

Es sind dann $(K^{\widetilde{\varphi}_{\alpha,k}|_K}, v)$ *und* $(F^{\widetilde{\varphi}_{\alpha,k}}, \overline{v}_{a,\mu}|_F)$ *nicht-multiplikativ bewertete Fastkörper, wenn* $\rho \neq 1$.

Beweis. (a) Vgl. das Beispiel nach (7.2): Es sei $\overline{E}$ ein algebraischer Abschluß von E. Dann enthält $\overline{E}((\Gamma))$ einen algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von K. Es bezeichne $\hat{v}$ die Ordnungsbewertung von $\overline{E}((\Gamma))$ und $\overline{v} := \hat{v}|_{\overline{K}}$.

Wir setzen jedes $\delta \in \Delta_{\mathfrak{r}}$ wie in dem Beispiel nach (7.2) zu einem $A_{\overline{v}}$-Automorphismus $\overline{\delta}$ von $\overline{K}$ fort. Es bezeichne $\overline{\Delta} := \{\overline{\delta} \mid \delta \in \Delta_{\mathfrak{r}}\}$.

Es sei nun $z \in \overline{K}$ und $\overline{v}(z) = (\zeta_1, \zeta_2)$. Dann gilt (wegen $\mu_1 \notin \mathbf{Q}$)

$$(\zeta_1, \zeta_2) \geq (\mu_1, \mu_2) \Leftrightarrow \zeta_1 > \mu_1 \Leftrightarrow \overline{v}\overline{\delta}(z) = (\zeta_1, \lambda \cdot \zeta_2) \geq (\mu_1, \mu_2).$$

Aus (7.2), $\langle 1\rangle$, der Bemerkung nach (4.3) und den vorangegangen Betrachtungen folgen die Behauptungen.

(b) Es seien $u \in U_v \subset U_w$ (d.h. $v(u) = (1,0)$) und $x \in K^* \subset F^*$, und $v(x) =: (\gamma_1, \gamma_2)$.

Wegen $v(\alpha(k(u))) = v(\alpha(u)) = (\rho, 0)$ erhalten wir $w(\widetilde{\varphi}_{\alpha(k(r))}(x)) = v(\mathfrak{r}_{\alpha(u)}(x)) = (\gamma_1, \rho \cdot \gamma_2)$ und daher $w(x) = w(\widetilde{\varphi}_{\alpha(k(u))}(x)) \Leftrightarrow \rho = 1$. Nun beachte man (1.9.b). $\square$

Es wird nun eine Kopplung vom Typ 2 erklärt:

Es sei wieder allgemein $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ mit $\alpha \circ \mathfrak{r}_x = \mathfrak{r}_c \circ \alpha$ für alle $x \in K^*$ gegeben.

Es ist offenbar E im Fixkörper von $\Delta_{\widetilde{\varphi}_{\alpha,k}}$ enthalten.

Es seien ρ der Homomorphismus $(K^*, \cdot) \to (E^*, \cdot)$, $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} X^\gamma x_\gamma \to x_{v(x)}$ und $\sigma : \mathfrak{P} \to E^*$, $p \to \omega(\deg(p))$ für eine Abbildung $\omega : \mathbf{N} \to E^*$. Es bezeichne τ den ρ und σ fortsetzenden Homomorphismus von $(F^*, \cdot)$ in $(E^*, \cdot)$. Dann ist $\varepsilon : x \to \varepsilon_{r(x)}$ mit $r(x) = \tau(x) \cdot t$ eine Kopplung vom Typ 2.

Wegen $E^* \subset \mathrm{Kern}(\mathfrak{r})$ folgt mit (6.9) – es ist hierbei $\mathfrak{s}_q = \mathrm{Id}_K$ für alle $q \in \mathfrak{P}$:

$\langle 3 \rangle$ *Es ist* $(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}_{\alpha,k}) : x \to \varepsilon_{r(x)} \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha(k(x))})$ *eine starke* $(K \cdot t)$*-Kopplung auf* F.

Aus (7.4) und $\langle 2 \rangle$ erhalten wir nun (wegen $v(\tau(x)) = (1,0)$ für alle $x \in F^*$ und $v(\tau(x) - a) + v(a) \geq (1,0) + (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$):

$\langle 4 \rangle$ *(a) Es ist* $(F^{(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}_{\alpha,k})}, \overline{v}_{a,\mu}|_F)$ *ein bewerteter Fastkörper, wenn* $\alpha_1 > \mu_1$.

(b) Es ist $(F^{(\varepsilon \cdot \widetilde{\varphi}_{\alpha,k})}, \overline{v}_{a,\mu}|_F)$ *ein nicht-multiplikativ bewerteter Fastkörper, wenn* $\alpha_1 > \mu_1$ *und* α *wie in* $\langle 2 \rangle$ *(b) gegeben ist.*

7.5 Bewertete Fastkörper mit zyklischer Dicksongruppe

Für $x = \frac{p}{q} \in F^*$ bezeichne $d(x) := \deg p - \deg q$. Es sei $\varphi \in \mathrm{Aut}_{(K)} F$ mit der Eigenschaft $\deg(\varphi(p)) = \deg(p)$ für alle $p \in K[t]$ gegeben. Dann liefert

$$\kappa : \begin{cases} F^* \to Aut(F) \\ x \quad \to \kappa_x := \varphi^{d(x)} \end{cases}$$

eine starke Kopplung auf F mit der Dicksongruppe $\Delta_\kappa = \langle \varphi \rangle$.

Im folgenden bezeichne κ diese Kopplung.

(7.5) *Es sei* φ *ein* A_w*-Automorphismus von* F*, und es seien* $a \in K$ *und* $\mathfrak{a} := (a_i)_{i \in I}$ *eine transzendente* $\overline{v}$*-Ostrowskifolge in* K*. Dann gilt:*

Ist $w = \overline{v}_{a, \Gamma_{\overline{v}}}|_F$*, so ist* w *eine invariante Bewertung von* F^κ.

Ist $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $\tilde{\Sigma}(\mu) \neq \Gamma_{\overline{v}}$ [1] *oder $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ eine multiplikative Bewertung von F^κ, so ist $w\varphi^n = w$ für alle $n \in \mathbf{Z}$, insbesondere ist w auch invariant.*

Beweis. Mit φ ist für jedes $n \in \mathbf{Z}$ auch φ^n ein A_w-Automorphismus von F – nach (1.9.a) ist (F^κ, w) ein bewerteter Fastkörper.

1. Es seien $w = \overline{v}_{a,\Gamma_{\overline{v}}}|_F$, $r \in A_w$ und $x \in F^*$. Wir zeigen $w(r\kappa_r(x)) \leq w(x)$, die Behauptung folgt dann aus (1.9.c).

Es gilt $\mu := w(t-a) > \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma_v$ und daher $w(r) = \alpha \cdot \mu^{d(r)} \leq 1$ für ein $\alpha \in \Gamma_v$ und $d(r) \leq 0$. Weiter gilt $w(r\kappa_r(x)) = w(r) \cdot w(\kappa_r(x)) = \alpha \cdot \mu^{d(r)} \cdot w(\varphi^{d(r)}(x))$. Also ist $w(r\kappa_r(x)) \leq w(x)$ im Fall $d(r) = 0$, und falls $d(r) < 0$, beachte man, daß nach Voraussetzung $d(x) = d(\varphi^{d(r)}(x))$ gilt. Es ist $w(x) = \beta \cdot \mu^{d(x)}$ für ein $\beta \in \Gamma_v$ und $w(\varphi^{d(r)}(x)) = \delta \cdot \mu^{d(x)}$ für ein $\delta \in \Gamma_v$. Daraus folgt $w(r\kappa_r(x)) = \alpha \cdot \mu^{d(r)} \cdot \delta \cdot \mu^{d(x)} < \beta \cdot \mu^{d(x)} = w(x)$.

2. Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $\tilde{\Sigma}(\mu) \neq \Gamma_{\overline{v}}$. Die Multiplikativität von w bedeutet nach (1.9.b) $w\kappa_u = w$ für alle $u \in U_w$.

Nach Voraussetzung existiert ein Element $d \in K$ mit $v(d) > \mu, \mu^2$. Es folgt $u := \frac{(t-a)^2+d}{(t-a)+d} \in U_w$, und es ist $\kappa_u = \varphi$. Weil w multiplikativ ist, gilt also $w\,\varphi = w$, also auch $w\,\varphi^n = w$ für alle $n \in \mathbf{Z}$. Mit (1.9.c) folgt die Invarianz der Bewertung w von F^κ.

3. Es seien $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$ und $w\kappa_u = w$ für alle $u \in U_w$.

Es sei $(\mu_i)_{i\in I}$ die zu $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$ gehörige Maßfolge. Es existieren ein $i \in I$ und ein $d \in K$ mit $v(d) > \mu_i, \mu_i^2$. Wie in 2. folgt mit $u := \frac{(t-a_i)^2+d}{(t-a_i)+d} \in U_w$ aus der Multiplikativität von w die Invarianz von w. □

Mit den Voraussetzungen in (7.5) gilt:

Korollar. *Es sei $w = \overline{v}_{a,\mu}|_F$ mit $\tilde{\Sigma}(\mu) \neq \Gamma_{\overline{v}}$ oder $w = \overline{v}_{\mathfrak{a}}|_F$. Genau dann ist (F^κ, w) ein nicht-multiplikativ bewerteter Fastkörper, wenn $\varphi \in A_w$-Aut$(F) \setminus w$-Aut(F).*

[1] $\tilde{\Sigma}(\mu) = \{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \mid \gamma \leq \mu\}$ – vgl. die Betrachtungen nach (2.2).

Literaturverzeichnis

[1] V. Alexandru, N. Popescu, Sure une classe de prolongements á K(x) d'une valuation sur une corp K. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 5 (1988), 393-400

[2] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu, Minimal pairs of definition of a residual transcendental extension of a valuation. J. Math. Kyoto Univ. 30 (1990), 207-225

[3] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu, All valuations on K(X). J. Math. Kyoto Univ. 30 (1990), 281-296

[4] J.-P. Allouche, Transcendence of formal power series with rational coefficients. Theoretical Computer Science 218(1999), 143-160

[5] E. Artin, O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1926), 85-99

[6] N. Bourbaki, Commutative Algebra. Hermann, Paris (1972)

[7] J.-A. Cohen, D.Mathews, Valuations defined by Ostrowski nets. J. Pure Appl. Alg. 90 (1993), 221-227

[8] O. Endler, Valuation Theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972)

[9] J. M. Gamboa, Ordered fields with the dense orbits property. J. Pure Appl. Algebra 30 (1983), 237-246

[10] J. M. Gamboa, Some New Results on Ordered Fields. J. Algebra 110 (1987), 1-12

[11] D. Gröger, Über angeordnete Fastkörper. Dissertation Hannover, Beiträge zur Geometrie und Algebra 7, TUM München (1982)

[12] D. Gröger, Embedding of near-fields with real valuations into planar near-fields. Results in Mathematics 7 (1984), 58-62

[13] P. Hartmann, S. Priess-Crampe, Zur Konstruktion angeordneter planarer Dicksonscher Fastkörper. Geometriae Dedicata 36 (1990), 199-205

[14] I. Kaplansky, Maximal Fields with Valuations. Duke Math. J. 9 (1942), 313-321

[15] C. Karpfinger, H. Wähling, Äquivalenz und Isomorphie bei Bewertungsfortsetzungen auf einfach-transzendente Erweiterungen. Math. Z. 238 (2001), 461-481

[16] H. Karzel, Unendliche Dicksonsche Fastkörper. Arch. Math. 16 (1965), 247-256

[17] S. K. Khanduja, On valuations of K(x). Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992), 419-426

[18] W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie. J. Reine Angew. Math. 167 (1932), 160-196

[19] Mathiak, Valuations of skew fields and projective Hjelmslev spaces. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1986)

[20] A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. Math. Zeit. 39 (1934), 269-404

[21] F. Pokropp, Dicksonsche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 30 (1967), 188-219

[22] S. Prieß-Crampe, Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1983)

[23] F. Radó, Non-Injective Collineations on Some Sets in Desarguesian Projective Planes and Extension of Non-Commutative Valuations. Aeq. Math. 4 (1970), 307-321

[24] T. Rella, Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone. J. Reine Angew. Math. 158 (1927), 33-48

[25] F. F. Rodriguez, On fields having the extension property. J. Pure Appl. Algebra 77 (1992), 183-187

[26] O.F.G. Schilling, The theory of valuations. Math. Surveys, no. 4, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1950

[27] H. Sharif, C. F. Woodcock, On the Transcendence of Certain Series. J. Algebra 121 (1989), 364-369

[28] W. Wahl, H. Wefelscheid, Anordnung und Bewertung in Fastkörpern. Results in Mathematics 19 (1991), 368-374

[29] H. Wähling, Theorie der Fastkörper. Thales Verlag, Essen (1987)

[30] H. Wefelscheid, Zur Konstruktion bewerteter Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 38 (1972), 106-117

[31] H. Wefelscheid, Bewertung und Topologie in Fastkörpern. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 39 (1973), 130-146

[32] S. Warner, Topological Fields. North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V. (1989)

[33] J. Zemmer, Valuation near-rings. Math. Z. 130 (1973), 175-188

Symbolverzeichnis

$\varphi \circ \psi$	Produktabbildung
Id, Id_X	identische Abbildung
$\mathbf{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbf{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbf{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbf{R}$	reelle Zahlen
$\mathbf{C}$	komplexe Zahlen
$\lvert X \rvert$	Kardinalzahl der Menge X
$\langle X \rangle$	von X erzeugte Untergruppe
$\mathrm{Char} K$	Charakteristik von K
F	$= (F, +, \cdot)$, 7
A^*	$= A \setminus \{0\}$ für jede additiv geschriebene Gruppe
(F, v)	bewerteter Fastkörper, 8
Γ_v	Wertemenge von v, 10
A_v	Bewertungsfastring von v, 10
M_v	maximales Ideal von v, 10
U_v	Einheitengruppe von v, 10
F_v	$= A_v / M_v$, 10
π_v	kanonischer Epimorphismus, 10
$v \sim v'$	äquivalente Bewertungen, 10
$(F, v) \cong (F', v')$	bewertungsisomorphe Fastkörper, 10
$\overline{v}_{a,\mu}$	Rellafortsetzung von $\overline{v}$, 17
$\overline{v}_{a,\Sigma}$	Rellafortsetzung von $\overline{v}$, 18
$\overline{v}_{\mathfrak{a}}$	von $\mathfrak{a}$ induzierte Fortsetzung von $\overline{v}$, 18
$\mu(\mathfrak{a})$	Maßfolge von $\mathfrak{a}$, 17
$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$	äquivalente transzendente $\overline{v}$-Ostrowskifolgen, 19
$\Lambda_{\overline{w}}$	$= \{\overline{w}(t - z) \mid z \in \overline{K}\}$ 17
F^κ	κ-Ableitung von F, 8
Γ^φ	φ-Ableitung von Γ, 14
P_κ	Fixfastkörper von Δ_κ, 8
Δ_κ	Dicksongruppe von κ, 6
$x^{\underline{n}}$	n-te Potenz von x bzgl. $\circ$, 8
Δ_0	75

$\widetilde{\Delta}$	$\{\widetilde{\delta} \mid \delta \in \Delta\}$, 41
$\mathrm{Aut}(\Gamma, +, \leq)$	Gruppe der isotonen Automorphismen von Γ
$\mathrm{Aut}(F)$	Automorphismengruppe von F
$\mathrm{Aut}_K(F)$	Gruppe der K-Automorphismen von F
$\mathrm{Aut}_{(K)}(F)$	Gruppe der (K)-Automorphismen von F, 21
$\mathrm{Aut}_t(F)$	Gruppe der t-Automorphismen von F, 39
v-$\mathrm{Aut}(K)$	Gruppe der v-Automorphismen von K, 21
A_v-$\mathrm{Aut}(K)$	Gruppe der A_v-Automorphismen von K, 21
w-$\mathrm{Aut}(F)$	Gruppe der w-Automorphismen von F, 21
A_w-$\mathrm{Aut}(F)$	Gruppe der A_w-Automorphismen von F, 21
ε_q	K-Automorphismus mit $\varepsilon_q(t) = q$, 33
ε_A	K-Automorphismus, 48
$\widetilde{\varphi}$	Fortsetzung von φ zu einem t-Automorphismus, 39
$\mathfrak{K}(F)$	Menge der Kopplungen auf F, 8
$\mathfrak{K}_s(F)$	Menge der starken Kopplungen auf F, 8
K-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken K-Kopplungen auf F, 47
(K)-$\mathfrak{K}$	Menge der (K)-Kopplungen auf F, 59
(K)-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken (K)-Kopplungen auf F, 59
t-$\mathfrak{K}$	Menge der t-Kopplungen auf F, 39
t-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken t-Kopplungen auf F, 39
$(K \cdot t)$-$\mathfrak{K}$	Menge der $(K \cdot t)$-Kopplungen auf F, 61
$(K \cdot t)$-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken $(K \cdot t)$-Kopplungen auf F, 61
A_w-$\mathfrak{K}$	Menge der A_w-Kopplungen auf F, 21
A_w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken A_w-Kopplungen auf F, 21
w-$\mathfrak{K}$	Menge der w-Kopplungen auf F, 21
w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken w-Kopplungen auf F, 21
t-w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken t-w-Kopplungen auf F, 74
t-A_w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken t-A_w-Kopplungen auf F, 74
K-w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken K-w-Kopplungen auf F, 75
K-A_w-$\mathfrak{K}_s$	Menge der starken K-A_w-Kopplungen auf F, 75
$\mathfrak{P}$	Menge der normierten Primpolynome, 40
$\mathfrak{P}_2$	Menge der normierten, nichtlinearen Primpolynome, 55
p_δ	54
$\mathfrak{M}$	K-Algebra der 2×2-Matrizen über K, 47
$\mathfrak{M}^\times$	Einheitengruppe von $\mathfrak{M}$, 47

I	Einheitsmatrix aus $\mathfrak{M}$, 47
$Z_{\mathfrak{M}^*}(M)$	Zentralisator von M in $\mathfrak{M}^*$, 47
$D(A)$	Determinante von A, 48
$S(A)$	Spur von A, 48
$\overline{A}$	$= K^* \cdot A$ für $A \in \mathfrak{M}$, 47
$\overline{\mathfrak{U}}$	$= \{\overline{A} \mid A \in \mathfrak{U}\}$, 47
$\mathfrak{B}$	Menge der Bahnen einer Operation
$\Gamma \neq V$	Γ ist keine Kleinsche Vierergruppe, 48
$\widetilde{\Sigma}(\delta)$	$= \{\gamma \in \Gamma_{\overline{v}} \mid \gamma \leq \delta\}$, 18
$E((\Gamma))$	Körper der formalen Potenzreihen auf Γ über E, 14
$\mathrm{Tr}(x)$	Träger von x, 14
$N(a)$	Zerfällungskörper von p_a in $\overline{K}$, 34
$N(\mathfrak{a})$	Zerfällungskörper von $\{p_{a_i} \mid i \in I\}$ in $\overline{K}$, 34
$K^{>0}$	Menge der positiven Elemente von K
$K^{(2)}$	Menge der Quadrate in K, 50
K_e	$= K \cup \{e\}$, 50
$a \circ_A b$	Verknüpfung in K_e bzgl. A, 50
I_q	19